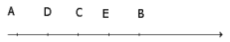
Геометријска вјероватноћа

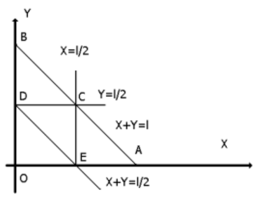
У случајевима када је простор исхода непребројив користимо дефиницију геометријске вјероватноће. Ако је Ω област која представља скуп свих исхода а $A \subset \Omega$ подобласт коју формирају исходи повољни за реализацију догађаја A, тада вјероватноћом догађаја A сматрамо $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$ гдје $m(X)$ представља мјеру области X. Ако су разматране области дијелови праве, равни или простора тада је мјера дужина, површина или запремина.

Примјер:
Са дужи AB дужине l случајно се бира једна тачка. Израчунати вјероватноћу а. да је тачка ближе средини дужи него тачки A б. да је тачка ближе средини дужи него једном од крајева.
Решење:



Са C означимо средину дужи AB а са D и E средине дужи AC и CB. Са D_1 означимо догађај " тачка је ближе средини дужи него тачки A " а са D_2 означимо догађај " тачка је ближе средини дужи него једном од крајева" . Тада је Ω скуп свих тачака дужи AB, D_1 је скуп свих тачака дужи DB, а D_2 је скуп свих тачака дужи DE. Мјере, тј. дужине ових дужи су $m(AB) = l$, $m(DB) = \dfrac{3}{4}l$, $m(AB) = \dfrac{1}{2}l$, па су одговарајуће вјероватноће:
$P(D_1) = \dfrac{m(DB)}{m(AB)} = \dfrac{3}{4}$ и $P(D_2) = \dfrac{m(DE)}{m(AB)} = \dfrac{1}{2}$.

Примјер:
Дуж дужине l случајно је подијељена на три дијела. Наћи вјероватноћу да ће се од та три дијела моћи формирати троугао.
Решење:



Ако дијелове дужи означимо са X, Y и $l - X - Y$ тада ће скуп свих исхода бити одређен скупом тачака $\Omega \subset R^2$ које задовољавају услове $0 \le X \le l$, $0 \le Y \le l$, $0 \le l - X - Y \le l$. $\Omega = \{(X,Y) \in R^2 | 0 \le X \le l; 0 \le Y \le l; 0 \le X + Y \le l\}$. Збир сваке двије стране троугла мора бити већи од треће стране па ће догађај A =" може се формирати троугао" бити представљен скупом тачака $A \subset \Omega$ које задовољавају услове $X + Y > l - X - Y$, $Y + l - X - Y > X$ $l - X - Y + X > Y$. $A = \{(X,Y) \in R^2 | X + Y > l/2; X < l/2; Y < l/2\}$. Мјера области Ω је површина троугла OAB, а мјера области A је површина троугла CDE, па ће тражена вјероватноћа бити $P(A) = \dfrac{m(CDE)}{m(OAB)} = \dfrac{(l/2)^2/2}{l^2/2} = \dfrac{1}{4}$.

Примјер:
Два брода морају да стигну у исто пристаниште. Вријеме доласка оба брода је независно и једнако могуће у току дана. Наћи вјероватноћу да ће један од бродова морати да чека на ослобађање пристаништа, ако је вријеме задржавања једног брода у пристаништу један сат а другога два сата.
Решење:

Ако са X означимо вријеме доласка брода који се у пристаништу задржава један сат а са Y вријеме доласка брода који се у пристаништу задржава два сата онда ће скуп свих могућих исхода бити квадрат $\Omega = \{(X,Y) \in R^2 | 0 \le X \le 24; 0 \le Y \le 24\}$. Нека је A догађај " један од бродова чека на ослобађање пристаништа ". Тада је скуп тачака које представљају исходе повољне за догађај A област $A \subset \Omega$ облика $A = \{(X,Y) \in R^2 | X \le Y \le X+1; Y \le X \le Y+2\}$. Очигледно

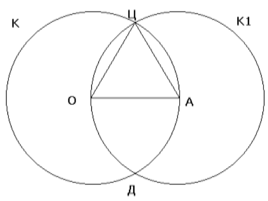
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{24^2 - (23^2/2) - (22^2/2)}{24^2} \approx 0.12$$

Примјер:

На кружници полупречника 1 случајно се бирају двије тачке. Колика је вјероватноћа да ће растојање међу њима у равни бити мање од 1 ?

Решење:

Нека је кружница К са центром у тачки О и полупречником 1. На кружници К случајно бирамо тачку А. Нека је К1 кружница са центром у тачки А и полупречником 1. Пресјечне тачке тих кружница означимо са Ц и Д.



Како су све тачке унутар К1 на растојању мањем од 1 од тачке А то ће за избор друге тачке Б повољна област бити лук ЦАД на кружници К. Тражена вјероватноћа једнака је односу дужине лука ЦАД и обима кружнице К. Троуглови ОАЦ и ОДА су очигледно једнакостранични па је угао $\angle$ЦОД= $2\pi/3$. Тражена вјероватноћа је

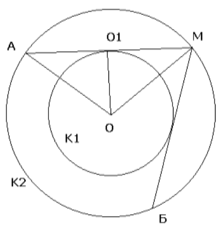
$$\frac{1*2\pi/3}{1*2\pi} = \frac{1}{3}.$$

Примјер:

У равни су дате двије концентричне кружнице К1 и К2 полупречника Р1 и Р2 (Р1<Р2). На кружници К2 случајно се бирају тачке М и Н. Колика је вјероватноћа да тетива МН не сијече кружницу К1 ?

Решење:

Из тачке М повуцимо тангенте на кружницу К1. Нека су пресјечне тачке тих тангенти са кружницом К2 тачке А и Б. За избор друге тачке Н повољна област биће лук АМБ на кружници К2. Тражена вјероватноћа једнака је односу дужине лука АМБ и обима



кружнице К2. Из троугла ОМО1 важи $\cos\angle$О1ОМ= $\frac{P1}{P2}$ па је $\angle$О1ОМ= $\arccos\frac{P1}{P2}$. Дужина лука АМ је 2*($\angle$О1ОМ)*Р2 па је тражена вјероватноћа

$$\frac{4*\arccos(P1/P2)*P2}{2\pi*P2} = \frac{2}{\pi}\arccos(P1/P2)$$