Разни примјери (независност, условна вјероватноћа, вјероватноћа пресјека и уније)

Примјер:
Два стријелца гађају по једном у циљ. Вјероватноћа да први погоди циљ је 0.7 а други 0.9 . Наћи вјероватноћу да циљ буде погођен бар једном.
Решење:
Елементарне догађаје можемо представити као уређене парове код којих симбол 1 или 0 на једној од координата представља погодак или промашај одговарајућег стријелца. Скуп свих могућих елементарних догађаја је $\Omega=\{\omega_1=(0,0);\omega_2=(0,1);\omega_3=(1,0);\omega_4=(1,1)\}$. Нека је $A$ догађај да је циљ погођен бар једном. Очигледно $A\subset\Omega$ и $A=\{\omega_2=(0,1);\omega_3=(1,0);\omega_4=(1,1)\}$ па је $P(A)=P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)$ тј. $P(A)=0.3\cdot 0.9+0.7\cdot 0.1+0.7\cdot 0.9=0.97$ . До резултата смо могли доћи и на следећи начин: Ако уведемо догађаје $A_1=$ "први стријелац погодио циљ", $A_1=\{(1,0);(1,1)\}$ и $A_2=$ "други стријелац погодио циљ", $A_2=\{(0,1);(1,1)\}$ тада је очигледно $A=A_1\cup A_2$. Како догађаји $A_1$ и $A_2$ нису дисјунктни то важи $P(A)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$ па је $P(A)=0.7+0.9-0.7\cdot 0.9=0.97$.
Примјер:
Такмичар погађа циљ са даљина 100м и 200м са вјероватноћама $p_1$ и $p_2$, $(p_1>p_2)$. Гађање се врши наизмјенично са задатих даљина при чему такмичар има право избора почетне даљине. Како треба изабрати почетну даљину ако је за добијање награде потребно остварити

a. Бар два узастопна поготка од три гађања
b. Бар три узастопна поготка од пет гађања.

Решење:
Одредићемо вјероватноће догађаја $A_{100}=$ "стријелац је добио награду са избором почетне даљине 100м" и $A_{200}=$ "стријелац је добио награду са избором почетне даљине 200м". Њихов однос одређује шта је повољније за избор почетне даљине. $A_{100}=\{(1;1;1),(1;1;0),(0;1;1)\}$ па је $P(A_{100})=p_1p_2p_1+p_1p_2(1-p_1)+(1-p_1)p_2p_1$ тј. $P(A_{100})=p_1p_2(2-p_1)$. На исти начин добијамо $P(A_{200})=p_2p_1(2-p_2)$ па због $P(A_{100})<P(A_{200})$ закључујемо да треба изабрати почетну даљину од 200м.
У другом случају користићемо догађаје $A_{100}=$ "стријелац је добио награду са избором почетне даљине 100м", $B=$ "стријелац је погодио у прва три гађања са избором почетне даљине 100м", $C=$ "стријелац је погодио у средишња три гађања са избором почетне даљине 100м", $D=$ "стријелац је погодио у последња три гађања са избором почетне даљине 100м". Како је $A_{100}=B\cup C\cup D$ то ће бити $P(A_{100})=P(B)+P(C)+P(D)-P(BC)-P(BD)-P(CD)+P(BCD)$ што даје $P(A_{100})=p_1p_2(2p_1+p_2-2p_1p_2)$. На исти начин добијамо $P(A_{200})=p_2p_1(2p_2+p_1-2p_2p_1)$ па због $P(A_{100})>P(A_{200})$ закључујемо да треба изабрати почетну даљину од 100м.
Примјер:
У $n$ кутија означених бројевима $1,2,3,4,\ldots n$ случајним избором распоређује се $n$ куглица означених тим истим бројевима. Одредити вјероватноћу да ће бар једна куглица бити смјештена у кутију са одговарајућим бројем.
Решење:
Сваки распоред куглица одговара некој пермутацији скупа $1,2,3,4,\ldots n$. Број свих могућих елементарних догађаја је $n!$. Нека је $A=$ "бар једна куглица је у кутији са истим бројем" и $A_i=$ "куглица са бројем $i$ је у кутији са бројем $i$", $i=1,2,\ldots n$. Тада је

$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ . Уопштењем претходно коришћене формуле добијамо:

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - ... + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 ... A_n)$. За догађај $A_1$ повољни су сви распореди гдје је на првој позицији број 1, а на осталим је било какав распоред бројева $2,3,4,...n$ . Зато је $P(A_1) = \frac{(n-1)!}{n!}$. Очигледно ће бити и $P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$ за $i = 2,3,4,...n$ . На исти начин добијамо $P(A_1 A_2) = \frac{(n-2)!}{n!}$; $P(A_1 A_2 A_3) = \frac{(n-3)!}{n!}$; ....Замјеном добијених вриједности у формули добијамо:

$$P(A) = \binom{n}{1}\frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!} - ... + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\frac{(n-n)!}{n!}$$

$$P(A) = \frac{n!}{1!(n-1)!}\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{(n-2)!}{n!} + \frac{n!}{3!(n-3)!}\frac{(n-3)!}{n!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{n!}{n!(n-n)!}\frac{(n-n)!}{n!}$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

<u>Примјер:</u>
Случајно се бира један од елемената из развијеног облика детерминанте $n-$тог реда. Наћи вјероватноћу $p_n$ да он не садржи елемент са главне дијагонале детерминанте. Одредити $\lim_{n\to\infty} p_n$.

<u>Решење:</u>

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

<u>Примјер:</u>
Бацају се двије коцке за играње. Наћи вјероватноћу да је пала бар једна четворка ако знамо да је збир добијених бројева већи од 7.
<u>Решење:</u>
Нека је $A =$ "пала је бар једна четворка" и $B =$ "збир добијених бројева је већи од 7". Тражимо условну вјероватноћу $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Скуп свих могућих елементарних догађаја можемо представити као $\Omega = \{\omega_1 = (1,1); \omega_2 = (1,2);...;\omega_{36} = (6,6)\}$ тј. као скуп уређених парова код којих прва и друга координата представљају број који се појавио на првој и другој коцки. Скуп елементарних догађаја повољних за догађај $B$ је: $B = \{(2,6);(3,5);(3,6);(4,4);(4,5);(4,6);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6)\}$ а скуп елементарних догађаја повољних за $AB$ је $AB = \{(4,4);(4,5);(4,6);(5,4);(6,4)\}$ па је

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{5/36}{15/36} = \frac{1}{3}.$$

<u>Примјер:</u>
Вјероватноћа наступања догађаја $A$ у сваком независном извођењу опита је иста и износи 0.3 . Опит се изводи све док се догађај $A$ не реализује. Одредити вјероватноћу да ће опит морати да се понови и четврти пут. Одредити вјероватноћу да ће опит бити изведен тачно четири пута.

Решење:
Нека је $B=$ "опит се мора поновити и четврти пут" и $C=$ "опит ће бити изведен тачно четири пута". Нека је $A_k =$ "у $k-$том понављању опита догађај $A$ се остварио" и $\overline{A}_k =$ "у $k-$том понављању опита догађај $A$ се није остварио". Тада је $B=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$ или краће $B=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ па је $P(B)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=(0.7)^3=0.343$ .
Такође $C=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$ па је $P(C)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)=(0.7)^3 0.3=0.1029$ .

Примјер:
Два играча наизмјенично бацају новчић. Игра се завршава када први пут падне грб. Побједник је играч који је добио грб. Одредити вјероватноће побједе за првог и другог играча.

Решење:
Нека је $D_1 =$ "побједио је први играч". Нека је $A_k =$ "у $k-$том бацању је пао грб " и $\overline{A}_k =$ "у $k-$том бацању је пало писмо ". Тада је

$D_1=A_1+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5+\ldots+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\ldots\overline{A}_{2n}A_{2n+1}+\ldots$ па је

$$P(D_1)=P(A_1)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5)+\ldots+P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\ldots\overline{A}_{2n}A_{2n+1})+\ldots$$

$$P(D_1)=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)+\ldots+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)\ldots P(\overline{A}_{2n})P(A_{2n+1})+\ldots$$

$$P(D_1)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

. Вјероватноћу побједе другог играча можемо добити на исти начин, или преко супротног догађаја:

$$P(D_2)=1-P(D_1)=\frac{1}{3}.$$

Формула тоталне вјероватноће и Бајесова формула

Ако за догађаје $H_1, H_2, \ldots H_n$ важи:

1. $H_i \bigcap H_j = \varnothing$ за $i \neq j$
2. $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$
3. $H_i \neq \varnothing$

тада важи формула тоталне вјероватноће: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i)$ .

Под истим условима важи и Бајесова формула:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)} .$$

Догађаје $H_1, H_2, \ldots H_n$ називамо хипотезама, њихове вјероватноће $P(H_k) \quad ; k = 1,2 \ldots n$ називамо априорним вјероватноћама, а вјероватноће $P(H_k|A) \quad ; k = 1,2 \ldots n$ називамо апостериорним вјероватноћама.

<u>Примјер:</u>
На авион се испаљују четири независна плотуна. Вјероватноћа поготка при сваком плотуну износи 0.4 . Да би авион био уништен довољна су два поготка. При једном поготку авион ће бити уништен са вјероватноћом 0.6 . Наћи вјероватноћу да ће авион бити уништен.
<u>Решење:</u>
Нека је A догађај да је авион уништен. Нека су $H_k \quad ; \quad k = 0,1,2,3,4$ хипотезе да је авион погођен $k$ пута. Тада је $P(A) = \sum_{i=0}^{4} P(H_i)P(A|H_i)$ . Очигледно је $P(A|H_0) = 0$, $P(A|H_1) = 0.6$, $P(A|H_2) = P(A|H_3) = P(A|H_4) = 1$. Такође је $P(H_0) = (0.6)^4$, $P(H_1) = \binom{4}{1}(0.4)(0.6)^3$, $P(H_2) = \binom{4}{2}(0.4)^2(0.6)^2$, $P(H_3) = \binom{4}{3}(0.4)^3(0.6)$, $P(H_4) = (0.4)^4$ па је $P(A) = (0.6)^4 0 + 4(0.4)(0.6)^3 0.6 + \ldots + (0.4)^4 = 0.5248$ .