Класична дефиниција вјероватноће

Посматрамо опит са више једнако могућих исхода. Простор свих могућих елементарних догађаја означавамо са $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_n\}$. За догађај $A \subset \Omega$, чија нас вјероватноћа интересује пребројавамо повољне елементарне догађаје. То су догађаји који додводе до реализације догађаја A. Тада је $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ гдје је $|S|$ број елемената скупа S.

Примјер:
Одредити вјероватноћу да се приликом случајног избора једног $r-$тог парцијалног извода функције $f(x_1, x_2, ..x_n)$ изабере један од мјешовитих парцијалних извода.
Решење:
Један елементарни догађај је избор једног $r-$тог парцијалног извода. Број свих парцијалних извода реда r, тј. број свих могућих елементарних догађаја одређујемо на следећи начин :

- Како је $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ то није битан поредак диференцирања већ само промјенљиве по којима се диференцира.
- По једној промјенљивој може се диференцирати више пута.

Значи број свих парцијалних извода реда r једнак је броју комбинација са понављањем класе r скупа од n елемената а то је $\binom{n+r-1}{r}$.

Број мјешовитих парцијалних извода, тј. број свих повољних елементарних догађаја добијамо када од броја свих извода одузмемо број парцијалних извода у којима се диференцирање врши само по једној промјенљивој. То су изводи $\left(\frac{\partial^r f}{\partial x_1^r}, \frac{\partial^r f}{\partial x_2^r}, ... \frac{\partial^r f}{\partial x_n^r}\right)$ и има их тачно n.

Тражена вјероватноћа је $p = \frac{\binom{n+r-1}{r} - n}{\binom{n+r-1}{r}} = 1 - \frac{n}{\binom{n+r-1}{r}}$

<u>Примјер:</u>
У n кутија убацују се $n+2$ куглице тако да свака куглица независно од других може са истом вјероватноћом да падне у било коју кутију. Наћи вјероватноћу да ниједна кутија не остане празна.
<u>Решење:</u>
Елементарне догађаје можемо представити као уређене $(n+2)-$торке код којих број на $i-$тој позицији представља број кутије у коју је упала $i-$та куглица.   (на примјер

$(n+2)-$торка $(1,1,1,1,\dots 1,1)$ представља догађај да су све куглице упале у прву кутију. $(1,2,3,4,5,\dots n-1,n,1,2)$ је догађај да су у све кутије пала по једна куглица и у кутије 1,2 је пала још по једна куглица.)

Број свих могућих елементарних догађаја је $|\Omega| = n^{n+2}$. За $n=1$ посматрани догађај је сигуран па је $P_1 = 1$. За $n>1$ повољни су следећи догађаји :

- **У једној кутији су три куглице а у свим осталим кутијама по једна**. Примјер: $(1,1,1,2,3,4,5,6,\dots,n-1,n)$. Све такве $(n+2)-$торке код којих се један број из скупа $\{1,2,\dots n\}$ јавља три пута, а остали бројеви по један пут у свим распоредима можемо добити на $\binom{n}{1}\frac{(n+2)!}{3!}$ начина.
- **У двије кутије су по двије куглице а у свим осталим кутијама по једна**. Примјер: $(1,1,2,2,3,4,5,6,\dots,n-1,n)$. Све такве $(n+2)-$торке код којих се два броја из скупа $\{1,2,\dots n\}$ јављају по два пута, а остали бројеви по један пут у свим распоредима можемо добити на $\binom{n}{2}\frac{(n+2)!}{2!\cdot 2!}$ начина.

Значи $P_n = \dfrac{\binom{n}{1}\frac{(n+2)!}{3!}+\binom{n}{2}\frac{(n+2)!}{2!\cdot 2!}}{n^{n+2}} = \dots = \dfrac{(n+2)!(3n+1)}{24n^{n+1}}, \quad n=2,3,4\dots$

<u>Примјер:</u>
У n кутија убацују се $n+1$ куглица тако да свака куглица независно од других може са истом вјероватноћом да падне у било коју кутију. Наћи вјероватноћу да тачно двије кутије буду празне.
<u>Решење:</u>
Елементарне догађаје можемо представити као уређене $(n+1)-$торке код којих број на $i-$тој позицији представља број кутије у коју је упала $i-$та куглица. Број свих могућих елементарних догађаја је $|\Omega| = n^{n+1}$. За $n \le 2$ посматрани догађај је немогућ. За $n>2$ повољни су следећи догађаји :

- **У једној кутији су четири куглице и у $(n-3)$ кутије је по једна куглица.** Примјер: $(1,1,1,1,2,3,4,5,6,\dots,n-2)$. Све такве $(n+1)-$торке код којих се један број из скупа $\{1,2,\dots n\}$ јавља четири пута, $(n-3)$ се јављају по један пут, а два броја се не јављају ни једном, у свим распоредима можемо добити на $\binom{n}{1}\binom{n-1}{n-3}\frac{(n+1)!}{4!}$ начина.
- **У једној кутији су три куглице, у једној двије и у $(n-4)$ кутије је по једна куглица.** Примјер: $(1,1,1,2,2,3,4,5,6,\dots,n-2)$. Све такве $(n+1)-$торке код којих се један број из скупа $\{1,2,\dots n\}$ јавља три пута, један два пута и $(n-4)$ се јављају по један пут, а два броја се не јављају ни једном, у свим распоредима можемо добити на $\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}\binom{n-2}{n-4}\frac{(n+1)!}{3!2!}$ начина.
- **У три кутије су по двије куглице, у $(n-5)$ кутија је по једна куглица**. Примјер: $(1,1,2,2,3,3,4,5,6,\dots,n-2)$. Све такве $(n+1)-$торке код којих се три броја из скупа $\{1,2,\dots n\}$ јављају по два пута, $(n-5)$ се јављају по један пут, а два броја се

не јављају ни једном, у свим распоредима можемо добити на $\binom{n}{3}\binom{n-3}{n-5}\frac{(n+1)!}{2!2!2!}$ начина.

Значи $P_n = \dfrac{\binom{n}{1}\binom{n-1}{n-3}\frac{(n+1)!}{4!} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{1}\binom{n-2}{n-4}\frac{(n+1)!}{3!2!} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{n-5}\frac{(n+1)!}{2!2!2!}}{n^{n+1}}$ тј

$$P_n = \frac{(n-1)^2(n-2)^2(n+1)!}{96n^n}, \quad n = 3,4,5...$$

Примјер:
Одредити вјероватноћу да се у добро промијешаном шпилу од 52 карте, између свака два кеца налази исти број карата.
Решење:
Једнаки број карата између свака два кеца се може кретати од 0 (сва четири кеца један до другог) до 16 (два кеца на почетку и крају шпила и још два у шпилу тј. позиције на којима се налазе четири кеца су 1,18,35,52). Тражена вјероватноћа ће бити $p = p_0 + p_1 + ... + p_{16} = \sum_{k=0}^{16} p_k$. Одредимо p_k . Број свих елементарних догађаја тј. број свих начина да се поређају 52 карте је 52!. Ако са a_1, a_2, a_3, a_4 означимо четири кеца а са $b_1, b_2, b_3, ... b_{48}$ остале карте један повољан елементарни догађај (један кец на врху шпила, затим к других карата па други кец..) би био $a_1 \underbrace{b_1 ... b_k}_{k} a_2 \underbrace{b_{k+1} ... b_{2k}}_{k} a_3 \underbrace{b_{2k+1} ... b_{3k}}_{k} a_4 \underbrace{b_{3k+1} ... b_{48}}_{48-3k}$. Како добити све различите повољне елементарне догађаје ?

- Четири кеца на задатим позицијама можемо распоредити на 4! начина.
- За сваки такав распоред остале карте можемо распоредити на 48! начина.
- Први кец може бити на позицији 1 ако му не претходи ниједна карта, или на позицији 2 ако му претходи једна карта, ... или на позицији $48-3k+1$ ако му претходи $48-3k$ карата.

То значи да је $p_k = \frac{4!48!(49-3k)}{52!}$ па је $p = \sum_{k=0}^{16} \frac{4!48!(49-3k)}{52!} = \frac{4!48!}{52!} \sum_{k=0}^{16}(49-3k)$ а то је

$$p = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}\left(\sum_{k=0}^{16} 49 - 3\sum_{k=0}^{16} k\right) = \frac{1}{13\cdot 17\cdot 25\cdot 49}\left(17\cdot 49 - 3\frac{16\cdot 17}{2}\right)$$

$$p = \frac{1}{13\cdot 17\cdot 25\cdot 49}(17\cdot 49 - 24\cdot 17) = \frac{1}{13\cdot 49} = \frac{1}{637} = 0.0015699$$

Примјер:
У хотел који има n једнокреветних соба нумерисаних бројевима $1,2,3,\ldots n$ долази $k, \quad (1 \le k \le n)$ гостију који на случајан начин бирају собу у којој ће бити смјештени. Колика је вјероватноћа да ће гости заузети k соба чији бројеви следе један за другим?
Решење:
Један елементарни догађај можемо представити као уређену $n-$торку код које на $i-$тој позицији пишемо 1 ако је соба са бројем i заузета или 0 ако није. Примјер једног повољног елементарног догађаја била би $n-$торка $(\underbrace{1,1,1,\ldots,1,1}_{k},\underbrace{0,0,\ldots,0,0}_{n-k})$ гдје је првих k соба заузето, а следећих $n-k$ соба слободно. Примјер једног неповољног елементарног догађаја била би $n-$торка $(\underbrace{1,1,1,\ldots,1,1}_{k-1},\underbrace{0,0,\ldots,0,0}_{n-k},1)$ гдје је првих $k-1$ соба заузето, а следећих $n-k$ соба слободно и $n-$та соба заузета. Број свих могућих елементарних догађаја једнак је броју свих оваквих $n-$торки. Њих има онолико колико има начина да пермутујемо k симбола 1 и $n-k$ симбола 0 а то је једнако броју пермутација са понављањем $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. До истог резултата долазимо ако констатујемо да таквих $n-$торки има онолико колико има начина да одаберемо k позиција, на којима треба уписати симбол 1, из скупа од n позиција а то је једнако броју комбинација без понављања $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
Повољне елементарне догађаје чине све оне $n-$торке које садрже непрекинути низ од k симбола 1. Тај низ мора почињати од позиције i и завршавати на позицији $i+k-1$. Због услова $i \ge 1$ и $i+k-1 \le n$ тј. $i \le n-k+1$ имамо да таквих $n-$торки мора бити тачно $n-k+1$. Стога је тражена вјероватноћа $p = \dfrac{n-k+1}{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}} = \dfrac{k!(n-k+1)!}{n!}$.

Претходни начин није и једини начин за решавање овог задатка. Елементарне догађаје могли смо представити и на следећи начин: У уређеној $k-$торци на $i-$тој позицији записујемо један од бројева $1,2,3,\ldots n$ што представља број собе у коју је смјештен $i-$ти гост. Како се у свакој $k-$торци сваки од бројева $1,2,3,\ldots n$ јавља само једном то је број свих оваквих $k-$торки, тј. број свих могућих елементарних догађаја једнак броју варијација без понављања класе k скупа од n елемената, а то је $n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1)) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Примјер једног повољног елементарног догађаја била би $k-$торка $(1,2,3,\ldots,k-1,k)$ гдје је првих k соба заузето, или било која њена пермутација. Примјер једног неповољног елементарног догађаја била би $k-$торка $(1,3,4,\ldots,k-1,k,k+1)$ гдје су собе 1 и 3 заузете а соба број 2 слободна. Број свих повољних елементарних догађаја одређујемо из услова:

- $k-$торки које садрже k узастопних бројева има као у претходном разматрању $n-k+1$
- пермутација такве $k-$торке одговара другачијем распореду гостију у истим собама па такође представаља повољан догађај јер су исте собе заузете

Значи број свих повољних догађаја је $(n-k+1)k!$. Тражена вјероватноћа је
$$\frac{(n-k+1)k!}{\dfrac{n!}{(n-k)!}} = \frac{(n-k+1)!k!}{n!}$$

Примјер:
На окупу је n мушкараца и n жена. За округлим столом има $2n$ мјеста која ове особе заузимају случајним избором. Одредити вјероватноћу да двије особе истога пола не заузму мјеста једна поред друге.
Решење:
Једноставности ради означимо особе мушког пола непарним бројевима $1,3,5,7,...2n-3,2n-1$ а особе женског пола парним бројевима $2,4,6,8,...2n-2,2n$.
Елементарне догађаје можемо представити као уређене $2n-$торке гдје број j на $i-$тој позицији значи да је особа означена бројем j сјела на мјесто број i. Примјер једног повољног елементарног догађаја била би $2n-$торка $(1,2,3,4,...,2n-1,2n)$ гдје наизмјенично сједе особе супротног пола. Примјер једног неповољног елементарног догађаја била би $2n-$торка $(1,3,2,4,...,2n-1,2n)$ гдје на мјестима 1 и 2 сједе особе мушког пола а на мјестима 3 и 4 особе женског пола. Број свих могућих елементарних догађаја очигледно је једнак броју пермутација без понављања скупа од $2n$ елемената а то је $(2n)!$.
Како можемо полазећи од очигледног повољног елементарног догађаја $(1,2,3,4,...,2n-1,2n)$ доћи до броја свих повољних елементарних догађаја?

- Ако пермутујемо непарне бројеве који се налазе на непарним позицијама добићемо $n!$ и даље повољних догађаја.
- Ако у сваком од тих $n!$ догађаја који се међусобно разликују по некој непарној позицији поступимо на исти начин тј. пермутујемо сада парне бројеве на парним позицијама добијамо укупно $(n!)^2$ међусобно различитих повољних елементарних догађаја.
- Исти такав број добијамо разматрајући све $2n-$торке код којих се на непарним позицијама налазе парни бројеви а на парним позицијама непарни бројеви.

Значи број свих повољних елементарних догађаја је $2(n!)^2$, а тражена вјероватноћа је $p=\dfrac{2(n!)^2}{(2n)!}$.
До истога резултата може се доћи и на следећи начин:

- Ако у $2n-$торци $(1,2,3,4,...,2n-1,2n)$ групишемо парове $((1,2),(3,4),...,(2n-1,2n))$ и дозволимо замјену мјеста парова при чему се задржавају позиције парног и непарног броја у пару добијамо $n!$ и даље повољних догађаја.
- n парова од n непарних и n парних бројева можемо саставити на $n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1=n!$ начина.
- Исти поступак поновимо за $2n-$торку $(2,1,4,3,...,2n,2n-1)$.

Значи број свих повољних елементарних догађаја је $2(n!)^2$, а тражена вјероватноћа је $p=\dfrac{2(n!)^2}{(2n)!}$.
Задатак се може ријешити и на сасвим други начин: Уређену $2n-$торку попуњавамо тако што случајно бирамо један по један број и уписујемо на позиције 1,2,3,...
Када бирамо број за позицију 1 то може да буде било који од $2n$ бројева. Када бирамо други од преосталих $2n-1$ бројева то мора да буде један од n бројева супротне парности у односу на претходни. Када бирамо трећи број од преосталих $2n-2$ бројева то мора да буде један од $n-1$ бројева исте парности као први. Када бирамо четврти број од преосталих $2n-3$ бројева то мора да буде један од $n-1$

бројева исте парности као други број. ... Стога је

$$p=\frac{2n}{2n}\cdot\frac{n}{2n-1}\cdot\frac{n-1}{2n-2}\cdot\frac{n-1}{2n-3}\cdot\frac{n-2}{2n-4}\cdot\frac{n-2}{2n-5}\cdot\ldots\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}$$

тј. $p=\frac{2(n!)^2}{(2n)!}$.

<u>Примјер:</u>

Бројевима $1,2,3,4,\ldots,2n-1,2n$ означено је $2n$ листова папира и $2n$ фасцикли. У сваку фасциклу се случајним избором ставља по један лист и формира збир бројева на фасцикли и уложеном листу. Наћи вјероватноћу да ће

a. Сви посматрани збирови бити парни.

b. Тачно два збира бити парна.

c. Бар два збира бити парна.

<u>Решење:</u>

a. $p=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

b. $p=\frac{n^4((n-1)!)^2}{(2n)!}$.

c. $p=1-\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

<u>Примјер:</u>

На полици се налази n двотомних романа. Одредити вјероватноћу да се међу $2m$ случајно узетих књига налази тачно k цјелокупних романа. Помоћу тога израчунати

$$S_m=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{2m-2k}4^{-k}.$$

<u>Решење:</u>

Нека је p_k вјероватноћа догађаја да је извучено тачно k цјелокупних романа и још $2m-2k$ књига које не формирају више ниједан комплетан роман. Ако романе нумеришемо бројевима $1,2,3,4,\ldots n-1,n$ све могуће елементарне догађаје можемо представити на следећи начин: У матрици реда $2\times n$ колоне одговарају романима $1,2,3,4,\ldots n-1,n$ а врсте одговарају првом и другом тому. Ако се у некој колони налазе два, један или ниједан симбол 1 то значи да су од тог романа извучена оба, само један или ниједан том. Један примјер повољног елементарног догађаја је догађај:

$$\begin{array}{c}
1,2,3,\quad k-1,k,k+1,\quad 2m-k-1,2m-k,2m-k+1,\quad n-1,n\\
\begin{bmatrix}1\;1\;1\ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 1\;1\;1 & 1 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0\end{bmatrix}
\end{array}$$

код кога су романи $1,2,3,\ldots k-1,k$ извучени комплетни, од романа $k+1,k+2,\ldots 2m-k-1,2m-k$ извучени само први томови, и од преосталих романа није извучен ниједан том. (очигледно имамо услов $2m-k\le n$ тј. $k\ge 2m-n$). Број свих могућих елементарних догађаја једнак је броју свих начина да у матрици реда $2\times n$ распоредимо $2m$ симбола 1 а то је једнако броју начина да од $2n$ позиција одаберемо $2m$ позиција тј. броју комбинација без понављања $\binom{2n}{2m}$. Како можемо записати све повољне елементарне догађаје:

- k колона гдје треба записати два симбола 1 можемо одабрати из скупа од n колона на $\binom{n}{k}$ начина

- $2m-2k$ колона гдје треба записати по један симбол 1 и један симбол 0 од преосталих $n-k$ колона можемо одабрати на $\binom{n-k}{2m-2k}$ начина
- У изабраних $2m-2k$ колона гдје треба записати по један симбол 1 и један симбол 0 то се може урадити на 2^{2m-2k} начина

Тражена вјероватноћа је $p_k = \dfrac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{2m-2k}2^{2m-2k}}{\binom{2n}{2m}}, \quad k = 0,1,2,..m-1,m.$ Очигледно је

$p_0 + p_1 + p_2 + ...p_m = 1$ па је $\sum_{k=0}^{m} p_k = \sum_{k=0}^{m} \dfrac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{2m-2k}2^{2m-2k}}{\binom{2n}{2m}} = \dfrac{2^{2m}}{\binom{2n}{2m}} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{2m-2k} 2^{-2k} = 1$

$$\frac{2^{2m}}{\binom{2n}{2m}} S_m = 1 \Rightarrow \quad S_m = \binom{2n}{2m} 4^{-m}$$

<u>Примјер:</u>

Из двије кутије са по n шибица, ваде се шибице тако што се сваки пут случајно бира кутија и из ње вади једна шибица. Наћи вјероватноћу да када се први пут установи да је једна кутија празна (тј. када се покушај узимања шибице из кутије заврши неуспјехом) у преосталој кутији буде k шибица. Израчунати $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} 2^k$.

<u>Решење:</u>

Нека је p_k вјероватноћа догађаја да се у преосталој кутији налази k шибица. Један повољан елементарни догађај био би $(\underbrace{1,1,1,...1}_{n},\underbrace{2,2,2,...2}_{n-k},1)$ тј. догађај да се првих n пута случајно узима кутија број 1, затим $n-k$ пута кутија број 2 и на крају кутија број 1. Његова вјероватноћа је $(1/2)^{2n-k+1}$. Сви догађаји које из наведеног догађаја добијамо замјеном мјеста првих $2n-k$ симбола су такође повољни. То можемо урадити на $\dfrac{(2n-k)!}{n!(n-k)!} = \binom{2n-k}{n}$ начина. Исто важи и када кутије замијене улоге па је $p_k = 2\binom{2n-k}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-k+1}$. Из тога користећи $1 = \sum_{k=0}^{n} p_k$ добијамо $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} 2^k = 4^n$.