Биномна Расподјела

Нека се један опит понавља n пута и нека је вјероватноћа реализације догађаја A у сваком понављању независна и једнака p. (На примјер : ако је опит бацање новчића вјероватноћа догађаја да падне грб је у сваком бацању једнака 1/2 или ако је опит бацање коцке вјероватноћа догађаја да падне број 6 је у сваком бацању једнака 1/6).

Нека је случајна промјенљива X једнака броју реализација догађаја A у тих n понављања опита. За случајну промјенљиву X кажемо да има биномну расподјелу и означавамо је са $X : B(n,p)$.

X узима вриједности из скупа $\{0,1,2,\dots,n-1,n\}$ са вјероватноћама

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,2,\dots,n$$

<u>Примјер:</u>

Колика је вјероватноћа да се у десет бацања коцкице за игру шестица појави

а. Пет пута б. Више од два али мање од пет пута.

<u>Решење:</u>

Нека је случајна промјенљива $X=$број шестица у 10 бацања. Тада је $X : B(n,p)$ тј.

$X : B(10,1/6)$ па је $P(X=k)=\binom{10}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$

Тада ће бити $P(X=5)=\binom{10}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^5$ тј. $P(X=5)=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\frac{5^5}{6^{10}}=\dots=0.013082$.

$$\mathrm{P}(2<\mathrm{X}<5)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=4)=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7+\binom{10}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^6=\dots=0.20932$$

<u>Примјер:</u>

Шта је вјероватније у игри једнаких противника :

а. Добити 3 од 4 или 6 од 8 партија

б. Бар 3 од 4 или бар 6 од 8 партија.

<u>Решење:</u>

Ако се играју четири партије и случајна промјенљива $X=$број побједа првог играча тада је $X : B(4;0.5)$ и $P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$. За случај осам партија и случајну промјенљиву $Y=$број побједа првог играча, имамо $Y : B(8;0.5)$ и

$P(Y=6)=\binom{8}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2^6}=\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{16}<\frac{1}{4}$. Очигледно вјероватније је добити 3 од 4 него 6 од 8 партија. У другом случају упоређујемо вјероватноће

$P(X\ge 3)=P(X=3)+P(X=4)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1+\binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{5}{16}$ и

$$P(Y\ge 6)=P(Y=6)+P(Y=7)+P(Y=8)=\left(\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{37}{256}=\frac{5}{16}\cdot\frac{37}{5\cdot 16}<\frac{5}{16}$$

<u>Примјер:</u>

Два кошаркаша са вјероватноћама по 0.6 и 0.7 убацују лопту у кош. Колика је вјероватноћа да ће у три бацања :

а. Имати исти резултат б. Први бити бољи од другог ц. Други бити бољи од првог

Решење:

Нека је случајна промјенљива $X =$број погодака првог кошаркаша, а случајна промјенљива $Y =$број погодака другог кошаркаша. X и Y имају биномну расподјелу па је $P(X = k) = \binom{3}{k} 0.6^k 0.4^{3-k} \quad ; k = 0,1,2,3.$ и $P(Y = k) = \binom{3}{k} 0.7^k 0.3^{3-k} \quad ; k = 0,1,2,3.$, тј.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.064 & 0.288 & 0.432 & 0.216 \end{pmatrix}, \ Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.027 & 0.189 & 0.441 & 0.343 \end{pmatrix}.$$

Означимо са A догађај да кошаркаши имају исти резултат. Тада је

$P(A) = P(X = 0)P(Y = 0) + P(X = 1)P(Y = 1) + P(X = 2)P(Y = 2) + P(X = 3)P(Y = 3)$ тј.

$P(A) = 0.064 \cdot 0.027 + 0.288 \cdot 0.189 + 0.432 \cdot 0.441 + 0.216 \cdot 0.343 = 0.32076$.

Означимо са B догађај да први кошаркаш има бољи резултат од другог. Тада је

$P(B) = P(X = 1)P(Y = 0) + P(X = 2)P(Y < 2) + P(X = 3)P(Y < 3)$ тј.

$P(B) = 0.288 \cdot 0.027 + 0.432 \cdot (0.027 + 0.189) + 0.216 \cdot (0.027 + 0.189 + 0.441) = 0.243$.

Означимо са C догађај да други кошаркаш има бољи резултат од првог. Тада је

$P(C) = P(X = 0)P(Y = 1) + P(X < 2)P(Y = 2) + P(X < 3)P(Y = 3)$ тј.

$P(C) = 0.064 \cdot 0.189 + (0.064 + 0,288) \cdot 0,441 + (0.064 + 0,288 + 0.432) \cdot 0.343 = 0.43624$ или

$\mathrm{P(C)} = 1 - \mathrm{P(A)} - \mathrm{P(B)} = \ldots = 0.43624$

Примјер:

Стријелац погађа циљ са вјероватноћом 0.6. Колико најмање гађања треба да изврши да би са вјероватноћом већом од 0.99 погодио циљ?

Решење:

Нека је случајна промјенљива $X =$ број погодака у n гађања. Тада је

$P(X = k) = \binom{n}{k} 0.6^k 0.4^{n-k} \quad ; k = 0,1,2,3 \ldots n$. Треба да одредимо n тако да буде

$\mathrm{P(X > 0)} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{P(X = k)} > 0.99$, тј. $1 - P(X = 0) > 0.99$. Из $P(X = 0) < 0.01$ тј. $0.4^n < 0.01$

добијамо $n > \dfrac{\ln 0.01}{\ln 0.4}$ тј. $n > 5.026$ што значи да је најмањи број гађања потребан да би се циљ погодио са вјероватноћом већом од 0.99 једнак шест.

Непрекидне случајне промјенљиве

X је непрекидна случајна промјенљива ако постоји ненегативна интеграбилна функција $f(x); x \in R$ таква да је за сваки интервал $[a;b)$:

$$P(X \in [a;b)) = P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Функцију $f(x)$ називамо густина расподјеле случајне промјенљиве X. Њена особина је $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Функцију $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ називамо функција расподјеле случајне промјенљиве X. Њене особине су :

1. $F(x)$ је неопадајућа
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
3. $F(x)$ је непрекидна са лијеве стране $F(x_{-0}) = F(x)$

Математичко очекивање непрекидне случајне промјенљиве је $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

<u>Примјер:</u>

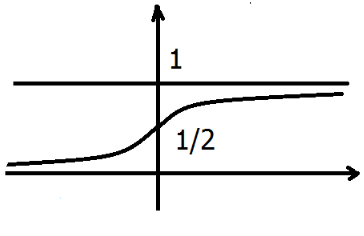
Нека случајна промјенљива X има густину расподјеле $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$.

- Одредити константу a.
- Одредити функцију расподјеле.
- Одредити $P(0 < X < 1)$.
- Испитати да ли постоји математичко очекивање EX ..

<u>Решење:</u>

Из особине $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ имамо $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{a}{1+x^2}dx = a \cdot \mathrm{arctg}x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = a\pi$ тј. $a = \dfrac{1}{\pi}$ па је густина расподјеле $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Функција расподјеле ће бити

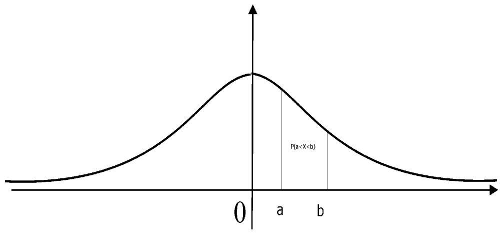
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt = \frac{1}{\pi} \cdot \mathrm{arctg}t \Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi} \cdot (\mathrm{arctg}x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}x + \frac{1}{2}.$$



Очигледно функција $F(x) = \dfrac{1}{\pi} arctgx + \dfrac{1}{2}$ је растућа функција, непрекидна и $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ што значи да су услови да буде функција расподјеле задовољени.

За налажење $P(0 < X < 1)$ користимо $P(a < X < b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

$$P(0 < X < 1) = \int_0^1 \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt = \frac{1}{\pi} arctgt \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{4} - 0) = \frac{1}{4}$$



Математичко очекивање не постоји јер интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

дивергира.