Непрекидне случајне промјенљиве

X је непрекидна случајна промјенљива ако постоји ненегативна интеграбилна функција $f(x); x \in R$ таква да је за сваки интервал $[a;b)$:

$$P(X \in [a;b)) = P(a \le X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Функцију $f(x)$ називамо густина расподјеле случајне промјенљиве X . Њена особина је $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Функцију $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ називамо функција расподјеле случајне промјенљиве X . Њене особине су :

1. $F(x)$ је неопадајућа
2. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
3. $F(x)$ је непрекидна са лијеве стране $F(x_{-0}) = F(x)$

Математичко очекивање непрекидне случајне промјенљиве је $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

<u>Примјер:</u>

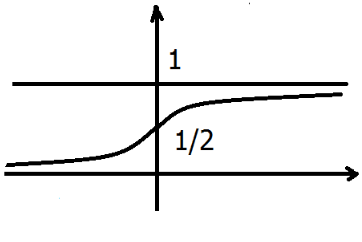
Нека случајна промјенљива X има густину расподјеле $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$.

- Одредити константу a.
- Одредити функцију расподјеле.
- Одредити $P(0 < X < 1)$.
- Испитати да ли постоји математичко очекивање EX ..

<u>Решење:</u>

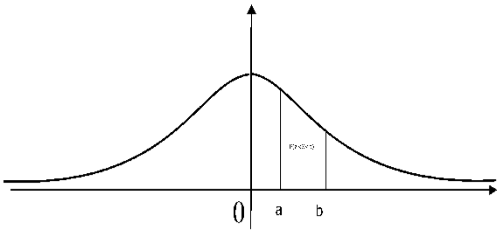
Из особине $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ имамо $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{a}{1+x^2}dx = a \cdot \mathrm{arctg}x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = a\pi$ тј. $a = \dfrac{1}{\pi}$ па је густина расподјеле $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Функција расподјеле ће бити

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt = \frac{1}{\pi}\cdot \mathrm{arctg}t \Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\cdot(\mathrm{arctg}x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}x + \frac{1}{2}.$$



Очигледно функција $F(x) = \dfrac{1}{\pi}arctgx + \dfrac{1}{2}$ је растућа функција, непрекидна и $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ што значи да су услови да буде функција расподјеле задовољени.

За налажење $P(0 < X < 1)$ користимо $P(a < X < b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$



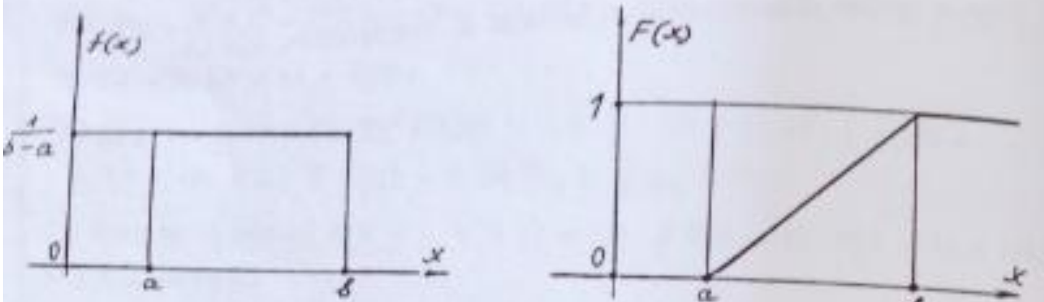
$$P(0 < X < 1) = \int_0^1 \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{\pi} arctgt \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{4} - 0) = \frac{1}{4}$$

Математичко очекивање не постоји јер интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{2\pi} \ln(1+x^2) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$ дивергира.

Neke važnije neprekidne raspodele sa osnovnim parametrima

(i) Ravnomerna (Uniformna) $\mathcal{U}$(a, b) raspodela (Sl. 2.29).



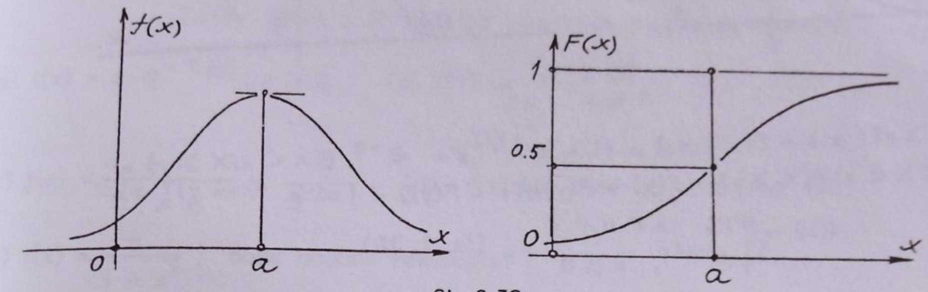
Sl. 2.29.

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a < x < b \\ 0, & \text{van} \end{cases}; \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & a \geqslant x \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leqslant b \\ 1, & b < x \end{cases};$$

$$EX = (a+b)/2; \quad DX = (b-a)^2/12, \quad m_k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(b-a)(k+1)}, \quad \gamma_1 = 0$$

$$\gamma_2 = -1.2.$$

(ii) Normalna (Gausova) $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ raspodela (Sl. 2.30).



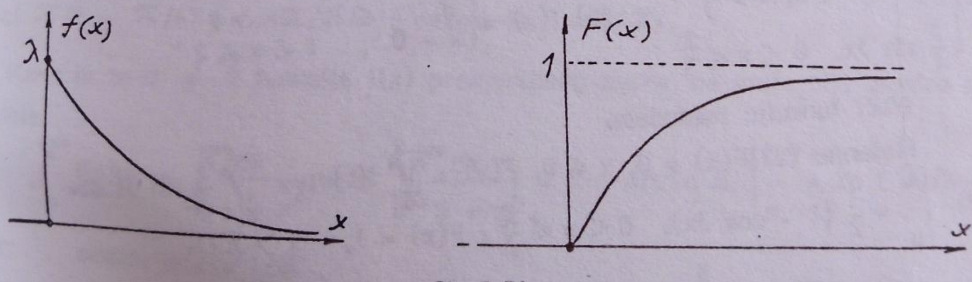
Sl. 2.30.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right\}; \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt;$$

$$EX = a, \quad DX = \sigma^2, \quad m_k = k! \cdot \sum_{i=0}^{k/2} \frac{a^{k-2}}{(k-2i)!} \cdot \frac{(\sigma^2/2)}{i!}$$

$$\mu_k = \begin{cases} 0, & k = 2l+1 \\ \dfrac{(2l)!}{l!} \left(\dfrac{\sigma^2}{2}\right)^l, & k = 2l \end{cases}, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0.$$

(iii) Eksponencijalna $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodela (Sl. 2.31.)

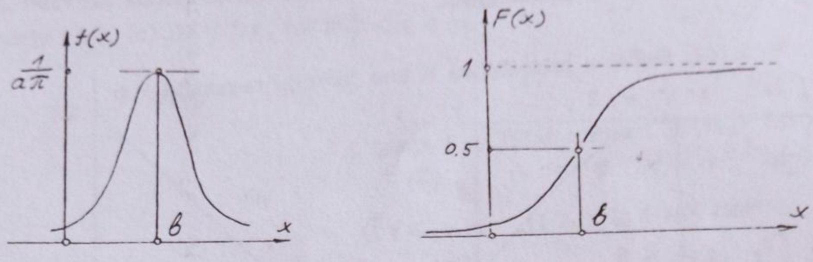


Sl. 2.31.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$EX = 1/\lambda, \; DX = 1/\lambda^2, \; m_k = k!\,\lambda^{-k}, \quad m_{k+1} = \frac{k+1}{\lambda} m_k, \quad \gamma_1 = 2, \quad \gamma_2 = 6.$$

(iv) Košijeva $\mathcal{C}(a, b)$ raspodela (Sl. 2.32)

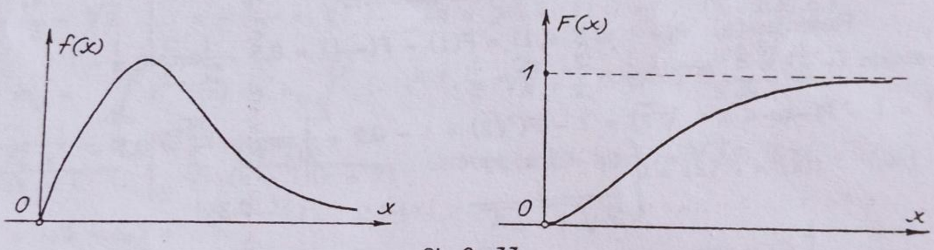


Sl. 2. 32.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + (x-b)^2}, \quad F(x) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-b}{a},$$

EX, DX, i momenti ne postoje.

(v) Relejeva $\mathcal{R}(\sigma)$ raspodela (Sl. 2.33.)



Sl. 2. 33.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x \geq 0, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x \geq 0, \end{cases}$$

$EX = \sigma\sqrt{\pi/2}$, $DX = \sigma^2(2 - \pi/2)$, $m_k = (\sigma\sqrt{2})^k \, \Gamma((k+2)/2)$,

$\gamma_1 = (\pi - 3)\sqrt{\pi/2}$, $\gamma_2 = 5 - 3\pi^2/4$.

2.5. Raspodele, gustine i numeričke karakteristike neprekidnih slučajnih promenljivih.

2.102. Slučajna promenljiva X ima funkciju raspodele

(a) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -2 \\ 0.5 + (1/\pi)\arcsin(x/2), & -2 < x \leqslant 2, \\ 1, & x > 2 \end{cases}$

Naći $P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$, $P(X \geqslant \sqrt{2})$,

(b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x^2, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

Naći $P(X < 0.5)$, $P(1/3 \leqslant X < 3)$, $P(1.5 < X < 2)$,

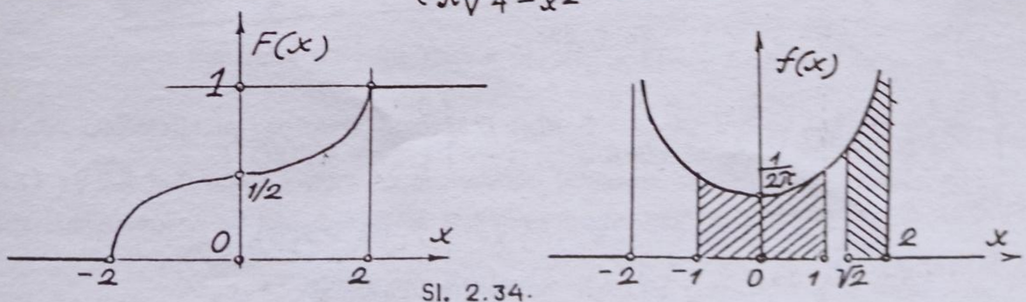
(c) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-x/T}, & x > 0 \end{cases}$,

Naći $P(X > aT)$, $a > 0$; $P(X < x / X \geqslant y)$, $y < x$.

Naći gustine u sva tri slučaja (ako postoje).

Rešenje: (a) $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = F(1) - F(-1) = 0.5 + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2} - 0.5 - \frac{1}{\pi}\arcsin(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}$.

$P(X \geqslant \sqrt{2}) = 1 - P(-\infty < X < \sqrt{2}) = 1 - F(\sqrt{2}) = 1 - 0.5 - \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.5 - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = 1/4$. $\quad f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 2 \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}, & |x| < 2 \end{cases}$ (Sl. 2.34)



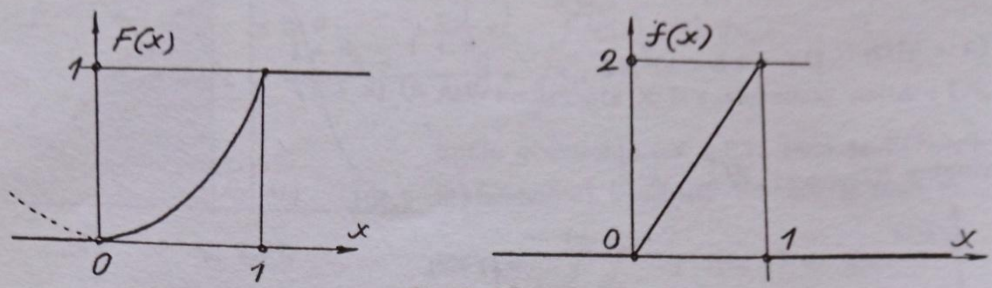
Sl. 2.34.

(b) $P(X < 0.5) = F(0.5) = (0.5)^2 = 1/4$,

$P(1/3 \leqslant X < 3) = F(3) - F(1/3) = 1 - (1/3)^2 = 8/9$,

$P(1.5 < X < 2) = F(2) - F(1.5) = 1 - 1 = 0$,

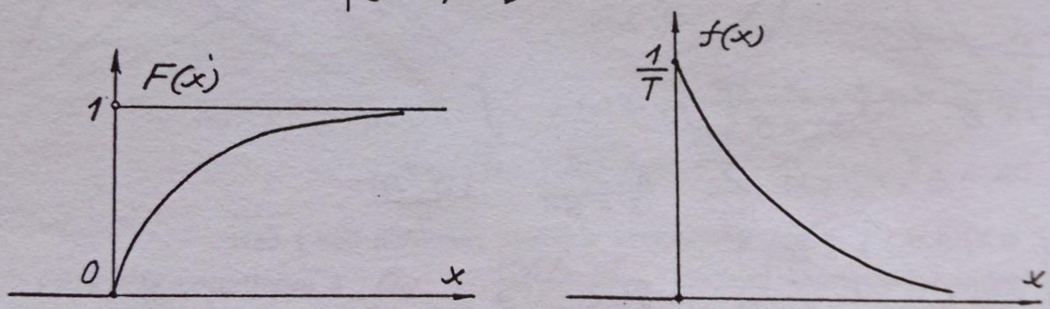
$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \notin (0,\ 1] \\ 2x \ , & x \in (0,\ 1] \end{cases} \qquad \text{(Sl. 2.35).}$$



Sl. 2.35

(c) $P(X \geqslant aT) = 1 - F(aT) = 1 - (1 - e^{aT/T}) = e^{-a}$, $P(X < x/X \geqslant y) =$
$= P(y \leqslant X < x)/P(X \geqslant y) = F(x) - F(y))/(1 - F(y)) = 1 - e^{-(x-y)T}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & x < 0 \\ \frac{1}{T} e^{-x/T}, & x \geqslant 0 \end{cases} \ , \qquad \text{(Sl. 2. 36).}$$



Sl. 2.36

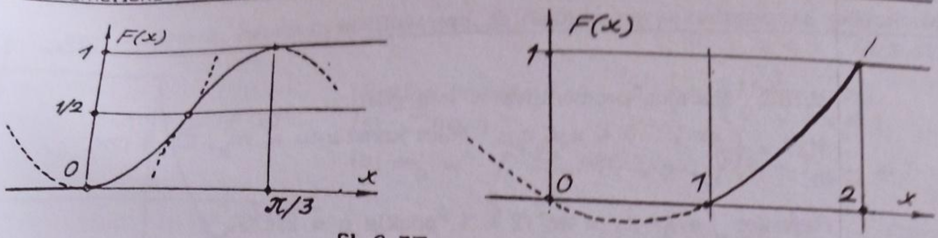
2.103. Data je gustina raspodele slučajne promenljive X

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0,\ x > \frac{\pi}{3} \\ \frac{3}{2} \sin 3x, & 0 < x \leqslant \frac{\pi}{3} \end{cases}$, (b) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \quad x > 2 \\ x - 0.5, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$.

Naći funkciju raspodele.

Rešenje: (a) $F(x) = 0,\ x \leqslant 0,\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{3}{2} \sin 3t \ dt =$
$= -\frac{1}{2} \cos 3t \Big|_{0}^{x} = \frac{1}{2}(1 - \cos 3x),\ \ 0 < x \leqslant \frac{\pi}{3}$; $F(x) = 1, \quad x > \pi/3$.

(b) $F(x) = 0, \quad x \leqslant 1, \quad F(x) = \int_{1}^{x} (t - 0.5)\, dt = (t^2/2 - t/2) \Big|_{1}^{x} = x(x-1)/2,$
$1 < x \leqslant 2, \quad F(x) = 1,\ x > 2.$ (Sl. 2.37)



Sl. 2.37

2.104. Može li se odrediti konstanta c tako da funkcije:

(a) $f(x) = a\, e^{-c|x|}$, $a > 0$, (b) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \dfrac{c}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \dfrac{c}{e^{x} + e^{-x}} = \dfrac{c}{2\mathrm{ch}x}$, (d) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ c \cdot \sin x, & 0 < x \leq 2\pi, \\ 0, & x > 2\pi \end{cases}$

(e) $f(x) = \dfrac{c}{1 + x^2}$, budu gustine raspodele?

Rešenje: Da bi funkcija f(x) bila funkcija raspodele mora biti

$f(x) \geq 0$ i $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} a\, e^{-c|x|}dx = 2a\int_{0}^{+\infty} e^{-cx}dx = \frac{2a}{c}\, e^{-cx}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{2a}{c} = 1.$ Dakle $c=2a$.

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty}\frac{cdx}{x} = c \cdot \ln x \Big|_{1}^{+\infty} = \begin{cases} \pm\infty, & c \neq 0 \\ 0, & c = 0 \end{cases}$, tj. f(x) ne može biti gustina raspodele.

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2c \cdot \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{e^{x} + e^{-x}} = 2c \cdot \int_{0}^{+\infty}\frac{d(e^{x})}{1 + e^{2x}} = 2 \cdot c \cdot \mathrm{arctg}\, e^{x}\Big|_{0}^{+\infty} =$

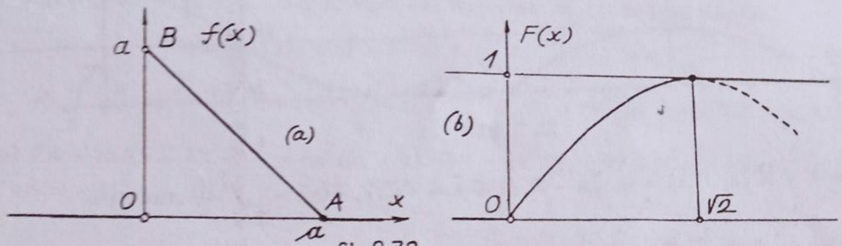
$= 2c(\pi/2 - \pi/4) = c \cdot \pi/2 = 1$, odakle je $c = 2/\pi$.

(d) Kako je za $c \neq 0$ funkcija f(x) promenljivog znaka, ne može biti gustina raspodele.

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cdx}{1 + x^2} = 2c\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1 + x^2} = 2 \cdot c \cdot \mathrm{arctg}\, x\Big|_{0}^{+\infty} = 2c\,(\pi/2 - 0) =$

$= c\pi$, odavde je $c = 1/\pi$.

2.105. Na slici 2.38. prikazana je gustina raspodele slučajne promenljive X. Naći (a) konstantu a i analitički izraz za funkciju gistine f(x), (b) funkciju raspodele F(x), (c) EX i DX, (d) $P(\frac{a}{2} < X < a)$.



Sl. 2.38

Rešenje: (a) Površina trougla, kome su temena tačke O(0, 0), A(a, 0) i B(0, a) je $a^2/2 = 1$, odakle je $a = \sqrt{2}$. Dakle

$$f(x) = \begin{cases} -x + \sqrt{2}, & x \in [0, \sqrt{2}] \\ 0, & \text{van} \end{cases}$$

(b) Za $0 < x$ $F(x) = 0$. Za $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ $F(x) = \int_0^x (-t + \sqrt{2})\, dt =$

$= -\frac{t^2}{2} + \sqrt{2} \Big|_0^x = -\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}\, x$. Za $x \geqslant \sqrt{2}$ $F(x) = 1$, (Sl. 2.38.b.)

(c) $m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx = \int_0^{\sqrt{2}} (-x^{k+1} + \sqrt{2}\, x^k)\, dx = -\frac{x^{k+2}}{k+2} +$

$+ \frac{\sqrt{2}\, x^{k+1}}{k+1} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^{k+2}}{(k+1)(k+2)}$. Odavde je $EX = m_1 = \sqrt{2}/3$, $EX^2 = 1/3$,

$DX = 1/3 - 2/9 = 1/9$.

(d) $P(\sqrt{2}/2 < X < \sqrt{2}) = F(\sqrt{2}) - F(\sqrt{2}/2) = 1 - 3/4 = 1/4$.

2.106. Slučajna promenljiva X ima gustinu

$$f(x) = \begin{cases} a \cos x, & -\pi/2 \leqslant x < \pi/2 \\ 0, & \text{van} \end{cases} \qquad \text{(Sl. 2.39).}$$

Naći (a) konstantu a, (b) funkciju raspodele F(x), (c) momente m_k i μ_k, (d) modu, medijanu i kvantil reda p, (e) $P(X \in [\pi/4, \pi])$ (f) asimetriju i eksces.

Rešenje: (a) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2a \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 2a \sin x \Big|_0^{\pi/2} =$

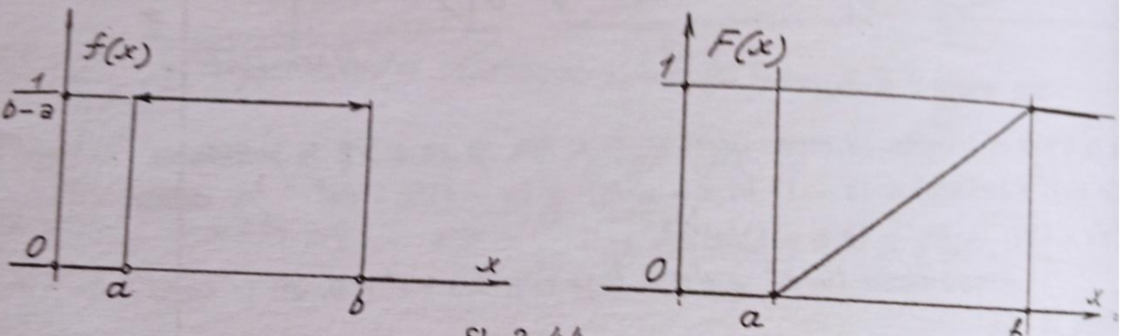
$= 2a$, odakle je $a = 1/2$.

Važnije neprekidne raspodele i primene.

(I) Uniformna $\mathcal{U}(a, b)$ raspodela

2.115. Gustina slučajne promenljive X je konstantna na intervalu (a, b), $f(x) = \begin{cases} c, & x \in (a, b) \\ 0, & \text{van} \end{cases}$. (a) naći konstantu c, (b) naći funkciju raspodele $F(x)$, (c) Naći EX i DX.

Rešenje: (a) $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = c\int_a^b dx = c(b - a)$, odakle je $c = 1/(b - a)$. (b) Ako je $x \leq a$, $F(x) = 0$. Ako je $a < x < b$, $F(x) = \int_a^x \frac{dx}{b - a} = \frac{x - a}{b - a}$. Za $x \geq b$, $F(x) = 1$ (sl. 2.44)



Sl. 2.44

(c) $EX = \int_a^b \frac{x\,dx}{b - a} = \left.\frac{x^2}{2(b - a)}\right|_a^b = \frac{a + b}{2}$.

$$EX^2 = \int_a^b \frac{x^2\,dx}{b - a} = \frac{b^3 \; a^3}{3(b - a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$DX = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

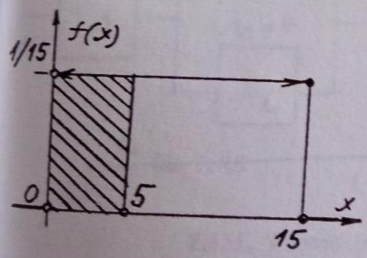
2.116. Podeok skale mernog pribora je 2 mm. Rezultati se zaokružuju na najbliži ceo podeok. Naći verovatnoću da će pri čitanju biti napravljena greška (a) manja od 0.4 mm, (b) veća od 0.5 mm, (c) izmedju 0.2 i 0.8 mm.

Rešenje: Može se smatrati da tačna vrednost X rezultata merenja (računajući samo vrednost izmedju podeljaka) ima uniformu $\mathcal{U}(0, 2)$ raspodelu.
(a) Greška je manja od 0.4 ako je $0 < X < 0.4$ ili $1.6 < X < 2$, pa je
$p = P(0 \leq X < 0.4) + P(1.6 \leq X < 2) = 2P(0 \leq X < 0.4) = 2\int_0^{0.4} \frac{dx}{2} = 0.4,$
(b) $P(0.5 < X < 1.5) = (1.5 - 0.5)/2 = 0.5,$
(c) $P(0.2 < X < 0.8$ ili $1.2 < X < 1.8) = 2P(0.2 < X < 0.8) = 2(0.8 - 0.2)/2 = 0.6.$

2.117. Slučajna promenljiva X ima uniformu raspodelu sa $EX = 4$ i $DX = 3$. Naći gustinu za X.

Rešenje: Ako X ima uniformnu $\mathcal{U}(a, b)$ rasp., biće $\frac{a+b}{2} = 4$ i $\frac{(b-a)^2}{12} = 3$, odakle je $a + b = 8$, $b - a = 6$, tj $a = 1$, $b = 7$. Tražena gustina je $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & 1 < x < 7 \\ 0, & \text{van} \end{cases}$.

2.118. Kroz jednu autobusku stanicu autobus prolazi tačno na svakih $15'$. Ako putnik slučajno dolazi na stanicu, koliko očekujemo da će čekati autobus? Naći verovatnoću da će čekati manje od $5'$.



Sl. 2.45

Rešenje: Označimo sa X – vreme čekanja putnika do dolaska autobusa. Po uslovu zadatka X ima uniformnu $\mathcal{U}(0, 15)$ raspodelu. $EX = \frac{15-0}{2} = 7.5.$ Putnik će, u srednjem, čekati 7.5 minuta.
$P(X < 5) = 5 \cdot 1/15 = 1/3.$ (Sl. 2.45)

(II) Normalna (Gausova) $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ raspodela

2.119. Slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu sa (a) $EX = 3$, $\sigma(X) = 2$; (b) $EX = -1$, $EX^2 = 3$. Napisati odgovarajuću gustinu.

Rešenje: (a) $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-(x-m)^2/2\cdot\sigma^2\} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\{-(x-3)^2/8\}$. (b) $DX = EX^2 - (EX)^2 = 3 - (-1)^2 = 2,$
$\sigma(X) = \sqrt{2}$, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\{-(x+1)^2/4\}$.

2.120. Neka je gustina slučajne promenljive X data sa $f(x) = c \cdot \exp(-x^2/2 + 4x)$ (a) Koja je raspodela u pitanju? (b) Naći konstantu c.

Rešenje: (a) $f(x)$ je gustina normalne raspodele, jer je u opštem slučaju

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-(x^2 - 2ax + a^2)/2\sigma^2\} =$$

$$= k \cdot \exp\{-a_0 x^2 + a_1 x - a_2\} = c \cdot \exp\{-a_0 x^2 + a_1 x\}, \text{ gde je } a_0 > 0.$$

(b) Kako je $a_0 = \frac{1}{2\sigma^2} = \frac{1}{2}$, biće $\sigma^2 = 1$, $a_1 = a/\sigma^2 = 4$, biće $a = 4\sigma^2 = 4$,

tj. $c = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-a^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-8} \doteq 1.3383 \cdot 10^{-4}$.

2.122. Slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu sa (a) $EX = 10$, (b) $EX = 25$. Ako je (a) $P(10 < X < 20) = 0.3$, (b) $P(10 < X < 15) = 0.2$, Naći i (a) $P(0 < X < 10)$, (b) $P(35 < X < 40)$.

Rešenje: Kako je gustina normalne raspodele simetrična u odnosu na EX, to je (a) $EX = 10$, $P(10 < X < 20) = P(0 < X < 10) = 0.3$.
(b) $EX = 25$, $P(10 < X < 15) = P(25 - 15 < X < 25 - 10) = P(25 + 10 < X < 25 + 15) = P(35 < X < 40) = 0.2$.

2.123. Neka X ima normalnu $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ raspodelu. Za koje σ je $P(a < X < b)$ najveće $(a > 0)$. (Numerički primer: $a = 1$, $b = 2$).

Rešenje: $P(a < X < b) = \Phi_0(b/\sigma) - \Phi_0(a/\sigma) = \varphi(\sigma)$. Kako $\varphi(\sigma) \longrightarrow 0$, za $\sigma \to 0$ i $\sigma \to \infty$ i $\varphi(\sigma) > 0$ i neprekidna je, to postoji $\max \varphi(\sigma)$. $\varphi'(\sigma) = \Phi_0'(b/\sigma) - \Phi_0'(a/\sigma) = -\frac{b}{\sigma^2} f(b/\sigma) + \frac{a}{\sigma^2} f(a/\sigma) = 0$;

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$, tj. $bf(b/\sigma) = af(a/\sigma)$,

tj. $\frac{b}{a} = \exp\{(b^2 - a^2)/2\sigma^2\}$, tj. $\frac{b^2 - a^2}{2\sigma^2} = \ln\frac{b}{a}$, tj. $\sigma^2 = (b^2 - a^2)/\ln(b/a)$.

Numerički primer: $\sigma^2 = 3/\ln 2 \doteq 4.32809$; $\sigma \doteq 2.0804$

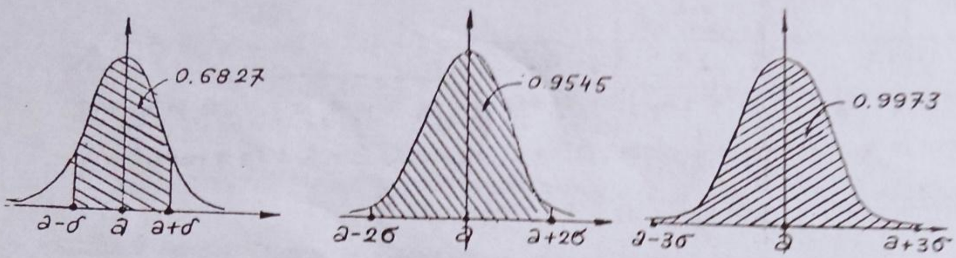
Maksimalna verovatnoća je $p \doteq 0.147$.

2.124. (σ- pravila) Neka X ima normalnu $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ raspodelu. Naći $p_k = P(|X - a| \leq k\sigma)$, za $k = 1, 2$ i 3.

Rešenje: $p_k = P(|X - a| \leq k\sigma) = P(a - k\sigma \leq X \leq a + k\sigma) = P(-k < X^* < k) = 2\Phi_0(k)$.

Iz tablica 1. (str. 284) nalazimo:

$p_1 = 0.6827$ (1 σ pravilo), $p_2 = 0.9545$ (2σ pravilo) i $p_3 = 0.9973$ (3σ pravilo) (Sl. 2.46)



Sl. 2.46

2.125. Prečnik navrtke koje proizvodi fabrika je slučajna promenljiva X sa normalnom $\mathcal{N}(1.5 \text{ cm}, 0.04^2 \text{ cm}^2)$ raspodelom. (a) Naći verovatnoću pojave škarta, ako je dozvoljena tolerancija prečnika $\pm$ 0.07 cm. (b) Kolika bi trebalo da bude tolerancija da bi fabrika mogla garantovati da su navrtke dobre sa verovatnoćom 0.97?.

(a) $P(|X - 1.5| > 0.07) = 1 - 2\Phi_0(\frac{0.07}{0.04}) = 1 - 2 \cdot 0.4599 = 1 - 0.9198 = 0.0802.$

(b) $P(|X - 1.5| < \Delta) = 0.97$. Odavde je $2\Phi_0(\frac{\Delta}{0.04}) = 0.97$, odakle je $\Phi_0(\frac{\Delta}{0.04}) = 0.485$. Iz tablica nalazimo da je $\frac{\Delta}{0.04} = 2.17$ tj. $\Delta = 2.17 \cdot 0.04 = 0.0868$. Interval dozvoljene tolerancije je $[1.5 - 0.087, 1.5 + 0.087]$.

2.126. Težina odlivka je slučajna promenljiva X sa normalnom $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ raspodelom, sa $a = 375$ gr i $\sigma^2 = 25^2$ gr^2. Naći verovatnoću da će težina slučajno odabranog odlivka biti (a) od 300 do 425 grama (b) veća od 300 grama.

Rešenje: (a) $P(300 < X < 425) = P(\frac{300 - 375}{25} < X^* < \frac{425 - 375}{25}) = P(-3 < X^* < 2) = \Phi_0(2) - \Phi_0(-3) = \Phi_0(2) + \Phi_0(3) = 0.47725 + 0.49865 = 0.9759.$

(b) $P(300 < X < \infty) = P(-3 < X^* < \infty) = \Phi_0(\infty) - \Phi_0(-3) = 0.5 + \Phi_0(3) = 0.99865.$

2.127. Kuglica se smatra ispravnom ako je odstupanje X prečnika kuglice od nominalnog manje od 0.07 mm. Pod pretpostavkom da odstupanje ima normalnu raspodelu sa standardnim odstupanjem 0.04 mm oceniti broj ispravnih kuglica medju 200 proizvedenih.

Rešenje: Po pretpostavci je $X : \mathcal{N}(0,\ 0.04)$. $p = P(|X| < 0.07) = 2\Phi_0\left(\frac{0.07}{0.04}\right) = 2\Phi_0(1.75) = 2 \cdot 0.4599 = 0.9198$. U $n = 200$ se očekuje $np = 200 \cdot 0.9198 \doteq 184$ ispravnih kuglica.

(iii) Eksponencijalna $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodela

2.128. Slučajna promenljiva X ima gustinu raspodele

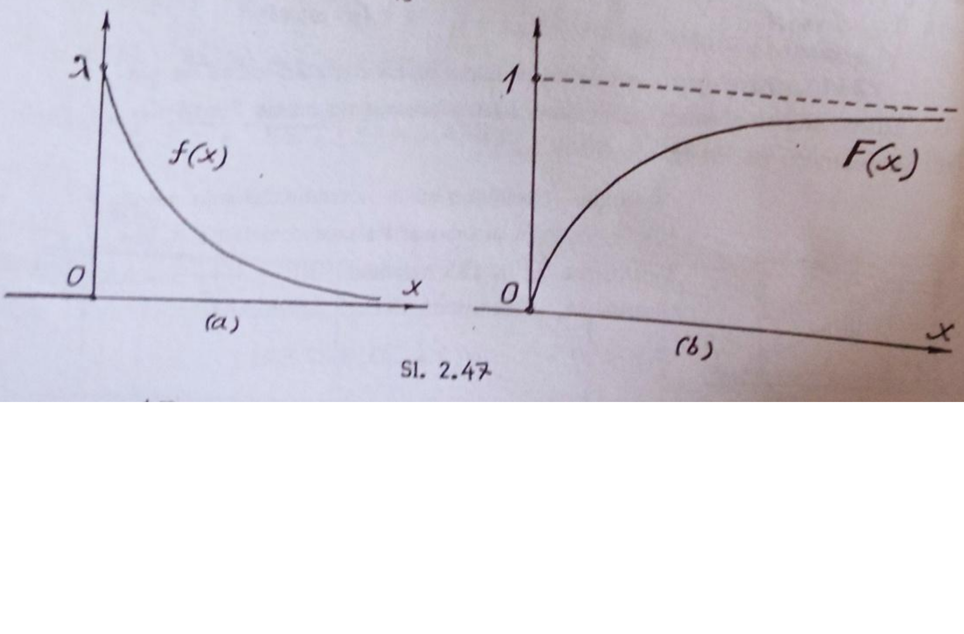
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ae^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Naći: (a) konstantu a, (b) funkciju raspodele F(x), (c) momente m_k, EX i DX.

Rešenje: (a) $1 = a\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{a}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{a}{\lambda}, \Rightarrow a = \lambda.$

(b) Za $x < 0$, $F(x) = 0$, za $0 \leq x < +\infty$

$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$ (Sl. 2. 47).



Sl. 2.47