

Из кутије у којој се налазе три куглице означене бројем 1 и пет куглица означених бројем 2 ваде се случајним избором двије по двије куглице. Извлачење престаје када се извуче пар куглица са истим бројем. Нека су случајне промјенљиве  $X$  =број извлачења и  $Y$  =број извучених куглица са бројем 1. Наћи расподјеле за вектор  $(X;Y)$  и за сл. промјенљиве  $X$  и  $Y$ . Испитати независност  $X$  и  $Y$ .

Решење:

Све елементарне догађаје (у облику : 11– двије куглице са бројем 1 у првом извлачењу, 12-11 – у првом извлачењу куглице 1 и 2 па у другом двије куглице са бројем 1, ...),

њихове вјероватноће ( $P(11) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$ ,  $P(12-11) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}\binom{2}{2}}{\binom{8}{2}\binom{6}{2}} = \frac{1}{28}$ , ...), и вриједности које

узимају случајне промјенљиве  $X$  и  $Y$  можемо представити у табели:

N	$\omega_n$	$P_n$	$X$	$Y$
1	11	3/28	1	2
2	22	10/28	1	0
3	12-11	1/28	2	3
4	12-22	6/28	2	1
5	12-12-22	4/28	3	2
6	12-12-12-22	4/28	4	3

$$P(22) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}, \quad P(12-22) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}\binom{6}{2}} = \frac{6}{28},$$

$$P(12-12-22) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}} = \frac{4}{28}, \quad P(12-12-12-22) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}\binom{1}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}} = \frac{4}{28}$$

Очигледно је  $(X;Y) \in \{(x_i; y_j) | x_i \in \{1,2,3,4\}; y_j \in \{0,1,2,3\}\}$

$$P((X;Y) = (1;0)) = P\{22\} = 10/28;$$

$$P((X;Y) = (1;1)) = P((X;Y) = (1;3)) = P\{\emptyset\} = 0;$$

$$P((X;Y) = (1;2)) = P\{11\} = 3/28;$$

$$P((X;Y) = (2;0)) = P((X;Y) = (2;2)) = P\{\emptyset\} = 0;$$

$$P((X;Y) = (2;1)) = P\{12-22\} = 6/28;$$

$$P((X;Y) = (2;3)) = P\{12-11\} = 1/28;$$

$$P((X;Y) = (3;0)) = P((X;Y) = (3;1)) = P((X;Y) = (3;3)) = P\{\emptyset\} = 0;$$

$$P((X;Y) = (3;2)) = P\{12-12-22\} = 4/28$$

$$P((X;Y) = (4;0)) = P((X;Y) = (4;1)) = P((X;Y) = (4;2)) = P\{\emptyset\} = 0;$$

$$P((X;Y) = (4;3)) = P\{12-12-12-22\} = 4/28$$

Расподјелу случајног вектора  $(X;Y)$  можемо представити табелом :

$Y \backslash X$	0	1	2	3	
1	10	0	3	0	13
2	0	6	0	1	7
3	0	0	4	0	4
4	0	0	0	4	4
	10	6	7	5	/28

Из ове табеле добијамо и расподјеле за  $X$  и  $Y$ :

$$X: \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 7 & 4 & 4 \end{array} \right)_{28}; \quad Y: \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 10 & 6 & 7 & 5 \end{array} \right)_{28};$$

$P(X=1)P(Y=1) \neq P((X;Y)=(1;1))$  па су  $X$  и  $Y$  зависне.

Из кутије у којој се налазе три куглице означене бројем 1 и пет куглица означених бројем 2 ваде се случајним избором двије по двије куглице. Извлачење престаје када се извуче пар куглица са истим бројем. Нека су случајне промјенљиве  $X$  =број извлачења и  $Y$  =број извучених куглица са бројем 2. Наћи расподјеле за вектор  $(X;Y)$  и за сл. промјенљиве  $X$  и  $Y$ . Испитати независност  $X$  и  $Y$ .

Из кутије у којој се налазе 2 бијеле, 2 црне и 2 плаве куглице вади се случајним избором једна по једна куглица. Извлачење престаје када се од неке боје извуку све куглице. Нека су случајне промјенљиве  $X$  =број извлачења и  $Y$  =број извучених плавих куглица. Наћи расподјеле за вектор  $(X;Y)$  и за сл. промјенљиве  $X$  и  $Y$ . Испитати независност  $X$  и  $Y$ .

Наћи расподјелу и очекивање за  $Y|X=3$ .

Решење

Све елементарне догађаје (у облику : ВВ–двije бијеле за редом, ВСРС -бијела, црна,плава,црна, ...) , њихове вјероватноће ( $P(BB) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ ,  $P(BCPC) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{45}$ , ...), и вриједности које узимају случајне промјенљиве  $X$  и  $Y$  можемо представити у табели:

n	$\omega_n$	$p_n$	X	Y	n	$\omega_n$	$p_n$	X	Y	n	$\omega_n$	$p_n$	X	Y
1	ВВ	6/90	2	0	12	СВВ	3/90	3	0	23	РВВ	3/90	3	1
2	ВСВ	3/90	3	0	13	СВС	3/90	3	0	24	РВСВ	2/90	4	1
3	ВСС	3/90	3	0	14	СВРВ	2/90	4	1	25	РВСС	2/90	4	1
4	ВСРВ	2/90	4	1	15	СВРС	2/90	4	1	26	РВСР	2/90	4	2
5	ВСРС	2/90	4	1	16	СВРР	2/90	4	2	27	РВР	3/90	3	2
6	ВСРР	2/90	4	2	17	СС	6/90	2	0	28	РСВВ	2/90	4	1
7	ВРВ	3/90	3	1	18	СРВВ	2/90	4	1	29	РСВС	2/90	4	1
8	ВРСВ	2/90	4	1	19	СРВС	2/90	4	1	30	РСВР	2/90	4	2
9	ВРСС	2/90	4	1	20	СРРВ	2/90	4	2	31	РСС	3/90	3	1
10	ВРСР	2/90	4	2	21	СРС	3/90	3	1	32	РСР	3/90	3	2
11	ВРР	3/90	3	2	22	СРР	3/90	3	2	33	РР	6/90	2	2

Очигледно је  $(X;Y) \in \{(x_i; y_j) | x_i \in \{2,3,4\}; y_j \in \{0,1,2\}\}$

$$P((X;Y) = (2;0)) = P\{BB; CC\} = 12/90;$$

$$P((X;Y) = (2;1)) = P\{\emptyset\} = 0;$$

$$P((X;Y) = (2;2)) = P\{PP\} = 6/90;$$

$$P((X;Y) = (3;0)) = P\{BCB; BCC, CBV; CBC\} = 12/90;$$

$$P((X;Y) = (3;1)) = P\{BVB; CVC, PVB; PCC\} = 12/90;$$

$$P((X;Y) = (3;2)) = P\{BVP; CPP, PVP; PCP\} = 12/90;$$

$$P((X;Y) = (4;0)) = P\{\emptyset\} = 0;$$

$$P((X;Y) = (4;1)) = P\left\{\begin{array}{l} BCPB; BCPC, BPCB; BPCC; CBPB; CBPC \\ CPBB; CPBC; PBCB; PBCC; PCBB; PCBC \end{array}\right\} = 24/90;$$

$$P((X;Y) = (4;2)) = P\{BCPP; BPCP, CBPP; CPBP; PBCP; PCBP\} = 12/90$$

Расподјелу случајног вектора  $(X;Y)$  можемо представити табелом :

Y \ X	0	1	2	
2	12	0	6	18
3	12	12	12	36
4	0	24	12	36
	24	36	30	/90

Тј.

Y \ X	0	1	2	
2	2	0	1	3
3	2	2	2	6
4	0	4	2	6
	4	6	5	/15

Из ове табеле добијамо и расподјеле за  $X$  и  $Y$  :

$$X: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}_{15}; \quad Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}_{15};$$

$P(X=2)P(Y=1) \neq P((X;Y) = (2;1))$  па су  $X$  и  $Y$  зависне.

Условну расподјелу за  $Y|X=3$  добијамо из:

$$P(Y=0|X=3) = \frac{P((X;Y) = (3;0))}{P(X=3)} = \frac{2/15}{6/15} = \frac{2}{6};$$

На исти начин добија се  $P(Y=1|X=3) = \frac{2}{6}$  и  $P(Y=2|X=3) = \frac{2}{6}$  па је расподјела за  $Y|X=3$

$$Y|X=3: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3}. \quad \text{Коначно : } E(Y|X=3) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

Из кутије у којој се налазе четири куглице означене бројевима 1,2,3,4 извлаче се случајно, са враћањем једна по једна куглица. Извлачење престаје када се извуче куглица са бројем који је већ био извучен. Нека су случајне промјенљиве  $X$  =број извлачења и  $Y$  =број извучених куглица са парним бројем. Наћи расподјеле за вектор  $(X;Y)$  и за случајне промјенљиве  $X$  и  $Y$ . Испитати независност  $X$  и  $Y$ .

5. Strijelac pogađa u metu sa vjerovatnoćama  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{3}{8}$  i  $\frac{5}{8}$  u područje A, B, C koja mu donose po 3, 2 odnosno 1 poen. Naći zakon raspodjele za slučajni vektor  $(X; Y)$  gdje je  $X$  = broj poena u tri gadjanja,  $Y$  = broj pogodaka u zonu A u tri gadjanja. Ispitati zavisnost  $X$   $Y$ . Naći  $P(X | Y = 1)$ .

OKT '94.

$X \backslash Y$	0	1	2	3	
3	$5^3$	0	0	0	$5^3 = 125$
4	$3 \cdot 5^2$	0	0	0	$3 \cdot 5^2 = 75$
5	$3 \cdot 5 \cdot 2$	$3 \cdot 5$	0	0	$3 \cdot 5 \cdot 3 = 45$
6	$2^3$	$6 \cdot 5$	0	0	$2^3 = 8$
7	0	$3 \cdot 2$	$3 \cdot 5$	0	$3 \cdot 3 = 9$
8	0	0	$3 \cdot 2$	0	$3 \cdot 2 = 6$
9	0	0	0	1	1
	343	147	21	1	$8^3$

$$(X | Y = 1) : \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & \frac{75}{147} & \frac{60}{147} & \frac{12}{147} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$