

1. Из кутије у којој се налазе 2 бијеле, 2 црне и 2 плаве куглице вади се случајним избором једна по једна куглица. Извлачење престаје када се од неке боје извуку све куглице. Нека су случајне промјенљиве X = број извлачења и Y = број извучених плавих куглица. Наћи расподеле за вектор $(X; Y)$ и за сл. промјенљиве X и Y . Испитати независност X и Y . Наћи расподелу и очекивање за $Y|X = 3$.
2. Стријелац је гађао мету пет пута. У сваком гађању вјероватноћа поготка је $1/4$. Нека су догађаји A = бар једном је погодио, B = тачно једном је погодио, C = тачно два пута је погодио, D = бар три пута је погодио. Израчунати вјероватноће догађаја A, B, C, D и поређати их у растућем поретку.
3. Познато је да у серији од 15000 производа има 12000 производа прве класе. Наћи вјероватноћу да у узорку од 300 случајно изабраних производа из те серије буде бар 70 производа друге класе.

Решења

1. Све елементарне догађаје (у облику : BB —двije бијеле за редом, $BCPC$ -бијела, црна, плава, црна, ...) , њихове вјероватноће ($P(BB) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$, $P(BCPC) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{45}$, ...) , и вриједности које узимају случајне промјенљиве X и Y можемо представити у табели:

n	ω_n	p_n	X	Y	n	ω_n	p_n	X	Y	n	ω_n	p_n	X	Y
1	BB	6/90	2	0	12	CBV	3/90	3	0	23	PBV	3/90	3	1
2	BCV	3/90	3	0	13	CBP	3/90	3	0	24	PBCV	2/90	4	1
3	BCC	3/90	3	0	14	CBPV	2/90	4	1	25	PBCC	2/90	4	1
4	BCPV	2/90	4	1	15	CBPC	2/90	4	1	26	PBCP	2/90	4	2
5	BCPC	2/90	4	1	16	CBPP	2/90	4	2	27	PBP	3/90	3	2
6	BCPP	2/90	4	2	17	CC	6/90	2	0	28	PCBV	2/90	4	1
7	BPV	3/90	3	1	18	CPBV	2/90	4	1	29	PCV	2/90	4	1
8	BPCV	2/90	4	1	19	CPBC	2/90	4	1	30	PCBP	2/90	4	2
9	BPCP	2/90	4	1	20	CPBP	2/90	4	2	31	PCC	3/90	3	1
10	BPCP	2/90	4	2	21	CPC	3/90	3	1	32	PCP	3/90	3	2
11	BPP	3/90	3	2	22	CPP	3/90	3	2	33	PP	6/90	2	2

Очигледно је $(X; Y) \in \{(x_i; y_j) | x_i \in \{2, 3, 4\}; y_j \in \{0, 1, 2\}\}$

$$P((X; Y) = (2; 0)) = P\{BB; CC\} = 12/90;$$

$$P((X; Y) = (2; 1)) = P\{\emptyset\} = 0;$$

$$P((X; Y) = (2; 2)) = P\{PP\} = 6/90;$$

$$P((X; Y) = (3; 0)) = P\{BCV; BCC, CBV; BCP\} = 12/90;$$

$$P((X; Y) = (3; 1)) = P\{BPV; CPC, PBV; PCC\} = 12/90;$$

$$P((X; Y) = (3; 2)) = P\{BPP; CPP, PBP; PCP\} = 12/90;$$

$$P((X; Y) = (4; 0)) = P\{\emptyset\} = 0;$$

$$P((X; Y) = (4; 1)) = P\left\{BCPV; BCPC, BPCV; BPCP; CBPV; CBPC\right. \\ \left. CPBV; CPBC; PBCV; PBCC; PCBV; PCV\right\} = 24/90;$$

$$P((X; Y) = (4; 2)) = P\{BCPP; BPCP, CBPP; CPBP; BPCP; PCBP\} = 12/90$$

Расподјелу случајног вектора $(X; Y)$ можемо представити табелом :

Y \ X	0	1	2	
2	12	0	6	18
3	12	12	12	36
4	0	24	12	36
	24	36	30	/90

Tj.

Y \ X	0	1	2	
2	2	0	1	3
3	2	2	2	6
4	0	4	2	6
	4	6	5	/15

Из ове табеле добијамо и расподјеле за X и Y :

$$X: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}_{15}; \quad Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}_{15};$$

$P(X=2)P(Y=1) \neq P((X;Y)=(2;1))$ па су X и Y зависне.

Условну расподјелу за $Y|X=3$ добијамо из:

$$P(Y=0|X=3) = \frac{P((X;Y)=(3;0))}{P(X=3)} = \frac{2/15}{6/15} = \frac{2}{6};$$

На исти начин добија се $P(Y=1|X=3) = \frac{2}{6}$ и $P(Y=2|X=3) = \frac{2}{6}$ па је расподјела за $Y|X=3$

$$Y|X=3: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3}. \quad \text{Коначно : } E(Y|X=3) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

2. Нека је случајна промјенљива X = број погодака у пет гађања. Тада је $X : B(5;1/4)$.

Тражене догађаје можемо представити : $A = (X \geq 1)$, $B = (X = 1)$, $C = (X = 2)$, $D = (X \geq 3)$.

$$P(A) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 1 - 0.2373 = 0.7627,$$

$$P(B) = P(X = 1) = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 0.3955,$$

$$P(C) = P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0.2637,$$

$$P(D) = P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2))$$

$$P(D) = 1 - (0.2373 + 0.3955 + 0.2637) = 1 - 0.8965 = 0.1035$$

$$P(D) < P(C) < P(B) < P(A)$$

3. Нека је

n = број изабраних производа,

p = вјероватноћа да производ буде друге класе, $q = 1 - p$,

S_n = случајна величина - број изабраних производа друге класе међу n изабраних производа,

k = захтијевани број изабраних производа друге класе међу n изабраних производа,

$$P(S_n \geq k) = P(k \leq S_n \leq n) = P\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{n - np}{\sqrt{npq}}\right) = P(\alpha \leq S_n^* \leq \beta), \quad S_n^* : N(0;1)$$

$$n = 300, \quad p = \frac{3000}{15000} = 0.2, \quad q = 0.8, \quad k = 70, \quad np = 60, \quad npq = 48, \quad \alpha = 1.44, \quad \beta = 34.64,$$

$$P(S_n \geq 70) = P(\alpha \leq S_n^* \leq \beta) = P(1.44 \leq S_n^* \leq 34.64) = \Phi(34.64) - \Phi(1.44) = 0.5 - 0.4251 = 0.0749$$