Формула тоталне вјероватноће и Бајесова формула

Ако за догађаје $H_1, H_2, \ldots H_n$ важи:

1. $H_i \bigcap H_j = \varnothing$ за $i \neq j$
2. $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$
3. $H_i \neq \varnothing$

тада важи формула тоталне вјероватноће: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i)$.

Под истим условима важи и Бајесова формула:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)}.$$

Догађаје $H_1, H_2, \ldots H_n$ називамо хипотезама, њихове вјероватноће $P(H_k) \quad ; k = 1,2 \ldots n$ називамо априорним вјероватноћама, а вјероватноће $P(H_k|A) \quad ; k = 1,2 \ldots n$ називамо апостериорним вјероватноћама.

<u>Примјер:</u>
На авион се испаљују четири независна плотуна. Вјероватноћа поготка при сваком плотуну износи 0.4 . Да би авион био уништен довољна су два поготка. При једном поготку авион ће бити уништен са вјероватноћом 0.6 . Наћи вјероватноћу да ће авион бити уништен.
<u>Решење:</u>
Нека је А догађај да је авион уништен. Нека су $H_k \quad ; \quad k = 0,1,2,3,4$ догађаји да је авион погођен k пута. Догађаји $H_k \quad ; \quad k = 0,1,2,3,4$ задовољавају услове за примјену формуле тоталне вјероватноће. Тада је $P(A) = \sum_{i=0}^{4} P(H_i)P(A|H_i)$.

Очигледно је $P(A|H_0) = 0$, $P(A|H_1) = 0.6$, $P(A|H_2) = P(A|H_3) = P(A|H_4) = 1$. Такође је $P(H_0) = (0.6)^4$, $P(H_1) = \binom{4}{1}(0.4)(0.6)^3$, $P(H_2) = \binom{4}{2}(0.4)^2(0.6)^2$, $P(H_3) = \binom{4}{3}(0.4)^3(0.6)$, $P(H_4) = (0.4)^4$ па је

$P(A) = (0.6)^4 0 + 4(0.4)(0.6)^3 0.6 + \ldots + (0.4)^4 = 0.5248$.

<u>Примјер:</u>
На шаховску таблу су стављене двије даме. Наћи вјероватноћу да се оне нападају.
<u>Решење:</u>
Када се прва дама стави на неко поље, број поља које напада зависи од тога да ли је ближе центру или ободу табле. Сва поља на табли се могу подијелити у четири групе на следећи начин: Прву групу чине четири централна поља са

којих дама напада по 27 других поља. Другу групу чине дванаест поља која окружују четири централна поља. Са њих дама напада по 25 других поља. Са следећих 20 поља која окружују другу групу дама напада по 23 поља. Са 28 поља по ободу табле дама напада по 21 поље.

*			*			*	
	*		*		*		
		*	*	*			
*	*	*	O	*	*	*	*
		*	*	*			
	*		*		*		
*			*			*	
			*				*

Нека је A догађај да се прва и друга дама нападају. Нека су $H_k \quad ; \quad k = 1,2,3,4$ хипотезе да је прва дама стављена на поље које припада једној од наведених група поља. Тада је

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i)P(A|H_i) .$$

$$P(A) = \frac{4}{64}\frac{27}{63} + \frac{12}{64}\frac{25}{63} + \frac{20}{64}\frac{23}{63} + \frac{28}{64}\frac{21}{63} .$$

$$P(A) = \frac{4}{64 \cdot 63}(27 + 3 \cdot 25 + 5 \cdot 23 + 7 \cdot 21) = \frac{364}{16 \cdot 63} = \frac{91}{4 \cdot 63} = \frac{91}{252} = 0.36$$

<u>Примјер:</u>

Три фабрике производе сијалице, и то: прва 50%, друга 30% и трећа 20% од свих сијалица које се налазе у продаји. Међу произведеним сијалицама има квалитетних: у првој фабрици 80%, у другој 70% и у трећој 90%. Наћи вјероватноћу да се случајним избором купи квалитетна сијалица. Ако је купљена сијалица квалитетна одредити вјероватноће да је она произведена у првој, другој или трећој фабрици.

<u>Решење:</u>

Нека је A догађај да је купљена сијалица квалитетна. Нека су $H_k \quad ; \quad k = 1,2,3$ хипотезе да је сијалица произведена у фабрици k. Тада је

$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A|H_i)$. Очигледно је $P(A) = (0.5)(0.8) + (0.3)(0.7) + (0.2)(0.9) = 0.79$.

Апостериорне вјероватноће хипотеза су

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{(0.5)(0.8)}{P(A)} = \frac{40}{79} = 0.506$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{(0.3)(0.7)}{P(A)} = \frac{21}{79} = 0.266$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{(0.2)(0.9)}{P(A)} = \frac{18}{79} = 0.228 .$$

<u>Примјер:</u>

Од десет једнаких кутија девет садрже по двије бијеле и двије црне куглице, а једна кутија садржи пет бијелих и једну црну куглицу. Из случајно изабране кутије извучена је случајно једна бијела куглица. Колика је вјероватноћа да је та куглица извучена из прве групе кутија?

<u>Решење:</u>

Нека је $H_1 -$изабрана је кутија из прве групе, и $H_2 -$изабрана је кутија из друге групе. Нека је $A -$изабрана је бијела куглица. Тада је

$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)$. Очигледно је $P(A)=\frac{9}{10}\frac{2}{4}+\frac{1}{10}\frac{5}{6}=\frac{32}{60}$.

$P(H_1|A)=\frac{18/40}{32/60}=\frac{27}{32}=0.844$.

<u>Примјер:</u>
У свакој од осам кутија налази се по a бијелих, b црних и c плавих куглица. Из прве кутије на случајан начин бирамо куглицу и пребацујемо је у другу. Затим из друге кутије на случајан начин бирамо куглицу и пребацујемо је у трећу кутију и тако редом. Колика је вјероватноћа да послије таквих пребацивања из осме кутије извучемо бијелу куглицу?
<u>Решење:</u>
Нека је $A_i, B_i, C_i \quad i=1,2...8.$ догађај да се из $i-$те кутије извуче бијела, црна или плава куглица. Очигледно је $P(A_1)=\frac{a}{a+b+c}$, $P(B_1)=\frac{b}{a+b+c}$ и $P(C_1)=\frac{c}{a+b+c}$.
За другу кутију имамо $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)+P(C_1)P(A_2|C_1)$ тј.

$$P(A_2)=\frac{a}{a+b+c}\frac{a+1}{a+b+c+1}+\frac{b}{a+b+c}\frac{a}{a+b+c+1}+\frac{c}{a+b+c}\frac{a}{a+b+c+1}$$

$P(A_2)=\frac{a}{(a+b+c)(a+b+c+1)}(a+1+b+c)=\frac{a}{a+b+c}$ па је $P(A_2)=P(A_1)$. На исти начин добијамо да је $P(B_2)=P(B_1)$ и $P(C_2)=P(C_1)$. Иако знамо да је у другој кутији једна куглица више него у првој, тј. да је њен садржај промијењен, вјероватноће извлачења бијеле, црне или плаве куглице из друге кутије су исте као и код прве кутије. То је последица тога што не знамо на који начин је промијењен садржај, тј. не знамо тачан садржај друге кутије послије пребацивања једне куглице из прве кутије. На исти начин се долази до закључка да се вјероватноће не мијењају ни за трећу, четврту, ... кутију. Значи $P(A_8)=\frac{a}{a+b+c}$.

<u>Примјер:</u>
Играчи A и B играју игру са следећим правилима:

- Прије сваког извлачења, од улога играча формира се наградни фонд који припада побједнику.
- Играч А из кутије у којој се налази шест куглица означених бројем 1, пет куглица означених бројем 2 и четири куглице означене бројем 3, извлачи једну куглицу и не показујући је играчу B саопштава један број.
- При томе ако је извукао куглицу са бројем 1 он саопштава бројеве 1, 2 или 3 са вјероватноћама $5/18$, $8/18$ и $5/18$. За куглицу са бројем 2 одговарајуће вјероватноће су $4/10$, $5/10$ и $1/10$, а за куглицу са бројем 3 оне су $1/4$, $1/4$ и $1/2$.
- Знајући то играч B се одлучује да погоди који је број на извученој куглици.

Одредити у каквом односу треба да буду улози играча да би игра била фер.

Решење:
Нека је $H_i \quad i=1,2,3.$ догађај да је извучена куглица са бројем i. Тада је $P(H_1)=\frac{6}{15}$, $P(H_2)=\frac{5}{15}$, $P(H_3)=\frac{4}{15}$. Нека је $S_i \quad i=1,2,3.$ догађај да је играч A саопштио број i. Тада $P(S_1)=P(H_1)P(S_1|H_1)+P(H_2)P(S_1|H_2)+P(H_3)P(S_1|H_3)$
$P(S_1)=\frac{6}{15}\frac{5}{18}+\frac{5}{15}\frac{4}{10}+\frac{4}{15}\frac{1}{4}=\frac{10}{90}+\frac{12}{90}+\frac{6}{90}=\frac{28}{90}$. Ако је играч A саопштио број 1 тада су апостериорне вјероватноће хипотеза да је извучен број i једнаке $P(H_1|S_1)=\frac{10/90}{28/90}=\frac{10}{28}$, $P(H_2|S_1)=\frac{12}{28}$, $P(H_3|S_1)=\frac{6}{28}$. Очигледно, ако је играч A саопштио број 1 тада је за играча B највећа вјероватноћа да погоди ако каже да је извучена куглица са бројем 2 јер хипотеза H_2 има највећу апостериорну вјероватноћу. На исти начин је:
$P(S_2)=P(H_1)P(S_2|H_1)+P(H_2)P(S_2|H_2)+P(H_3)P(S_2|H_3)$
$P(S_2)=\frac{6}{15}\frac{8}{18}+\frac{5}{15}\frac{5}{10}+\frac{4}{15}\frac{1}{4}=\frac{16}{90}+\frac{15}{90}+\frac{6}{90}=\frac{37}{90}$. Ако је играч A саопштио број 2 тада су апостериорне вјероватноће хипотеза да је извучен број i једнаке $P(H_1|S_2)=\frac{16/90}{37/90}=\frac{16}{37}$, $P(H_2|S_2)=\frac{15}{37}$, $P(H_3|S_2)=\frac{6}{37}$. Очигледно, ако је играч A саопштио број 2 тада је за играча B највећа вјероватноћа да погоди ако каже да је извучена куглица са бројем 1 јер хипотеза H_1 има највећу апостериорну вјероватноћу. Такође је: $P(S_3)=\frac{6}{15}\frac{5}{18}+\frac{5}{15}\frac{1}{10}+\frac{4}{15}\frac{1}{2}=\frac{10}{90}+\frac{3}{90}+\frac{12}{90}=\frac{25}{90}$.
$P(H_1|S_3)=\frac{10}{25}$, $P(H_2|S_3)=\frac{3}{25}$, $P(H_3|S_3)=\frac{12}{25}$.
Означимо са M догађај да је играч B погодио извучени број. На вјероватноћу догађаја M утиче то који је број саопштио први играч као и то шта је у сваком од тих случајева ријешио да саопшти други играч. Јасно је да је за другог играча у сваком од случајева кад први играч саопшти број 1, 2 или 3 најбоље да се одлучи за ону од хипотеза да је стварно извучен број 1, 2 или 3 која има највећу апостериорну вјероватноћу. Зато је :
$P(M)=P(S_1)P(M|S_1)+P(S_2)P(M|S_2)+P(S_3)P(M|S_3)$
$P(M)=P(S_1)P(H_2|S_1)+P(S_2)P(H_1|S_2)+P(S_3)P(H_3|S_3)$
$P(M)=\frac{28}{90}\frac{12}{28}+\frac{37}{90}\frac{16}{37}+\frac{25}{90}\frac{12}{25}=\frac{40}{90}$ и $P(\overline{M})=\frac{50}{90}$. Како је однос вјероватноћа добијања награде за играче A и B једнак 5:4 то и однос њихових улога требе да буде такође 5:4.

Примјер:
За тражење несталог авиона ангажовано је десет хеликоптера. Авион се са вјероватноћом 0.7 налази у једној а са вјероватноћом 0.3 у другој области. Сваки хеликоптер може да претражује само једну област, и ако је авион у тој области проналази га са вјероватноћом 0.4 . Како треба распоредити

хеликоптере у ове двије области да би вјероватноћа налажења авиона била максимална?

<u>Решење:</u>

Нека су H_1, H_2 хипотезе да се авион налази у првој или другој области. Нека је A догађај да је авион пронађен. Тада је $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$ Ако се у другу област пошаље k хеликоптера, а у прву преосталих $10-k$ тада ће условне вјероватноће проналаска авиона бити једнаке:

$P(A|H_1) = 1 - P(\overline{A}|H_1) = 1 - (1-0.4)^{10-k} = 1 - 0.6^{10-k}$ и

$P(A|H_2) = 1 - P(\overline{A}|H_2) = 1 - (1-0.4)^{k} = 1 - 0.6^{k}$. Тада је

$P(A) = 0.7(1-0.6^{10-k}) + 0.3(1-0.6^{k})$. Ако означимо $0.6^k = x$ тада ће бити

$P(A) = 1 - 0.7\dfrac{0.6^{10}}{x} - 0.3x$. Вјероватноћа налажења авиона ће бити максимална за

ону вриједност x за коју је $\dfrac{dP(A)}{dx} = 0$. Из $0.7\dfrac{0.6^{10}}{x^2} - 0.3 = 0$ добијамо

$x^2 = 0.7\dfrac{0.6^{10}}{0.3} \approx 0.014$ и $x \approx 0.118$ и $k \approx 4.17$. Ако провјеримо најближе цјелобројне вриједности добијамо: $k = 4 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0.9825$ и $k = 5 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0.9222$ из чега закључујемо да у прву област треба послати шест а у другу област четири хеликоптера.

<u>Примјер:</u>

Два брата учествују на тениском турниру са 2^n играча једнаке класе. Одредити вјероватноћу да ће одиграти међусобни меч.

<u>Решење:</u>

Прије почетка турнира играчи добијају бројеве који у потпуности одређују могуће противнике у сваком колу до финала. Два играча који имају бројеве из исте половине листе учесника морају се срести прије финала, а два играча са бројевима из различитих половина се могу срести само у финалу ако побиједе сва своје противнике у првих $n-1$мечева.

Нека је $A_n \quad n = 1,2,3..$ догађај да су браћа одиграла меч на турниру са 2^n играча. Нека су хипотезе: $H_1 =$браћа су добила број у истој половини турнирске табеле, и $H_2 =$браћа су добила број у супротним половинама. У случају хипотезе H_1 имамо ситуацију као да браћа играју на турниру са 2^{n-1} играча, па је $P(A_n|H_1) = P(A_{n-1})$. У случају хипотезе H_2 до међусобног меча може доћи само у финалу, тј у $n-$том колу ако оба играча побиједе своје противнике у првих $n-1$ кола. Значи $P(A_n|H_2) = (1/2)^{2n-2}$. Вјероватноће хипотеза су:

$P(H_1) = \dfrac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$ и $P(H_2) = \dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}$. По формули тоталне вјероватноће је :

$P(A_n) = P(H_1)P(A_n|H_1) + P(H_2)P(A_n|H_2) \quad P(A_n) = \dfrac{2^{n-1}-1}{2^n-1}P(A_{n-1}) + \dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-2}$. Ако

израчунамо првих неколико вриједности за $P(A_n)$ добијамо: $P(A_1) = 1$

(очигледно), $P(A_2)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$, $P(A_3)=\frac{3}{7}\frac{1}{2}+\frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$. Ако претпоставимо да је $P(A_n)=\frac{1}{2^{n-1}}$ математичком индукцијом добијамо:

1. $P(A_1)=1$
2. $P(A_k)=\frac{1}{2^{k-1}}$
3. $P(A_{k+1})=\frac{2^{k+1-1}-1}{2^{k+1}-1}P(A_k)+\frac{2^{k+1-1}}{2^{k+1}-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(k+1)-2}$;

$$P(A_{k+1})=\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{2^k}{2^{k+1}-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \quad P(A_{k+1})=\frac{1}{2^{k+1}-1}\left(\frac{2^k-1}{2^{k-1}}+\frac{2^k}{2^{2k}}\right);$$

$$P(A_{k+1})=\frac{1}{2^{k+1}-1}\left(\frac{2^{k+1}-2}{2^k}+\frac{1}{2^k}\right) \quad P(A_{k+1})=\frac{1}{2^{k+1}-1}\left(\frac{2^{k+1}-1}{2^k}\right)=\frac{1}{2^k}$$

Значи $P(A_n)=\frac{1}{2^{n-1}} \quad n=1,2,3...$