Дискретне случајне промјенљиве

Примјер:
Коцка се баца два пута. Нека је случајна промјенљива $X =$ збиру бројева добијених на горњој страни коцке у та два бацања. Описати случајну промјенљиву X и одредити њено математичко очекивање.
Решење:
Вриједности које X може да узме крећу се од најмањег збира 2 до највећег 12, тј $X \in \{2,3,4,5,\ldots 11,12\}$. Скуп свих могућих елементарних догађаја када се коцка баца два пута је $\Omega = \{(1;1),(1;2),(1;3),\ldots(6;4),(6;5),(6;6)\}$. Простим пребројавањем уочавамо да се збир 2 јавља само у једном случају (1+1), збир 3 у два случаја (1+2 и 2+1),... збир 7 у 6 случајева (1+6 и 2+5 ... и 6+1),...збир 12 у једном случају (6+6). Случајна промјенљива X има расподјелу
$X:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1/36 & 2/36 & 3/36 & 4/36 & 5/36 & 6/36 & 5/36 & 4/36 & 3/36 & 2/36 & 1/36 \end{pmatrix}$ што записујемо у једноставнијем облику. $X:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{\overline{36}}$. Математичко очекивање за X је $EX = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$ што у овом случају има облик $EX = \sum_{i=2}^{12} iP(X = i)$ тј. $EX = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + \ldots + 7\cdot\frac{6}{36} + \ldots 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$.

Примјер:
На путу којим се креће аутомобил налазе се четири семафора од којих сваки са вјероватноћом 0.4 дозвољава пролаз, а са вјероватноћом 0.6 зауставља аутомобил. Нека је случајна промјенљива $X =$ броју семафора поред којих је аутомобил прошао до првог заустављања. Описати случајну промјенљиву X и одредити њено математичко очекивање и стандардну девијацију.
Решење:
Најмања вриједност за случајну промјенљиву X добија се када већ први семафор заустави аутомобил и тада је $X = 0$. Највећа вриједност се добија када аутомобил прође поред свих семафора и заустави се тек послије тога. Тада је $X = 4$. Зато је $X \in \{0,1,2,3,4\}$ Нека је S_i догађај да $i-$ти семафор дозвољава пролаз, а $\overline{S_i}$ супротан догађај да забрањује пролаз. Тада је
$P(X = 0) = P(\overline{S_1}) = 0.6$, $P(X = 1) = P(S_1)P(\overline{S_2}) = 0.4\cdot 0.6 = 0.24$,
$P(X = 2) = P(S_1)P(S_2)P(\overline{S_3}) = (0.4)^2 \cdot 0.6 = 0.096$,
$P(X = 3) = P(S_1)P(S_2)P(S_3)P(\overline{S_4}) = (0.4)^3 \cdot 0.6 = 0.0384$,
$P(X = 4) = P(S_1)P(S_2)P(S_3)P(S_4) = (0.4)^4 = 0.0256$

Коначно $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.6 & 0.24 & 0.096 & 0.0384 & 0.0256 \end{pmatrix}$.

Очекивање је $EX = 0 \cdot 0.6 + 1 \cdot 0.24 + 2 \cdot 0.096 + 3 \cdot 0.0384 + 4 \cdot 0.0256 = 0.6496$.

Дисперзију $DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^2 P(X = x_i)$ можемо једноставније израчунати користећи формулу $DX = E(X^2) - (EX)^2$. При томе је $EX^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i)$ што у овом случају даје $EX^2 = 0^2 \cdot 0.6 + 1^2 \cdot 0.24 + 2^2 \cdot 0.096 + 3^2 \cdot 0.0384 + 4^2 \cdot 0.0256 = 1.3792$.

Стандардна девијација $\sigma X = \sqrt{DX}$ ће у овом случају бити

$\sigma X = \sqrt{1.3792 - (0.6496)^2} = \sqrt{0.9572} = 0.9784$

Примјер:

На коцки су три стране означене бројем 3, двије стране бројем 2 и једна страна бројем 1. Послије првог бацања коцка се баца још онолико пута колико је био број добијен у првом бацању. Нека је случајна промјенљива $X =$ збиру бројева добијених у тим бацањима, не рачунајући прво бацање које само одређује колико пута ће се коцка бацати. Описати случајну промјенљиву X и одредити њено математичко очекивање.

Решење:

Вриједности које X може да узме крећу се од најмањег збира 1 који се јавља ако два пута добијемо број 1 до највећег збира 9 који се јавља ако четири пута добијемо број 3. Зато је $X \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Нека је H_i; $i = 1,2,3.$ догађај да је у првом бацању пао број i. Тада је по формули тоталне вјероватноће

$$P(X = k) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) P(X = k | H_i); \quad k = 1,2,3...8,9.$$

$$P(X = k) = P(H_1)P(X = k|H_1) + P(H_2)P(X = k|H_2) + P(H_3)P(X = k|H_3)$$

$P(X = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot 0 + \frac{3}{6} \cdot 0$ јер се збир 1 може добити само у једном бацању са једном јединицом

$P(X = 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \cdot 0$ јер се збир 2 може добити са једном двојком или са двије јединице

$P(X = 3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 \right) + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ јер се збир 3 може добити са једном тројком, или са јединицом и двојком (на два начина), или са три јединице

$$P(X = 4) = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot 2 + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \right) + \frac{3}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot 3 \right)$$

$$P(X = 5) = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot 2 \right) + \frac{3}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot 3 \right)$$

$$P(X=6)=\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{2}{6}\cdot\left(\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\right)+\frac{3}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot 6+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\right)$$
$$P(X=7)=\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{2}{6}\cdot 0+\frac{3}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot 3+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot 3\right)$$
$$P(X=8)=\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{2}{6}\cdot 0+\frac{3}{6}\cdot\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot 3\right)$$
$$P(X=9)=\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{2}{6}\cdot 0+\frac{3}{6}\cdot\left(\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\right)$$
$$X:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 36 & 84 & 159 & 138 & 207 & 240 & 189 & 162 & 81\end{pmatrix}\frac{}{6^4}$$
$EX=\sum_{k=1}^{9}kP(X=k)$ тј. $EX=\dfrac{(1\cdot 36+2\cdot 84+3\cdot 159+\ldots 8\cdot 162+9\cdot 81)}{6^4}=5.444$.

Примјер:
Два играча играју игру са следећим правилима:
Ако се приликом бацања двије коцке појави као збир број 7 награду добија први играч. Ако збир буде 10 награду добија други играч. Ако се као збир добије неки трећи број играчи дијеле награду на једнаке дјелове. Прије сваког бацања играчи улажу суме које формирају награду. У каквом односу треба да буду њихови улози да би игра била коректна?
Решење:
Сматраћемо да је игра коректна ако су очекивани добици свих играча једнаки. Нека су случајне промјенљиве $A=$добитак првог играча и $B=$добитак другог играча. Нека су a и b суме које улажу први и други играч. Стварни добитак првог играча ће бити

- b ако се као збир добије 7
- $-a$ ако се као збир добије 10
- $\dfrac{a+b}{2}-a$ ако се као збир добије неки трећи број

Значи $A\in\left\{b,-a,\dfrac{a+b}{2}-a\right\}$. Догађаји да збир бројева на двије коцке добије вриједност 7, 10 или неки трећи број имају вјероватноће 6/36, 3/36 и 27/36. Расподјеле наведених случајних промјенљивих ће бити:
$A:\begin{pmatrix}b & -a & (a+b)/2-a\\ 6/36 & 3/36 & 27/36\end{pmatrix}$, $B:\begin{pmatrix}-b & a & (a+b)/2-b\\ 6/36 & 3/36 & 27/36\end{pmatrix}$. Из услова $EA=EB$ добија се $\frac{6}{36}\cdot b+\frac{3}{36}\cdot(-a)+\frac{27}{36}(\frac{a+b}{2}-a)=\frac{6}{36}\cdot(-b)+\frac{3}{36}\cdot a+\frac{27}{36}(\frac{a+b}{2}-b)$ тј. $39b=33a$ што даје пропорцију $a:b=13:11$. То значи да на сваких 11 еура које уложи други играч први играч треба да уложи 13.

Примјер:

Стријелац почиње да гађа мету са даљине S_1. Послије првог поготка са даљине S_1 прелази на даљину S_2, а послије првог поготка са даљине S_2 завршава гађање. Нека је случајна промјенљива X једнака броју извршених гађања. Наћи расподјелу и очекивање за X ако су вјероватноће погађања мете са даљина S_1 и S_2 једнаке $1/2$ и $1/3$.

Решење: X је случајна промјенљива која може да узима бесконачно много вриједности: $X \in \{2;3;4;...n;...\}$. Догађај $X = n$ се реализује ако се реализује један од елементарних догађаја $\omega_1 = 1\underbrace{00...0}_{n-2}1$, $\omega_2 = 01\underbrace{00...0}_{n-3}1$, $\omega_3 = 001\underbrace{00...0}_{n-4}1$, ... $\omega_i = \underbrace{0...0}_{i-1}1\underbrace{00...0}_{n-1-i}1$, ... $\omega_{n-1} = \underbrace{00...0}_{n-2}11$ гдје је ω_i догађај да је стријелац први пут погодио са даљине S_1 у $i-$том гађању а други пут са даљине S_2 у $n-$том гађању. $(i = 1,2,3,..n-1.)$ Како је $P(\omega_i) = (1/2)^{i-1} * (1/2) * (2/3)^{n-1-i} * (1/3)$ то је

$$P(X = n) = \sum_{i=1}^{n-1} (1/6) * (1/2)^{i-1} * (2/3)^{n-1-i} \quad ; \; n = 2;3;4;...$$

$$P(X = n) = (1/6)(2/3)^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} (1/2)^{i-1} * (2/3)^{1-i}$$

$$P(X = n) = (1/6)(2/3)^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} (3/4)^{i-1}$$

$$P(X = n) = (1/6)(2/3)^{n-2} \frac{1-(3/4)^{n-1}}{1-(3/4)} \quad P(X = n) = (4/6)(2/3)^{n-2}(1-(3/4)^{n-1})$$

$$= (2/3)^{n-1}(1-(3/4)^{n-1})$$

$$P(X = n) = (2/3)^{n-1} - (1/2)^{n-1}$$

Код случајних промјенљивих које могу да узимају бесконачно много вриједности постојање математичког очекивања зависи од конвергенције одговарајућег реда.

$$EX = \sum_{n=2}^{\infty} n * P(X = n) = \sum_{n=2}^{\infty} n * ((2/3)^{n-1} - (1/2)^{n-1})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n * ((2/3)^{n-1} - (1/2)^{n-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(2/3)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(1/2)^n$$

$$= \frac{1}{(1-(2/3))^2} - \frac{1}{(1-(1/2))^2} = 9 - 4 = 5.$$

Примјер:

Из кутије у којој се налазе куглице означене бројевима 1,2,3,4,5,6 извлаче се случајно, без враћања једна по једна куглица. Извлачење престаје када збир извучених бројева постане већи од 10. Нека је случајна промјенљива $X =$ број извучених парних куглица. Наћи расподјелу за X и њено математичко очекивање.

Решење:

Извлачењем само непарних куглица не може се постићи збир већи од 10 па мора бити извучена бар једна парна куглица. Зато је $X \in \{1,2,3\}$. За догађај $(X = 1)$ тј. за догађај да је извучена једна парна куглица повољно је да буду извучене куглице са бројевима (5,6) или (1,5,6) или (3,5,6) или (1,3,5,6) или (3,4,5) или (1,3,4,5) или (1,2,3,5). За одређивање вјероватноћа ових догађаја морамо водити рачина о томе на колико начина се могу реализовати. Куглице 3,4,5 се могу извадити у било коме од 3! поредака па је $P(3,4,5)=\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}3!=\frac{1}{20}$.

Куглице 3,5,6 се могу извадити тако да се извлачење заврши куглицом 5 или 6 али не и куглицом 3 јер би прије тога збир био већи од 10 па је $P(3,5,6)=\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}(2\cdot 2!)=\frac{1}{30}$. Слично, куглице 1,3,5,6 се могу извадити тако да се извлачење заврши куглицом 5 или 6 али не и куглицом 1 или 3 па је $P(1,3,5,6)=\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}(2\cdot 3!)=\frac{1}{30}$. Због тога је

$$P(X=1)=P(5,6)+P(1,5,6)+P(3,5,6)+P(1,3,5,6)+P(3,4,5)+P(1,3,4,5)+P(1,2,3,5)$$

$$P(X=1)=\frac{1}{6}\frac{1}{5}2+\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}4+\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}4+\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}12+\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}6+\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}18+\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}24$$

$$P(X=1)=\frac{1}{15}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{15}=\frac{5}{15}$$

За догађај $(X=2)$ тј. за догађај да су извучене двије парне куглице повољно је да буду извучене куглице са бројевима (1,4,6) или (3,4,6) или (4,5,6) или (1,3,4,6) или (1,4,5,6) или (2,3,6) или (2,5,6) или (1,2,3,6) или (1,2,5,6) или (2,3,5,6) или (2,4,5) или (1,2,4,5) или (2,3,4,5) или (1,2,3,4,5). Како је

$P(1,4,6)=P(3,4,6)=P(2,3,6)=P(2,4,5)=\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}3!=\frac{1}{20}$ и

$P(4,5,6)=P(2,5,6)=\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}4=\frac{1}{30}$ $P(1,2,3,6)=P(1,2,4,5)=\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}(3\cdot 3!)=\frac{1}{20}$,

$P(1,3,4,6)=P(1,2,5,6)=P(2,3,4,5)=\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}(2\cdot 3!)=\frac{1}{30}$,

$P(1,4,5,6)=P(2,3,5,6)=\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}(1\cdot 3!)=\frac{1}{60}$, $P(1,2,3,4,5)=\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}(1\cdot 4!)=\frac{1}{30}$ то је

$$P(X=2)=4\cdot\frac{1}{20}+2\cdot\frac{1}{30}+2\cdot\frac{1}{20}+3\cdot\frac{1}{30}+2\cdot\frac{1}{60}+\frac{1}{30}=\frac{8}{15}$$

За догађај $(X=3)$ тј. за догађај да су извучене три парне куглице повољно је да буду извучене куглице са бројевима (2,4,6) или (1,2,4,6) или (2,3,4,6) или (1,2,3,4,6). $P(X=3)=P(2,4,6)+P(1,2,4,6)+P(2,3,4,6)+P(1,2,3,4,6)$.

$$P(X=3)=\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}6+\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}12+\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}6+\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}4!=\frac{2}{15}$$

$X:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 8 & 2\end{pmatrix}_{\overline{15}}$ $\qquad EX=\sum_{k=1}^{3}kP(X=k)$ тј. $EX=\frac{(1\cdot 5+2\cdot 8+3\cdot 2)}{15}=\frac{27}{15}=1.8$.

<u>Примјер:</u>

У кутији се налазе 3 бијеле, 3 црне и 3 плаве куглице. Из кутије се извлаче случајно, без враћања једна по једна куглица. Извлачење престаје када се од једне боје извуку све куглице. Наћи закон расподјеле и математичко очекивање случајне промјенљиве $X=$ број извучених црних куглица.

Решење:
Извлачење се може завршити без иједне извучене црне куглице, са једном, двије или све три. Зато је $X \in \{0,1,2,3\}$. Догађај $(X=0)$ тј. догађај да није извучена ниједна црна куглица се реализује ако се реализују догађаји (B,B,B) или (P,B,B,B) или (P,P,B,B,B). Њихове вјероватноће су $P(B,B,B)=\frac{3}{9}\frac{2}{8}\frac{1}{7}$, $P(P,B,B,B)=\frac{3}{9}\frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}$, $P(P,P,B,B,B)=\frac{3}{9}\frac{2}{8}\frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{1}{5}$. Све остале повољне догађаје добијамо ако замијенимо улогу плавих и бијелих куглица и узмемо у обзир могуће другачије редоследе извлачења куглица. При томе водимо рачуна да ако има извучених куглица различите боје, последња куглица мора бити трећа куглица од једне боје. $P(X=0)=\frac{3}{9}\frac{2}{8}\frac{1}{7}\cdot 2+\frac{3}{9}\frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}\cdot 2\cdot\frac{3!}{2!}+\frac{3}{9}\frac{2}{8}\frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{1}{5}\cdot 2\cdot\frac{4!}{2!2!}=\frac{37}{420}$.
Догађај $(X=1)$ тј. догађај да је извучена једна црна куглица се реализује ако се реализују догађаји (C,B,B,B) или (C,P,B,B,B) или (C,P,P,B,B,B). Слично претходном биће: $P(X=1)=\frac{3}{9}\frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}\cdot 2\cdot\frac{3!}{2!}+\frac{3}{9}\frac{3}{8}\frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{1}{5}\cdot 2\cdot\frac{4!}{2!}+\frac{3}{9}\frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{3}{6}\frac{2}{5}\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{5!}{2!2!}=\frac{96}{420}$.
Догађај $(X=2)$ тј. догађај да су извучене двије црне куглице се реализује ако се реализују догађаји (C,C,B,B,B) или (C,C,P,B,B,B) или (C,C,P,P,B,B,B). Слично претходном биће:
$P(X=2)=\frac{3}{9}\frac{2}{8}\frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{1}{5}\cdot 2\cdot\frac{4!}{2!2!}+\frac{3}{9}\frac{2}{8}\frac{3}{7}\frac{3}{6}\frac{2}{5}\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{5!}{2!2!}+\frac{3}{9}\frac{2}{8}\frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{6!}{2!2!2!}=\frac{147}{420}$.
Вјероватноћу догађаја $(X=3)$ можемо одредити или помоћу догађаја (C,C,C), (P,C,C,C), (P,P,C,C,C), (P,B,C,C,C), (P,P,B,C,C,C), (P,P,B,B,C,C,C) или

$$P(X=3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=\frac{140}{420}$$

$$X:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 37 & 96 & 147 & 140\end{pmatrix}\overline{420}$$

$EX=\sum_{k=0}^{3}kP(X=k)$ тј. $EX=\frac{(0\cdot 37+1\cdot 96+2\cdot 147+3\cdot 140)}{420}=\frac{810}{420}=1.928$.