Биномна Расподјела

Примјер:
Колика је вјероватноћа да се у десет бацања коцкице за игру шестица појави
а. Пет пута б. Више од два али мање од пет пута.
Решење:
Нека је случајна промјенљива $X =$ број шестица у 10 бацања. Тада је $X : B(n, p)$

тј. $X : B(10,1/6)$ па је $P(X = k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$

Тада ће бити $P(X = 5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^5$ тј. $P(X = 5) = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\frac{5^5}{6^{10}} = \ldots = 0.013082$.

$$\mathrm{P}(2 < \mathrm{X} < 5) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 3) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 4) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7 + \binom{10}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^6 = \ldots = 0.20932$$

Примјер:
Шта је вјероватније у игри једнаких противника :
а. Добити 3 од 4 или 6 од 8 партија
б. Бар 3 од 4 или бар 6 од 8 партија.
Решење:
Ако се играју четири партије и случајна промјенљива $X =$ број побједа првог играча тада је $X : B(4;0.5)$ и $P(X = 3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4}$. За случај осам партија и случајну промјенљиву $Y =$ број побједа првог играча, имамо $Y : B(8;0.5)$ и $P(Y = 6) = \binom{8}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2^6} = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{16} < \frac{1}{4}$. Очигледно вјероватније је добити 3 од 4 него 6 од 8 партија. У ругом случају упоређујемо вјероватноће

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{5}{16}$$ и

$$P(Y \geq 6) = P(Y = 6) + P(Y = 7) + P(Y = 8) = \left(\binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{37}{256} = \frac{5}{16}\cdot\frac{37}{5\cdot 16} < \frac{5}{16}$$

Примјер:
Два кошаркаша са вјероватноћама по 0.6 и 0.7 убацују лопту у кош. Колика је вјероватноћа да ће у три бацања :
а. Имати исти резултат б. Први бити бољи од другог ц. Други бити бољи од првог Решење:
Нека је случајна промјенљива $X =$ број погодака првог кошаркаша, а случајна промјенљива $Y =$ број погодака другог кошаркаша. X и Y имају биномну расподјелу па је $P(X = k) = \binom{3}{k} 0.6^k 0.4^{3-k} \quad ; k = 0,1,2,3.$ и

$P(Y = k) = \binom{3}{k} 0.7^k 0.3^{3-k} \quad ; k = 0,1,2,3.$, тј. $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.064 & 0.288 & 0.432 & 0.216 \end{pmatrix}$,

$Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.027 & 0.189 & 0.441 & 0.343 \end{pmatrix}$. Означимо са A догађај да кошаркаши имају исти резултат. Тада је

$P(A) = P(X=0)P(Y=0) + P(X=1)P(Y=1) + P(X=2)P(Y=2) + P(X=3)P(Y=3)$ тј.

$P(A) = 0.064 \cdot 0.027 + 0.288 \cdot 0.189 + 0.432 \cdot 0.441 + 0.216 \cdot 0.343 = 0.32076$.

Означимо са B догађај да први кошаркаш има бољи резултат од другог. Тада је

$P(B) = P(X=1)P(Y=0) + P(X=2)P(Y<2) + P(X=3)P(Y<3)$ тј.

$P(B) = 0.288 \cdot 0.027 + 0.432 \cdot (0.027 + 0.189) + 0.216 \cdot (0.027 + 0.189 + 0.441) = 0.243$.

Означимо са C догађај да други кошаркаш има бољи резултат од првог. Тада је

$P(C) = P(X=0)P(Y=1) + P(X<2)P(Y=2) + P(X<3)P(Y=3)$ тј.

$P(C) = 0.064 \cdot 0.189 + (0.064 + 0{,}288) \cdot 0{,}441 + (0.064 + 0{,}288 + 0.432) \cdot 0.343 = 0.43624$

или $\mathrm{P(C)} = 1 - \mathrm{P(A)} - \mathrm{P(B)} = \ldots = 0.43624$

Примјер:

Стријелац погађа циљ са вјероватноћом 0.6. Колико најмање гађања треба да изврши да би са вјероватноћом већом од 0.99 погодио циљ?

Решење:

Нека је случајна промјенљива $X =$ број погодака у n гађања. Тада је

$P(X=k) = \binom{n}{k} 0.6^k 0.4^{n-k} \quad ; k = 0,1,2,3 \ldots n$. Треба да одредимо n тако да буде

$\mathrm{P(X>0)} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{P(X=k)} > 0.99$, тј. $1 - P(X=0) > 0.99$. Из $P(X=0) < 0.01$ тј.

$0.4^n < 0.01$ добијамо $n > \dfrac{\ln 0.01}{\ln 0.4}$ тј. $n > 5.026$ што значи да је најмањи број гађања потребан да би се циљ погодио са вјероватноћом већом од 0.99 једнак шест.