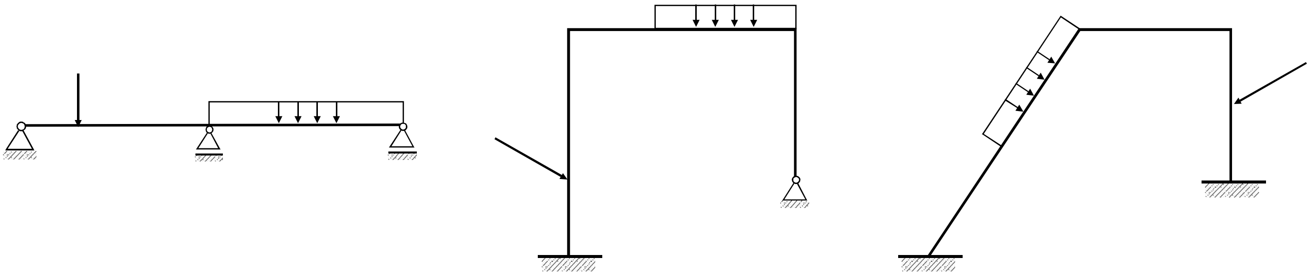
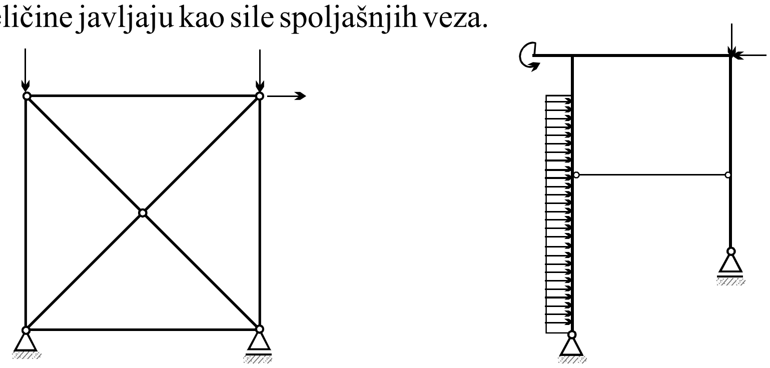
STATIČKI NEODREĐENI PROBLEMI

Metodologija rešavanja statički neodređenih sistema

Sistem je statički neodređen, ako je broj nezavisnih nepoznatih komponenata reakcija veći od broja raspoloživih statičkih jednačina ravnoteže. Primeri nekoliko statički neodređenih sistema prikazano je na slici.



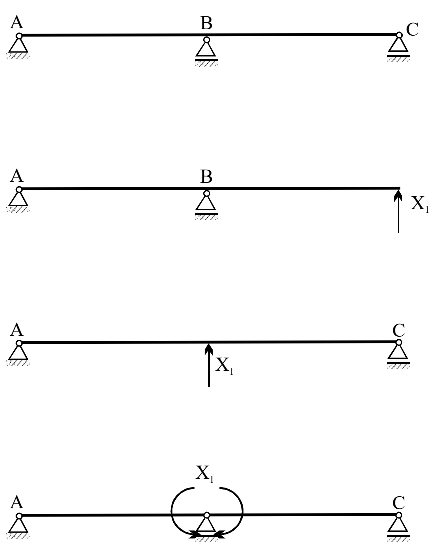
Ako se analizira sistem u ravni, na raspolaganju su tri statičke jednačine ravnoteže. U prikazanim primerima radi se o nosačima sa 4, 5 6 nezavisnih reakcija veza, što ih čini 1, 2 i 3 puta statički neodređenim. Ovakva vrsta statičke neodređenosti se naziva spoljašnja statička neodređenost jer se nepoznate veličine javljaju kao sile spoljašnjih veza.



Takođe postoje i sistemi koji su unutrašnje statički neodređeni (primer rešetke sa jednim suvišnim štapom ili nosač sa zategom i sl.). U ovim slučajevima, kao nepoznate veličine javljaju se unutrašnje sile, dok se reakcije oslonaca mogu dobiti iz raspoloživih uslova ravnoteže. Naravno, mogući su i kombinovani slučajevi statičke neodređenosti.

Rešavanje statički neodređenih sistema može se vršiti raznim postupcima. Ova problematika je predmet posebne discipline Teorije konstrukcije. Jedan od postupaka rešavanja koji je baziran na metodama razmatranim u okviru Otpornosti materijala i koji se veoma često koristi je METODA SILA.

.



Ovaj postupak se zasniva na formiranju tzv. STATIČKI ODREĐENOG OSNOVNOG SISTEMA koji se dobija uklanjanjem suvišnih veza na originalnom sistemu. Međutim, da bi nosač ostao ekvivalentan originalnom stanju, na mestima ukljonjenih veza moraju se dodati odgovarajuće statičke veličine (sile ili spregovi), koje se nazivaju STATIČKI NEPOZNATIM. Drugim rečima, ako je bilo potrebno ukloniti n veza da bi se dobio statički određen sistem, kaže se da je nosač bio n-puta statički neodređen.

Jedan isti nosač se može na različite načine svesti na statički određen (kao što se vidi na slici). U suštini, ne može se pogrešiti pri izboru statički određenog osnovnog sistema, ali pogodan izbor može u značajnoj meri olakšati postupak proračuna.

Naravno, pri uklanjanu suvišnih veza mora se samo voditi računa da nosač ostane kinematički stabilan, odnosno da se ne pretvori u pomerljivi mehanizam.

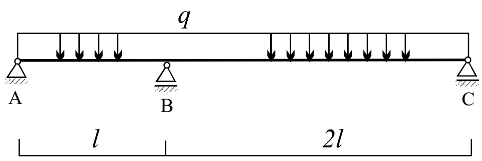
METODA SILA - postupak za rešavanje

1 *Iz datog sistema uklanjamo onoliko veza koliki je stepen statičke neodređenosti. Uticaj uklonjenih veza na ovako dobijenom, statički određenom osnovnom nosaču, zamenjujemo statički nepoznatim veličinama (silama ili spregovima), već prema tome kakva je veza uklonjena.*

2 *Za statički određen osnovni sistem treba da se odrede pomeranja tačaka (ili obrtanja preseka) na mestima gdesu veze uklonjene, nastala usled dejstva spoljašnjih sila i statički nepoznatih veličina X_i . Ova pomeranja su obično jednaka nuli, jedino u slučaju pomerljivih oslonaca (elastičnih) imaju vrednost različitu od nule.*

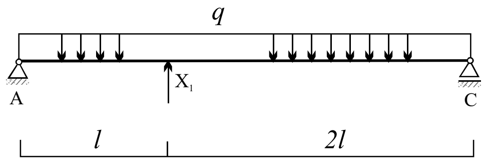
3 *Statički nepoznate se određuju iz uslova da su ova pomeranja (ili obrtanja) tačno onolika koliko propisuju uklonjene veze. Ovi uslovi se nazivaju GEOMETRIJSKI USLOVI. Statičke jednačine ravnoteže i geometrijski uslovi zajedno daju potreban broj jednačina za određivanje svih otpora oslonaca i unutrašnjih sila. Na taj način, određivanje statički nepoznatih svodi se na problem rešavanja sistema linearnih algebarskih jednačina sa onoliko nepoznatih koliki je stepen statičke neodređenosti sistema.*

PRIMER - Metoda sila prikazana na primeru kontinualne grede sa tri oslonca



Zadatak rešavamo prelaskom na tri različita statički određena osnovna sistema (prikazana na prethodnoh strani). Na taj način pokazaće se da izbor osnovnog sistema utiče samo na složenost postupka rešavanja, dok konačne vrednosti statički nepoznatih moraju imati identične vrednosti bez obzira na izbor.

Varijanta 1



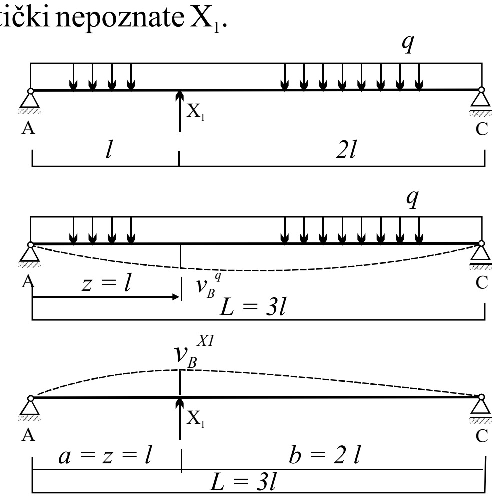
Uklanjanjem srednjeg oslonca prelazi sa na statički određen osnovni sistem tipa proste grede raspona *3l*. Uticaj uklonjene veze, da bi dva sistema bila ekvivalentna, zamenjuje se statički nepoznatom silom X_1 (koja u suštini predstavlja reakciju oslonca B).

Dopunski GEOMETRIJSKI USLOV neophodan za njeno određivanje dobija se iz činjenice da je vertikalno pomernje preseka B jednako nuli ($v_B = 0$, presek B je oslonac).

S obzirom da je sistem jednom statički neodređen, geometrijski uslov $v_B=0$, uz jednačine ravnoteže je dovoljan za određivanje svih reakcija veza.

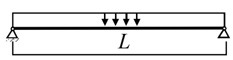
Pri određivanju ugiba preseka B, kako od spoljašnjeg opterećenja, tako i od statički nepoznate X_1 u cilju formiranja geometrijskog uslova $v_B = 0$, mogu se koristiti različite metode (metoda integracije diferencijalne jednačine, metoda superpozicije kao i metoda fiktivnog nosača).

U ovoj prvoj varijanti zadatka ukupni ugib preseka B dobićemo primenom metode superpozicije, sabiranjem vertikalnog pomeranja preseka B nastalog usled delovanja raspodeljenog opterećenja q i statički nepoznate X_1.



Tablice

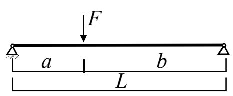
$$v^q = \frac{qz}{24\,EI}(L^3 - 2\,Lz^2 + z^3)$$



$$v_B^q\,(z=l) = \frac{ql}{24\,EI}((3l)^3 - 2\,(3l)\,l^2 + l^3) = \frac{22}{24}\frac{ql^4}{EI}$$

Tablice

$$v^F = \frac{Fbz}{6L\,EI}(L^2 - b^2 - z^2)$$

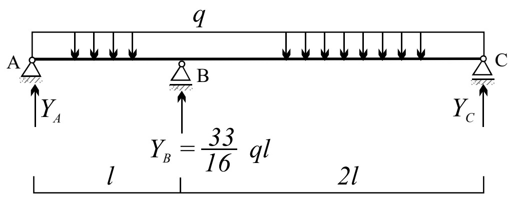


$$v_B^F\,(z=l) = -\frac{X_1(2l)\,l}{6(3l)\,EI}((3l)^2 - (2l)^2 - l^2) = -\frac{8}{18}\frac{X_1 l^3}{EI}$$

Geometrijski uslov $v_B = 0$

$$v_B = v_B^{\,q} + v_B^{\,X} = \frac{22}{24}\frac{ql^4}{EI} - \frac{8}{18}\frac{X_1 l^3}{EI} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X_1 = \frac{33}{16}ql$$

Sa poznatom jednom reakcijom $Y_B = X_1 = \frac{33}{16}$ gl, iz klasičnih uslova ravnoteže određuju se preostale reakcije veza.



$$\Sigma M^C = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A \cdot 3l + Y_B \cdot 2l - q\frac{(3l)^2}{2} = 0$$

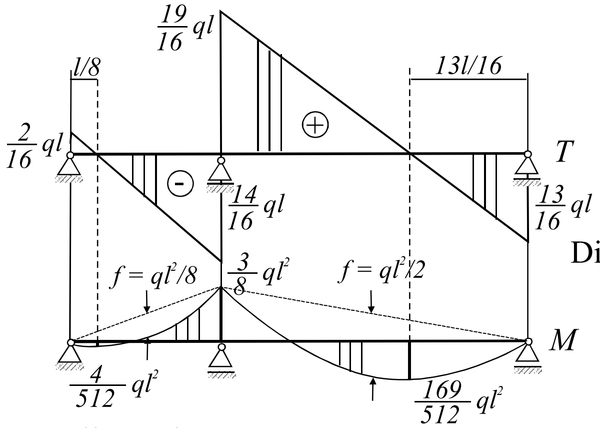
$$Y_A = \frac{1}{8}ql$$

$$\Sigma M^A = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_C \cdot 3l + Y_B \cdot l - q\frac{(3l)^2}{2} = 0$$

$$Y_C = \frac{13}{16}ql$$

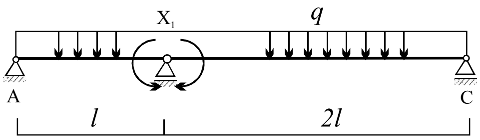
Kontrola

$$\Sigma Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{16}ql + \frac{33}{16}ql + \frac{13}{16}ql - 3ql = 0$$



Dijagram presečnih sila statički neodređenog nosača

Varijanta 2

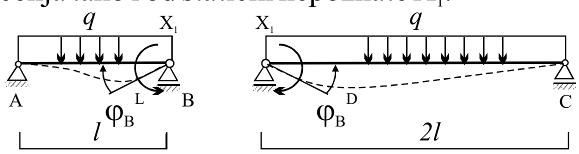


U drugom slučaju na statički određen osnovni sistem tipa dve proste grede raspona l i $2l$ prelazi se ukidanjem krutog ugla iznad oslonca B. Uticaj uklonjene veze, da bi dva sistema bila ekvivalentna, zamenjuje se parom spregova kao nepoznatom X_1 (čiji je zadatak da obezbedi kontinuitet nagiba nad osloncem B).

Dopunski GEOMETRIJSKI USLOV neophodan za određivanje statički nepoznate u ovom slučaju se dobija iz jednakosti nagiba sa leve i desne strane oslonca ($|\varphi_B^{\,L}| = |\varphi_B^{\,D}|$).

S obzirom da je sistem jednom statički neodređen, navedeni geometrijski uslov, uz jednačine ravnoteže je dovoljan za određivanje svih reakcija veza.

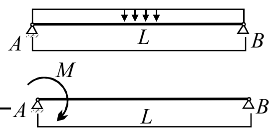
GEOMETRIJSKI USLOV se formira izjednačavanjem nagiba proste grede raspona l sa leve strane oslonca B, sa nagibom proste grede raspona $2l$ sa desne strane oslonca B kako od spoljašnjeg opterećenja tako i od statički nepoznate X_1.



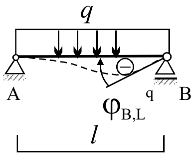
Tablice

$$\varphi_A^{\,q} = \varphi_B^{\,q} = \frac{qL^3}{24\,EI}$$

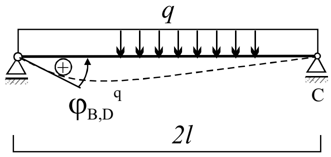
$$\varphi_A^{\,M} = \frac{ML}{3\,EI} \qquad \varphi_B^{\,M} = \frac{ML}{6\,EI}$$

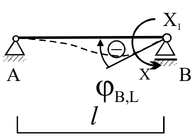


Ponovo primenjujemo metodu superpozicije i vodeći računa o konvenciji o znaku nagiba formiramo dopunski deformacijski (geometrijski) uslov.

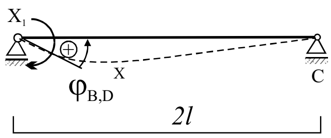


$$\varphi_{B,L}^{\ q} = -\frac{ql^3}{24\,EI} \qquad\qquad \varphi_{B,D}^{\ q} = \frac{q(2l)^3}{24\,EI} = \frac{ql^3}{3\,EI}$$





$$\varphi_{B,L}^{\ X} = -\frac{X_1\,l}{3\,EI} \qquad\qquad \varphi_{B,D}^{\ X} = \frac{X_1(2l)}{3\,EI} = \frac{2X_1 l}{3\,EI}$$



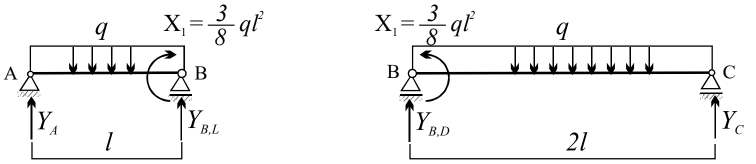
Geometrijski uslov

$$\varphi_{B,L}^{\ (q+X)} = \varphi_{B,D}^{\ (q+X)}$$

$$-\frac{ql^3}{24\,EI} - \frac{X_1\,l}{3\,EI} = \frac{ql^3}{3\,EI} + \frac{2X_1 l}{3\,EI} \qquad \Rightarrow \quad X_1 = -\frac{3}{8}ql_2$$

Odmah se uočava da statički nepoznata X_1 odgovara vrednosti momenta nad osloncem B, prikazanom na dijagramu (varijanta 1), čime je i potvrđena tačnost sprovedenog postupka.

Kao i u prethodnom slučaju, primenom klasičnih uslova ravnoteže određuju se reakcije veza.



Prosta greda raspona l $\quad \Sigma M^B = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A \cdot l + \frac{3}{8} ql^2 - q\frac{l^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = \frac{1}{8} ql$

$\Sigma M^A = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{B,L} \cdot l - \frac{3}{8} ql^2 - q\frac{l^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{B,L} = \frac{7}{8} ql$

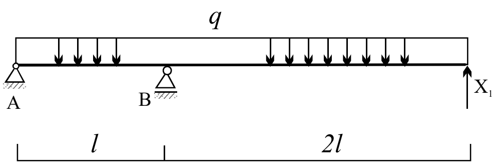
Prosta greda raspona $2l$ $\quad \Sigma M^B = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_C \cdot 2l + \frac{3}{8} ql^2 - q\frac{(2l)^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_C = \frac{13}{16} ql$

$\Sigma M^B = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{B,D} \cdot 2l - \frac{3}{8} ql^2 - q\frac{(2l)^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{B,D} = \frac{19}{16} ql$

Ukupna reakcija oslonca B $\quad Y_B = Y_{B,L} + Y_{B,D} = \frac{14}{16} ql + \frac{19}{16} ql = \frac{33}{16} ql$

S obzirom da su dijagrami presečnih sila detaljno prikazani u varijanti 1, nije ih potrebno ponavljati.

Varijanta 3



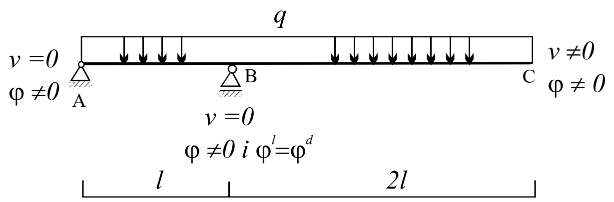
Uklanjanjem oslonca C, u ovom slučaju, formira se statički određen osnovni sistem tipa grede sa prepustom. Uticaj uklonjene veze, da bi dva sistema bila ekvivalentna, zamenjuje se statički nepoznatom silom X_1 (koja u suštini predstavlja reakciju oslonca C).

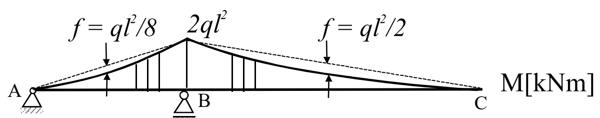
Dopunski GEOMETRIJSKI USLOV neophodan za njeno određivanje, kao i u varijanti 1, dobija se izjednačavanjem ugiba preseka C sa nulom ($v_C = 0$, presek C je oslonac).

U ovom slučaju vrednost ugiba od spoljašnjeg opterećenja v_C^q i statički nepoznate u preseku C v_C^X odrediće se metodom fiktivnog nosača.

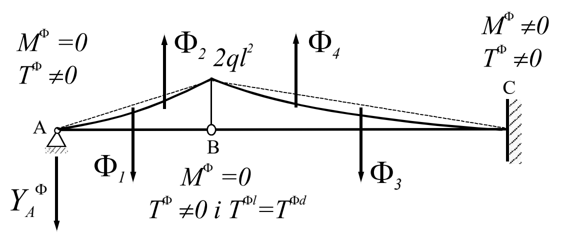
Ovom metodom jednostavnije je, na statički određenom osnovnom sistemu, posmatrati razdvojeno uticaje od spoljašnjeg opterećenja (q) i od statički nepoznate (X_1).

Prvo će se odrediti ugib preseka C usled delovanja spoljašnjeg opterećenja





Fiktivni nosač i fiktivno opterećenje



Fiktivne sile

$\Phi_1 = \frac{2}{3} l \cdot \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^3}{12} \; [kNm^2]$

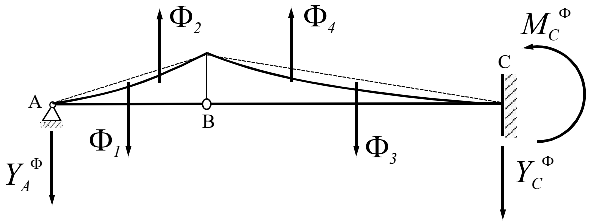
$\Phi_2 = \frac{1}{2} l \cdot 2ql^2 = ql^3 \; [kNm^2]$

$\Phi_3 = \frac{2}{3} (2l) \cdot \frac{ql^2}{2} = \frac{2ql^3}{3} \; [kNm^2]$

$\Phi_4 = \frac{1}{2} (2l) \cdot 2ql^2 = 2ql^3 \; [kNm^2]$

Fiktivna reakcija Y_A^{Φ} $\quad \Sigma M_B^L = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A^{\Phi} \cdot l + \Phi_1 \frac{l}{2} - \Phi_2 \frac{l}{3} = 0 \qquad Y_A^{\Phi} = \frac{7ql^3}{24} \; [kNm^2]$

Podatak koji se traži je vrednost fiktivnog momenta u uklještenju fiktivnog nosača C (M_C^{Φ}), što u odgovarajućoj razmeri predstavlja ugib statički određenog osnovnog nosača usled spoljašnjeg opterećenja $v_C^q = \dfrac{M_C^{\Phi}}{EI}$



$$Y_A^{\Phi} = \frac{7ql^3}{24}\ [kNm^2]$$

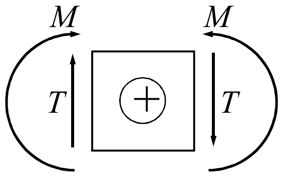
$$\Sigma Y^{\Phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A^{\Phi} + Y_C^{\Phi} + \Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_4 = 0$$

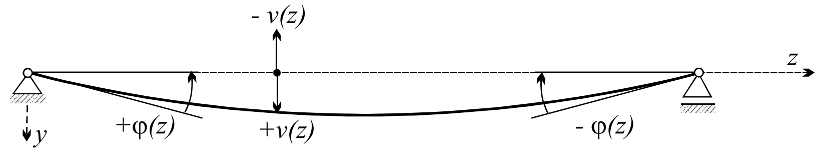
$$Y_C^{\Phi} = \frac{47ql^3}{24}\ [kNm^2]$$

$$\Sigma M_B^D = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C^{\Phi} - Y_C^{\Phi} \cdot 2l - \Phi_3 \cdot l + \Phi_4 \frac{2l}{3} = 0$$

$$M_C^{\Phi} = \frac{13ql^4}{4}\ [kNm^3]$$

konvencija o znaku

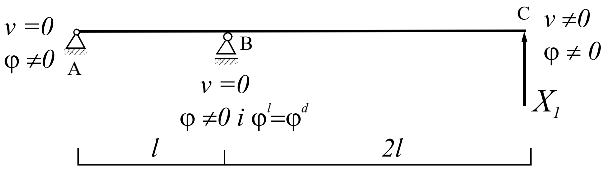


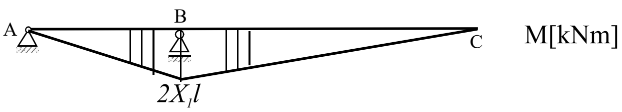


Vodeći računa o konvenciji o znaku, vrednost ugiba u tački C statički određenog nosača od spoljašnjeg opterećenja je:

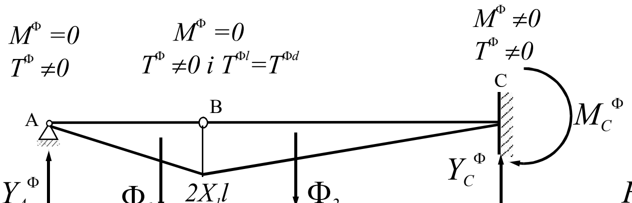
$$v_C^q = \frac{M_C^{\Phi}}{EI} = \frac{13}{4}\frac{ql^4}{EI}$$

Sada se određuje ugib preseka C samo usled delovanja statički nepoznate X_1.





Fiktivni nosač i fiktivno opterećenje



Fiktivne sile

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} l \cdot 2X_1 l = X_1 l^2\ [kNm^2]$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}(2l) \cdot 2X_1 l = 2X_1 l^2\ [kNm^2]$$

Fiktivna reakcija Y_A^{Φ}

$$\Sigma M_B^L = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A^{\Phi} \cdot l - \Phi_1 \frac{l}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A^{\Phi} = \frac{1}{3} X_1 l^2\ [kNm^2]$$

Podatak koji se traži ponovo je vrednost fiktivnog momenta u uklještenju fiktivnog nosača C (M_C^{Φ}), što u odgovarajućoj razmeri predstavlja ugib statički određenog osnovnog nosača usled destva statički nepoznate $v_C^X = \dfrac{M_C^{\Phi}}{EI}$

$$\Sigma M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A^{\Phi} \cdot 3l - \Phi_1 \left(2l + \frac{l}{3}\right) - \Phi_2 \frac{4l}{3} + M_C^{\Phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_C^{\Phi} = 4X_1 l^3\ [kNm^3]$$

Vodeći računa o konvenciji o znaku, vrednost ugiba u tački C statički određenog nosača od statički nepoznate je:

$$v_C^X = \frac{M_C^{\Phi}}{EI} = -\frac{4X_1 l^3}{EI}$$

Konačno se postavlja geometrijski uslov $v_C = v_C^q + v_C^X = 0$, čime se dobija reakcija oslonca C.

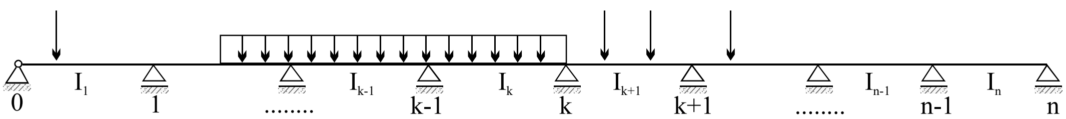
$$v_C = v_C^q + v_C^X = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{13}{4}\frac{ql^4}{EI} - \frac{4X_1 l^3}{EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = Y_C = \frac{13}{16} ql$$

Kao i u prethodnim varijantama, primenom klasičnih uslova ravnoteže određuju se preostale reakcije.

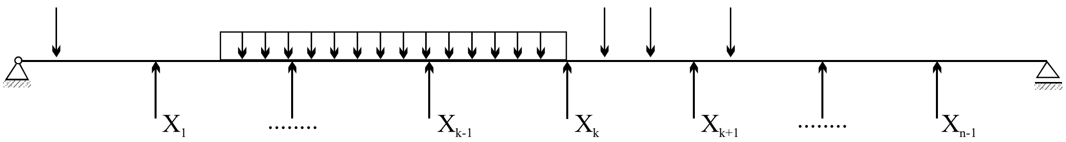
KONTINUALNI NOSAČI - JEDNAČINA TRI MOMENTA

Kontinualni nosači su takvi nosači koji neprekidno (dakle bez zglobnig veza) prelaze preko više od dva oslonca. Ovaj tip nosača je čest u konstrukcijama zbog čega je razvijen poseban oblik za njihovo rešavanje.

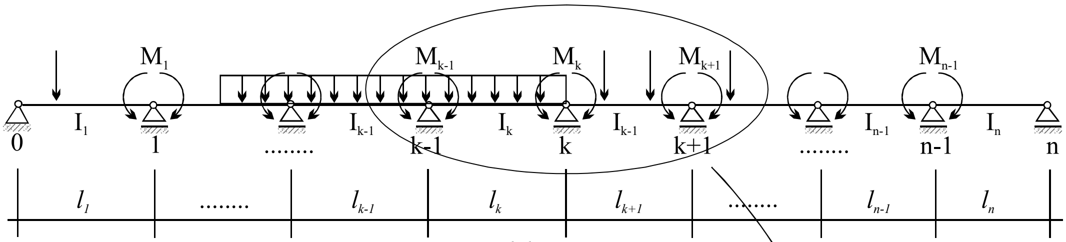
*Na slici je prikazan kontinualni nosasč na **n** polja (odnosno sa **n+1** oslonaca). Kontinualni nosač na slici 1 je (n-1) put statički neodređen, jer se može učiniti statički određenim uklanjanjem svih srednjih oslonaca (slika 2).*



slika 1



slika 2

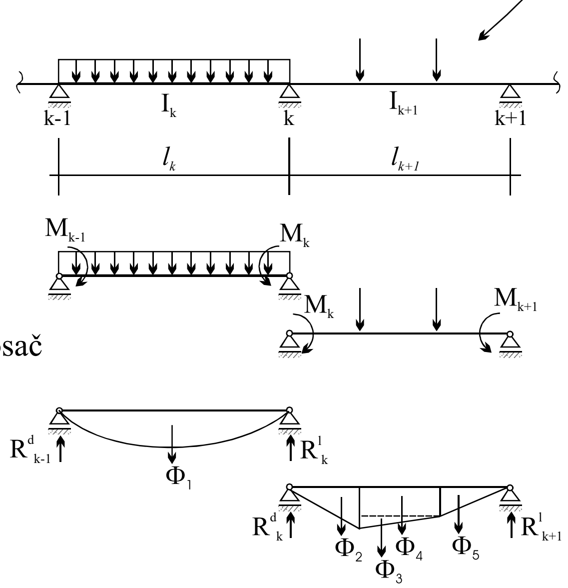


slika 3

*Kako, međutim, na prostoj gredi 0**n** ugib svake tačke zavisi, osim od spoljašnjeg opterećenja, od SVIH (n-1) statički nepoznatih veličina $X_{i,}$ trebalo bi rešavati sistem od (n-1) jednačine od kojih svaka sadrži svih (n-1) nepoznatih veličina.*

*Zato je mnogo pogodniji način da se ovakav nosač učini statički određenim je da se iznad svakog oslonca ukloni kruta veza između levog i desnog polja. Na taj način se formira sistem od **n** prostih greda. Neprekidnost originalnog nosača iznad oslonaca obezbeđuje se parovima spregova. Smerovi tih momenata, KOJI SU SADA STATIČKE NEPOZNATE, usvajaju se tako da odmah definišu vrednosti napadnih momenata na tim mestima, zbog čega se direktmo obeležavaju kao M_k (slika 3)*

U cilju definisanja startne KONVENCIJE izdvajamo dva susedna polja između čvorova (k-1)-(k)-(k+1). Svako polje nosi oznaku desnog čvora. Za ovu metodu je bitno naglasiti da svako polje ima konstantnu krutost (različita polja mogu imati različite krutosti, ali između dva oslonca krutost je konstantna).



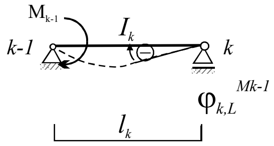
fiktivni nosač

Geometrijski uslovi, u ovom slučaju, zahtevaju da elastične linije iznad oslonaca nosača levo i desno od njega umaju ZAJEDNIČKU TANGENTU, odnosno da su uglovi nagiba jednaki.
*Ako analiziramo oslonac **k**, na prethodnim slikama, nagib tangente elastične linije levo i desno od oslonca **k** zavisi samo od spoljašnjeg opterećenja na poljima l_k i l_{k+1}, kao i od nepoznatih momenata M_{k-1},M_k i M_{k+1}.*
Ova činjenica omogućava da se pri postavljanju geometrijskog uslova na bilo kom osloncu posmatraju samo dva polja, što znači da svaka jednačina sadrži NAJVIŠE TRI STATIČKE NEPOZNATE. To znači da se umesto pune matrice (koja se javlja pri izboru proste grede kao osnovnog statički određenog sistema), sada dobija trodijagonalna matrica. Ujedno je to i razlog što se jednačina koja se koristi pri rešavanju ovakvih problema naziva JEDNAČINA TRI MOMENTA.

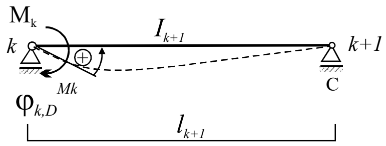
Postupak izvođenja ***<u>jednačine tri momenta</u>***

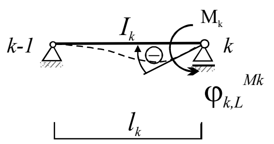
Geometrijski uslov $\varphi_{K,L} = \varphi_{K,D}$

Uticaj statiči nepoznatih veličina

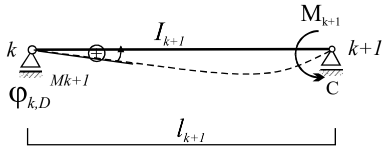


$$\varphi_{k,L}^{Mk-1} = -\frac{M_{k-1}\, l_k}{6\, EI_k} \qquad \varphi_{k,D}^{Mk} = \frac{M_k\, l_{k+1}}{3\, EI_{k+1}}$$

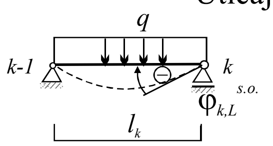


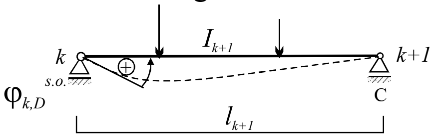


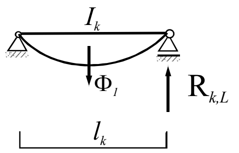
$$\varphi_{k,L}^{Mk} = -\frac{M_k\, l_k}{3\, EI_k} \qquad \varphi_{k,D}^{Mk+1} = \frac{M_{k+1}\, l_{k+1}}{6\, EI_{k+1}}$$



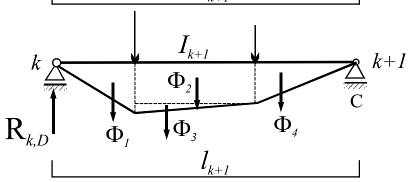
Uticaj spoljašnjeg opterećenja (s.o.) uvodi se metodom fiktivnog nosača







$$\varphi_{k,L}^{s.o.} = -\frac{R_{k,L}}{EI_k} \qquad \varphi_{k,D}^{s.o.} = \frac{R_{k,D}}{EI_{k+1}}$$



Geometrijski uslov $\varphi_{K,L} = \varphi_{K,D}$

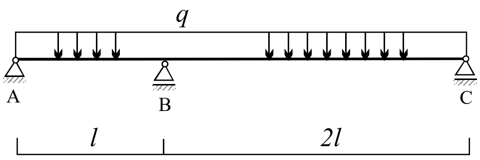
$$-\frac{M_{k-1}\, l_k}{6\, EI_k} - \frac{M_k\, l_k}{3\, EI_k} - \frac{R_{k,L}}{EI_k} = \frac{M_k\, l_{k+1}}{3\, EI_{k+1}} + \frac{M_{k+1}\, l_{k+1}}{6\, EI_{k+1}} + \frac{R_{k,D}}{EI_{k+1}} \quad /\cdot 6E$$

Statički nepoznate grupišemo sa leve strane, a poznate uticaje spoljašnjrg opterećenja sa desne strane:

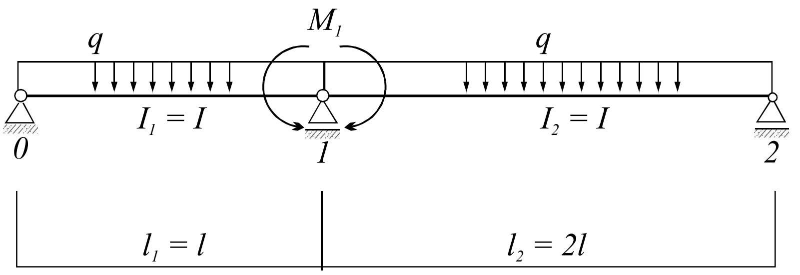
$$\boxed{M_{k-1}\,\frac{l_k}{I_k} + 2M_k\left(\frac{l_k}{I_k} + \frac{l_{k+1}}{I_{k+1}}\right) + M_{k+1}\,\frac{l_{k+1}}{I_{k+1}} = -6\left(\frac{R_{k,L}}{I_k} + \frac{R_{k,D}}{I_{k+1}}\right)}$$

JEDNAČINA TRI MOMENTA

PRIMER - Prethodni zadatak radimo primenom jednačine tri momenta



Uvedene oznake čvorova, raspona i krutosti delova nosača u skladu sa konvencijom.



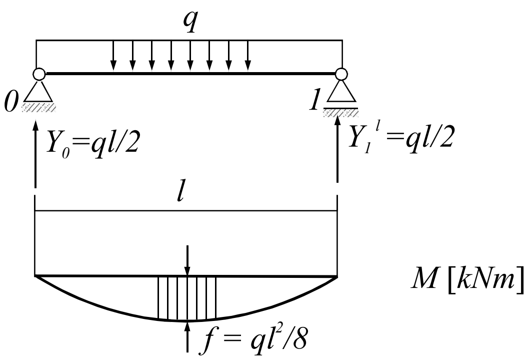
Ispisuju se jednačine tri momenta za sve čvorove u kojima deluju statički nepoznate veličine. U ovom slučaju, nosač je jednom statički neodređen i postavlja se samo uslov za tačku 1.

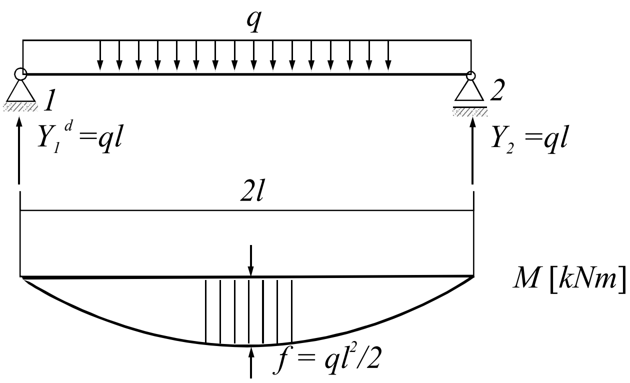
$$\text{za } k = 1 \quad \Rightarrow \quad M_0 \cancelto{0}{\frac{l_1}{I_1}} + 2M_1\left(\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2}\right) + M_2 \cancelto{0}{\frac{l_2}{I_2}} = -6\left(\frac{R_1^l}{I_1} + \frac{R_1^d}{I_2}\right)$$

$$2M_1\left(\frac{l}{I} + \frac{2l}{I}\right) = -6\left(\frac{R_1^l}{I} + \frac{R_1^d}{I}\right)$$

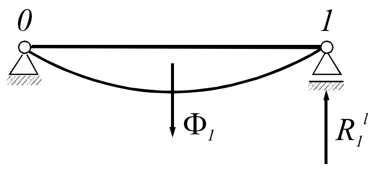
$$6M_1\, l = -6\left(R_1^l + R_1^d\right)$$

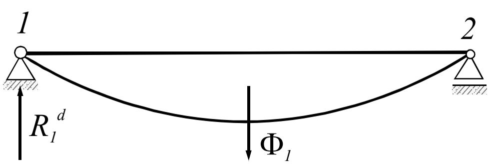
Fiktivne reakcije (R_1^l i R_1^d) predstavljaju nagibe elastične linije nosača na iznad osllonca 1usled delovanja zadatog spoljašnjeg opterećenja.





Fiktivni nosač i fiktivno opterećenje *Fiktivni nosač i fiktivno opterećenje*





Fiktivne sile

$$\Phi_1 = \frac{2}{3}\, l \cdot \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^3}{12}\,[kNm^2]$$

Zbog simetrije

$$R_1^{\,l} = \frac{1}{2}\,\Phi_1 = \frac{ql^3}{24} \quad [kNm^2]$$

Fiktivne sile

$$\Phi_1 = \frac{2}{3}\,(2l) \cdot \frac{ql^2}{2} = \frac{2ql^3}{3}\,[kNm^2]$$

Zbog simetrije

$$R_1^{\,d} = \frac{1}{2}\,\Phi_1 = \frac{ql^3}{3} \quad [kNm^2]$$

$$6M_1\, l = -6\left(R_1^l + R_1^d\right)$$

$$M_1 = -\frac{1}{l}\left(\frac{ql^3}{24} + \frac{ql^3}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad M_1 = -\frac{3}{8}\,ql^2$$

Ovim je potvrđeno rešenje ekvivalentnog sistema usvojenog u varijanti 2.

NAPOMENA - korišćena literatura:
Prof. dr Radenko Pejović, OTPORNOST MATERIJALA, Građevinski fakultet, 2015, Podgorica
Prof. dr Vlatko Brčič, OTPORNOST MATERIJALA, Građevinska knjiga, 1989, Beograd