DEFORMACIONI RAD

1 Rad spoljašnjih sila. Deformacioni rad

Pod uticajem spoljašnjih sila čvrsta tela se deformišu i prilikom te deformacije dolazi do pomeranja napadnih tačaka spoljašnjih sila koje pri tome vrše rad.

Rad spoljašnjih sila prilikom deformacije tela naziva se deformacioni rad (A).

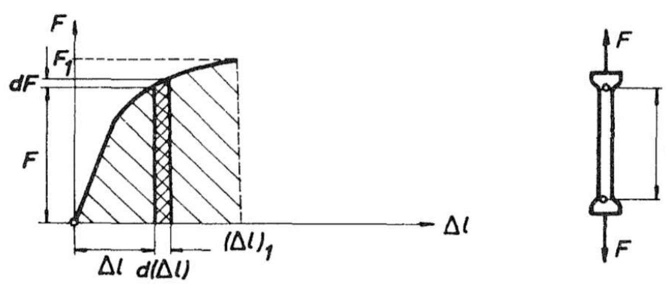
Saglasno zakonu o održanju energije ovom radu spoljašnjih sila odgovara promena potencijalne (U), kinetičke (K) i toplotne energije (T) tela. Dakle, deo ovog rada se akumulira u telu kao elastična - povratna energija (koja se može dobiti rasterećenjem tela), deo rada se troši na promenu kinetičke energije, a preostali deo se pretvara u toplotnu energiju, tj. ne nekin način predstavlja izgibljeni rad.

$$A = U + K + T \tag{1}$$

S obzirom da se, u okviru Otpornosti materijala, razmatra samo slučaj statičkog opterećenja, tj. opterećenja čiji intenzitet raste veoma sporo od nulte do ukupne vrednosti, to se kinetička energija takvog sistema može zanemariti zbog činjenice da su pri takvom opterećenju brzina i ubrzanja svih delića tela zanemarljivo mala. Takođe, ako je telo u ravnoteži nakon nanošenja kompletnog opterećenja, ne dolazi do kretanja tela kao krutog i brzine su identički jednake nuli. To sve govori u prilog da se kinetička energija takvog sistema zanemaruje. Dakle, rad spoljašnjih sila (deformacioni rad, A), pretvara se u elastičnu, povratnu (potencijalnu, U) i toplotnu (T) energiju.

$$A = U + T \tag{2}$$

U cilju ilustracije rečenog, analiziraće se dijagram (sila - izduženje) dobijen u testu aksijalnog naprezanja (slika 1).



slika 1

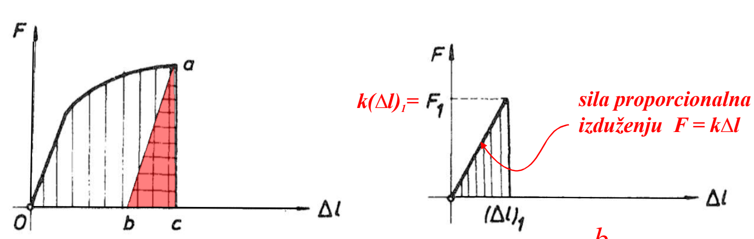
U nekonm trenutku deformisanja izduženje uzorka je Δl a odgovarajuća sila F. Povećavanjem intenziteta sile za malu veličinu dF i izduženje će se povećati za $d(\Delta l)$.

Dakle, rad utrošen na izduženju $d(\Delta l)$ je $dA = Fd(\Delta l)$ tj. jednak ke površini šrafiranog pravougaonika na slici 1. To znači da ukupan rad utrošen da bi se uzorak izdužio za $(\Delta l)_1$ dat je izrazom:

$$A = \int_0^{(\Delta l)_1} F\, d(\Delta l) \tag{3}$$

odnosno, jednak je <u>POVRŠINI ISPOD KRIVE $F=F(\Delta l)$.</u>

Deo ovog rada akumulira se u uzorku (epruveti) kao elastična povratna energija, koja se može dobiti nazad rasterećenjem uzorka (deo abc, slika 2a), a drugi deo se pretvara u toplotnu energiju (0ab), odnosno troši se na zagrevanje uzorka i predstavlja "izgubljeni" rad.



slika 2

Naravno, ako je opterećenje takvo da imamo samo ELASTIČNE DEFORMACIJE, rad spoljašnjih sila se akumulira u telu u vidu elastične, potencijalne energije (slika 2b). Dakle, u slučaju elastičnih tela, telo se u potpunosti vraća u prvobitno stanje nakon prestanka delovanja spoljašnjih sila, što znači da je energija akumulirana u telu (potencijalna energija) jednaka radu koji su izvršile spoljašnje sile na deformaciji tela, odnosno:

$$A = U \tag{4}$$

Energija koja ostaje akumulirana u telu je potencijalna energija ili energija elastične deformacije.

U tom slučaju, u opitu istezanja epruvete, sila je proporcionalna izduženju $F = k\Delta l$ (slika 2b), pa je rad na izduženju jednak:

$$A = \int_0^{(\Delta l)_1} F\, d(\Delta l) = \int_0^{(\Delta l)_1} k\Delta l\, d(\Delta l) = k\frac{(\Delta l)_1^2}{2} = \frac{1}{2}F_1(\Delta l)_1 \tag{5}$$

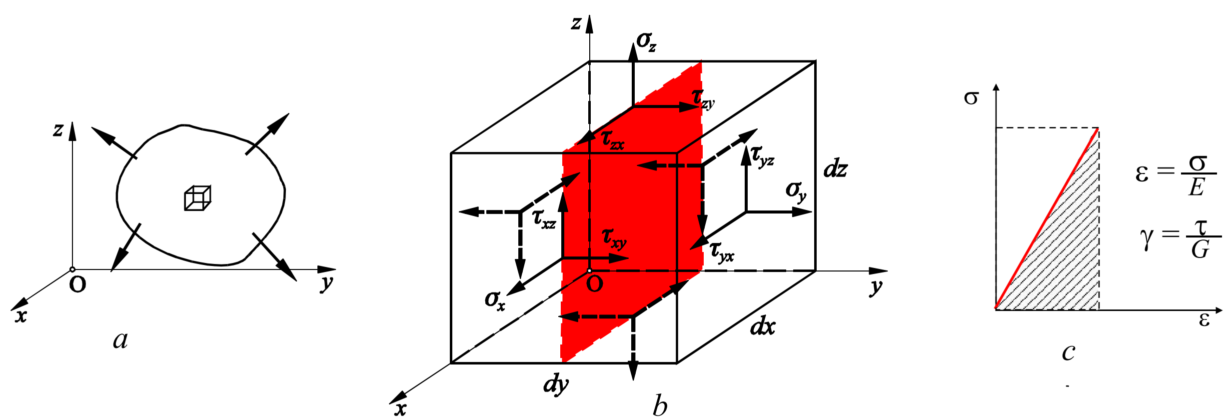
Ako se pogleda dijagram na slici 2b, očigledno je da je rad spoljašnjih sila A jednak površini šrafiranog trougla.

2 Deformacioni rad u linearno elastičnom telu izražen preko unutrašnjih sila

Da bismo deformacioni rad u napregnutom telu izrazili preko unutrašnjih sila, zamislićemo da je telo, presečnim ravnima paralelnim sa koordinatnim ravnima, izdeljeno na elemente dovoljno male da se može pretpostaviti homogenost stanja napona unutar svakog pojedinačnog elementarnog kvadra.

Posmatraćemo jedan takav kvadar i unutrašnje sile kojima okolni deo tela deluje na ovaj kvadar preko njegovih strana i koje izražavamo putem napona, možemo tretirati kao spoljašnje sile. Pod dejstvom tih sila kvadar se nalazi u ravnoteži. Prema tome - ***rad svih sila predstavlja priraštaj potencijalne energije u elementarnom kvadru,*** koji se obeležava sa dA. Integracijom po čitavoj zapreminidobija se ukupan deformacioni rad.

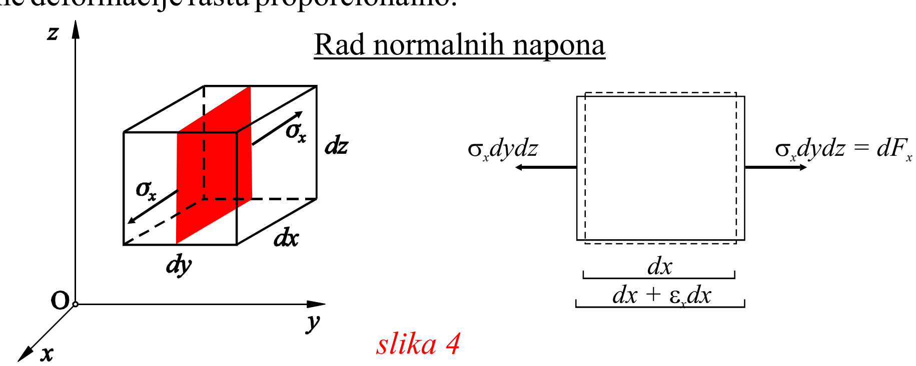
Rad unutrašnjih sila delića tela, nastao usled njihove rotacije i translacije jednak je nuli, jer su unutrašnje sile koje deluju na posmatrani kvadar međusobno u ravnoteži. Prema tome, da bismo izračunali elementarni rad dA, posmatramo samo pomeranja usled deformacije.



slika 3

Na slici 3 (b) su prikazani naponi na stranicama kvadra. Unutrašnje sile jednake su proizvodima komponentalnih napona i odgovarajućih površina stranica kvadra. Kako pretpostavljamo statičko opterećenje, možemo uzeti da, shodno Hooke-ovom zakonu (slika 3c), komponentalni naponi i komponentalne deformacije rastu proporcionalno.

Rad normalnih napona



slika 4

Ukupna sila dF_x nastala sumiranjem normalnih napona σ_x po površini kvadra $dydz$ ($dF_x = \sigma_x dydz$), vrši rad na pomeranju $(\Delta l)_x = \varepsilon_x dx$ (slika 4), koji je, u skladu sa izvedenim izrazom 5, jednak:

$$\frac{1}{2} dF_x\,(\Delta l)_x = \frac{1}{2}\sigma_x dydz\,(\varepsilon_x dx) = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x dxdydz = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x dV \qquad (6)$$

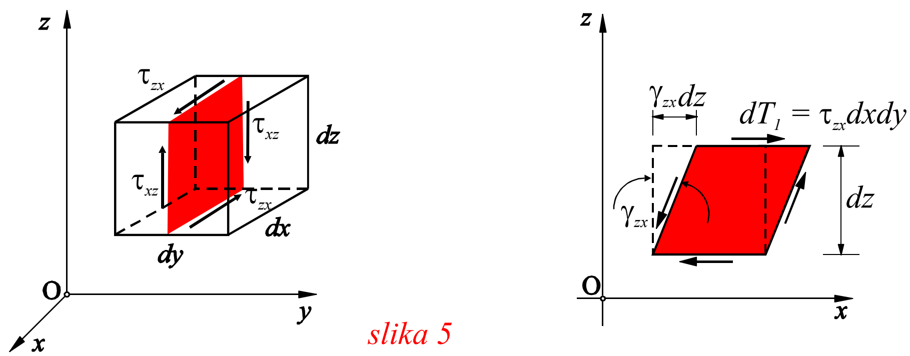
(gde je $dV = dxdydz$ - element zapremine).

Analogno, za ostale normalne napone može se napisati:

$$\frac{1}{2} dF_y\,(\Delta l)_y = \frac{1}{2}\sigma_y dxdz\,(\varepsilon_y dy) = \frac{1}{2}\sigma_y\varepsilon_y dxdydz = \frac{1}{2}\sigma_y\varepsilon_y dV \qquad (7)$$

$$\frac{1}{2} dF_z\,(\Delta l)_z = \frac{1}{2}\sigma_z dxdy\,(\varepsilon_z dz) = \frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z dxdydz = \frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z dV \qquad (8)$$

Rad tangencijalnih napona



slika 5

Ukupna sila dT_1 nastala sumiranjem smičućih napona τ_{zx} po površini kvadra $dxdy$ ($dT_1 = \tau_{zx}dxdy$), vrši rad na pomeranju $(\Delta l)_1 = \gamma_{zx}dz$ (slika 5), koji je, u skladu sa izvedenim izrazom 5, jednak:

$$\frac{1}{2} dT_1\,(\Delta l)_1 = \frac{1}{2}\tau_{zx} dxdy\,(\gamma_{zx} dz) = \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx} dxdydz = \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx} dV \qquad (9)$$

Analogno, za ostale smičuće napone može se napisati:

$$\frac{1}{2} dT_2\,(\Delta l)_2 = \frac{1}{2}\tau_{xy} dydz\,(\gamma_{xy} dx) = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} dxdydz = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} dV \qquad (10)$$

$$\frac{1}{2} dT_3\,(\Delta l)_3 = \frac{1}{2}\tau_{yz} dxdz\,(\gamma_{yz} dy) = \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} dxdydz = \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} dV \qquad (11)$$

Konačno, u skladu sa izrazima (6 - 11) vrednost ***deformacionog rada za elementarni kvadar*** može se napisati u obliku:

$$dA = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz})dV \qquad (12)$$

Vrednost ovog rada po jedinici zapremine zove se ***specifičan deformacioni rad*** i iobeležava se sa:

$$A^* = \frac{dA}{dV} = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz}) \qquad (13)$$

Ako se u izrazu 13 komponentalne deformacije izraze preko Hooke-ovog zakona pomoću komponentalnih napona, dobija se izraz za elastičan potemcijal u funkciji napona.:

$$A^* = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu\,(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)] + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \qquad (14)$$

Na isti način elastični potencijal se može izraziti i putem komponentalnih deformacija.

$$A^* = G\,(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\nu}{1-2\nu}e^2) + \frac{G}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \qquad (15)$$

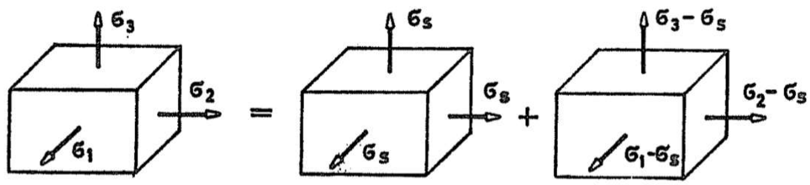
(gde je $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ - zapreminska dilatacija).

3 Energija promene oblika i energija promene zapremine

Na osnovu prethodnih razmatranja, vidi se da elementarni kvadar pri deformaciji menja svoj oblik i zapreminu. Prema tome, jedan deo deformacionog rada troši se na promenu oblika, a jedan deo na promenu njene zapremine. Ovo razdvajanje ima svoj značaj naročito u Teoriji plastičnosti i teoriji sloma, jer kao što je već ranije bilo napomenuto (Otpornost materijala 1 - pojmovi sfernog i devijatorskog dela tenzora napona) iznos onog dela energije koji se troši na promenu oblika (devijatorski deo) karakteriše da li je u nekoj tački došlo do plastične deformacije (Mises-ov kriterijum plastičnog tečenja) ili sloma.
Da bi razdvojili ova dva deformaciona rada analiziramo kvadar čije su stranice paralelne glavnim ravnima i razlažemo tenzor napona na sferni i devijatorski deo.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\sigma_1-\sigma_s) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_2-\sigma_s) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3-\sigma_s \end{bmatrix}$$

(gde je $\sigma_s = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ - srednji normalni napon).
Ovo razvajanje, šematski je prikazano na slici 6.



slika 6

Prvo prikazano stanje predstavlja hidrostatički pritisak, gde je za ma koju presečnu ravan $\tau_{nl}=0$ (pa samim tim i $\gamma_{nl}=0$). <u>To znači da se oblik ovako napregnutog kvadra ne menja, već samo njegova zapremina.</u>

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] + \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] =$$
$$= \frac{1}{E}[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 2\nu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]$$

Imajući u vidu vezu $\sigma_s = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ vrednost kubne dilatacije može se napisati u obliku:

$$e = \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_s \tag{16}$$

Za drugo prikazano stanje vrednost srednjeg napona je jednaka nuli.

$$(\sigma_1 - \sigma_s) + (\sigma_2 - \sigma_s) + (\sigma_3 - \sigma_s) = 3\sigma_s - 3\sigma_s = 0 \tag{17}$$

To automatski ukazuje na činjenicu (u skladu sa izrazom 16) da je u tom slučaju i kubna dilatacija *e* jenaka nuli. <u>Zaključak koji sledi jeste da u drugom slučaju nema promene zapremine već dolazi samo do promene oblika elementarnog kvadra.</u>

Opšti izraz za specifičan deformacioni rad u sistemu glavnih osa ima oblik:

$$A^* = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \tag{18}$$

Sada, usled prvog stanja prikazanog na slici 6 (kada se u izraz 18 unesu jednake vrednosti glavnih napona $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_s$), specifični deformacioni rad (indeks definiše promenu zapremine - A_V^*) se svodi na:

$$A_V^* = \frac{1}{2E}[3\sigma_s^2 - 2\nu \cdot 3\sigma_s^2] = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_s^2 \tag{19}$$

Konačno, usled drugog stanja prikazanog na slici 6 specifični deformacioni rad (indeks definiše promenu oblika - A_F^*) se svodi na:

$$A_F^* = \frac{1}{2E}[(\sigma_1 - \sigma_s)^2 + (\sigma_2 - \sigma_s)^2 + (\sigma_3 - \sigma_s)^2 - 2\nu\,(\,(\sigma_1 - \sigma_s)(\sigma_2 - \sigma_s) + (\sigma_2 - \sigma_s)(\sigma_3 - \sigma_s) + (\sigma_3 - \sigma_s)(\sigma_1 - \sigma_s)] \tag{20}$$

Sređivanjem izraza 20 i korišćenjem poznate veze E = 2(1+ν)/G dobija se komponenta energije koja izaziva promenu oblika elementarnog kvadra.

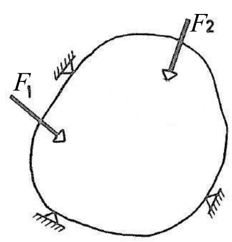
$$A_F^* = \frac{1}{12G}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \tag{21}$$

Lako je uočiti da sabitanjem izraza 19 i 21 dobija se izraz 18 za deformacioni rad od zadatog stanja napona. Na ovaj način, razdvojili smo ukupan iznos potencijalne energije deformacije na energiju promene zapremine i energiju promene oblika.

$$A^* = A_V^* + A_F^* \tag{22}$$

4 Stavovi o uzajamnosti. Betti-ev i Maxwell-ov stav.

Neka na neko proizvoljno elastično telo deluju dva ravnotežna sistema sila F_1 i F_2 (slika 7). Rad usled zajedničkog delovanja oba sistema sila, kod elastičnog tela, ne zavisi od redosleda nanošenja opterećenja.


slika 7

Uzmimo da je na neko telo prvo nanesen neki sistem sila 1. Tačke tela pri tome doživljavaju neka pomeranja i sile sistema 1 (F_1) pri tome vrše rad koji ćemo obeležiti sa A_{11}. Neka je zatim nanesen sistem sila 2 (F_2). Tačke tela trpe pri tome dopunska pomeranja, koja su na osnovu zakona o superpoziciji, nezavisna od delovanja sistema 1. Sile sistema 2, izvršiće pri ovim pomeranjima rad koji obeležavamo sa A_{22}. Međutim i sile sistema 1, na ovim dopunskim pomeranjima vrše rad A_{12}.
Konačno, ukupan rad usled delovanja oba sistema, kod linearno elastičnog tela, dobija se sabiranjem, odnosno:

$$A = A_{11} + A_{12} + A_{22} \tag{23}$$

Ako na sličan način, telo opteretimo prvo sistemom sila 2, a zatim sistemom sila 1, ukupan rad se dobija u obliku

$$A = A_{22} + A_{11} + A_{21} \tag{24}$$

gde je A_{21} rad sila sistema 2 na dopunskim pomeranjima koja nastaju naknadnim nanošenjem sistema 1.
S obzirom da je ukupan rad nezavisan od redosleda nanošenja opterećenja, sledi da je:

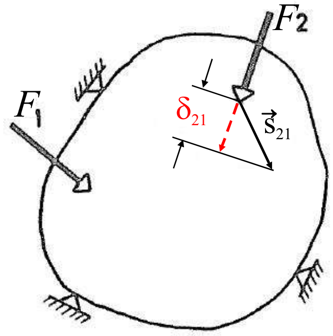
$$\mathbf{A_{12} = A_{21}} \tag{25}$$

Ovaj rezultat predstavlja suštinu Betti-evog stava koji se može izraziti ovako:
Ako na linearno elastično telo deluju dva sistema sila (1 i 2) i ako sa $\vec{s}_1$ označimo pomeranja usled sistema sila 1, a sa $\vec{s}_2$ pomeranja usled sistema sila 2, tada je rad sistema 1 na pomeranjima $\vec{s}_2$ jednak radu sistema 2 na pomeranjima $\vec{s}_1$.
Veoma je važno naglasiti da ovaj stav, kao i sledeći, gubi važnost ako ne važi zakon superpozicije, odnosno ako pomeranja jednog sistema nisu nezavisna od pomeranja drugog sistema.

Stav o uzajamnosti pomeranja ili Maxwell-ov stav

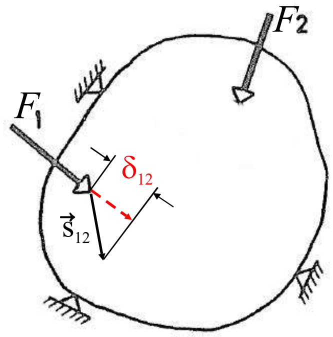
Ovaj stav pokazaćemo na jednom jednostavnom primeru koji će nam ujedno omogućiti da definišemo još jedan bitan stav - ***stav o uzajamnosti pomeranja (Maxwell-ov stav).***

Vratimo se nekom proizvoljnom telu (slika 8) čiji je položaj u prostoru fiksiran nepomerljivim osloncima i koji je opterećen sa dve koncentrisane sile (F_1 i F_2).



slika 8

Silu F_1 sa odgovarajućim oslonačkim reakcijama možemo uzeti kao sistem 1, a silu F_2 sa odgovarajućim oslonačkim reakcijama kao sistem 2.
Za JEDINIČNU silu F_1 napadna tačka sile F_2 imaće izvesno pomeranje ($\vec{s}_{21}$), a projekciju ovog pomeranja na pravac sile F_2 obeležićemo sa δ_{21} (slika 8).



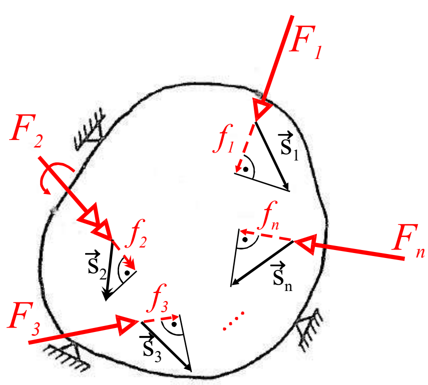
slika 9

Slično tome, projekciju pomeranja napadne tačke sile F_1 na pravac te sile usled delovanja jedinične sile F_2 označićemo sa δ_{12} (slika 9).
Veličine δ_{12} i δ_{21} se često nazivaju Maxwell-ovi uticajni koeficijenti ili kraće uticajni koeficijenti.
Saglasno ovoj definiciji, uticajni broj δ_{ii} predstavlja projekciju pomeranja napadne tačke sile F_i u pravcu te sile usled dejstva jedinične sile F_i ($F_i = 1$).
Pošto oslonačke sile ne vrše rad (jer se oslonačke tačke ne pomeraju), u ovom slučaju, primenom Betti-evog stava ($A_{12} = A_{21}$), dobijamo:

$$A_{12} = A_{21} \quad \Rightarrow \quad F_1 \cdot F_2 \delta_{12} = F_2 \cdot F_1 \delta_{21} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta_{12} = \delta_{21}} \tag{26}$$

Izraz 26 ($\delta_{12} = \delta_{21}$) predstavlja Maxwell-ov stav o uzajamnosti pomeranja koji glasi:
Ako na linearno elastično telo deluju dve JEDINIČNE sile F_1 i F_2, onda je pomeranje napadne tačke sile F_1 u pravcu te sile usled delovanja sile F_2, jednako pomeranju napadne tačke sile F_2 u pravcu te sile usled delovanja sile F_1.

5 Castigliano-vi stavovi



slika 10

Prikazali smo Betti-ev stav i Maxwell-ov stav o uzajamnosti pomeranja na jednostavnom primeru sistema koncentrisanih sila. Sada, možemo uopštiti slučaj i analizirati telo izloženo sistemu koji može biti kombinacija sila i momenata (slika 10). Zbog toga se uvodi pojam generalisane sile i generalisanog pomeranja.
Posmatramo linearno elastično telo koje je u prostoru oslonjeno tako da je sprečeno njegovo kretanje kao krutog tela.
Neka je telo izloženo dejstvu sistema generalisanih sila F_i ($i = 1, 2, 3, ..., n$). Termin generalisana sila F_i podrazumeva bilo koncentrisanu silu, bilo moment. Svakoj generalisanoj sili odgovara generalisano pomeranje f_i.
Generalisano pomeranje f_i predstavlja projekciju pomeranja napadne tačke generelisane sile F_i na pravac dejstva te sile. U slučaju da je generalisana sila F_i koncenreisana sila, onda je veličina f_i pomeranje. Ako je generalisana sila F_i spreg sila (moment), onda je generalisano pomeranje f_i u stvari obrtanje oko iste ose oko koje deluje i F_i.
Kod linearno elastičnog tela, pokazali smo da energiju deformacije tela izloženog dejstvu jedne sile možemo napisati u obliku:

$$A = \frac{1}{2} F \cdot f \tag{27}$$

Generalizacijom ovog izraza za slučaj kada je linearno elastično telo izloženo istovremenom dejstvu sistema sila energiju deformacije dobijamo superpozicijom:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot f_i \tag{28}$$

Naravno, u izrazu 28 veličina f_i predstavlja generalisano pomeranje napadne tačke sile F_i usled dejstva svih sila $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ (sistema sila) koje deluju na elastično telo.
Koristeći definisane uticajne koeficijente, izraz za generalisano pomeranje f_i možemo napisati u funkciji generalisanih sila F_i u obliku:

$$f_i = F_1 \cdot \delta_{i1} + F_2 \cdot \delta_{i2} + \dots + F_i \cdot \delta_{ii} + \dots + F_n \cdot \delta_{in} = \sum_{j=1}^{n} F_j \cdot \delta_{ij} \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{29}$$

Diferencirajući izraz 28 po F_j i vodeći računa da je veličina f_i funkcija sile F_j, imamo:

$$\frac{\partial A}{\partial F_j} = \frac{1}{2} f_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial f_i}{\partial F_j} \tag{30}$$

Na osnovu izraza 29 očigledno je da je $\dfrac{\partial f_i}{\partial F_j} = \delta_{ij}$ pa se prethodna jednačina 30 može napisati kao:

$$\frac{\partial A}{\partial F_j} = \frac{1}{2} f_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i \, \delta_{ij} \tag{31}$$

S obzirom na Maxwell-ov stav o uzajamnosti pomeranja, kod koeficijenta δ_{ij} moguće je promeniti redosled indeksa, odnosno važi relacija da je $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.
Na taj način, prethodni izraz 31 ima ekvivalentan oblik,

$$\frac{\partial A}{\partial F_j} = \frac{1}{2} f_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i \, \delta_{ji} \tag{32}$$

na osnovu izraza 29

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i \, \delta_{ji} = \frac{1}{2} f_j$$

i dobija se veza:

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial F_j} = f_j} \tag{33}$$

Prikazani izraz 33 predstavlja jedan od Castigliano-vih stavova (poznat kao II Kastiljanov stav) koji se može izraziti rečima:

- ***Ako se energija deformacije linearno elastičnog tela izrazi u funkciji generalisanih sila, tada je parcijalni izvod deformacionog rada po nekoj od generalisanih sila jednak odgovarajućem generalisanom pomeranju.***

Namerno je veća pažnja u ovom materijalu posvećena drugom Kastiljanovom stavu, zbog njegove značajnije uloge u rešavanju konkretnih problema. Kada je u pitanju prvi Kastiljanov stav, s obzirom da je postupak izvođenja analogan smatrano je nepotrebnim ponavljati proceduru. U nastavku biće data direktno njegova formulacija.
Prvi Kastiljanov stav, koji objektivno ima mnogo manju primenu, izvodi se kada se deformacioni rad izrazi u funkciji generalisanih pomeranja. Može se pokazati da važi relacija:

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial f_j} = F_j} \tag{34}$$

Ovo je matematička formulacija prvog Kastiljanovog stava koji glasi:

- ***Ako se energija deformacije linearno elastičnog tela izrazi u funkciji generalisanih pomeranja, tada je parcijalni izvod deformacionog rada po nekom od generalisanih pomeranja jednak odgovarajućoj generalisanoj sili.***

6 Energija elastične deformacije linijskih nosača

Energija deformacije linijskog nosača zavisi od vrste unutrašnjih sila koje se javljaju u nosaču. Nju je najjednostavnije odrediti pojedinačno, za svaku presečnu silu i izvršiti superpoziciju.

1/ Energija elastične deformacije od normalne sile

U slučaju aksijalnog naprezanja, poznata je veza između normalne sile N i odgovarajućeg normalnog napona u obliku:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \tag{35}$$

U prethodnom delu teksta, izvedeni su izrazi (jednačine 6 - 8) koji definišu rad usled delovanja normalnih napona:

$$dA = \frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z dV = \frac{1}{2}\sigma_z\frac{\sigma_z}{E}dV = \frac{N^2}{2\,EA^2}dV \tag{36}$$

Ukupna energija deformacije u nosaču dobija se integracijom po celoj zapremini.

$$A = \int_V \frac{N^2}{2\,EA^2}dV \tag{37}$$

Pod pretpostavkom da su sila N, modul elastičnosti E i površina poprečnog preseka A konstantne, izraz 37 se može napisati u obliku:

$$A = \int_V \frac{N^2}{2\,EA^2}dV = \int_z dz\int_A \frac{N^2}{2\,EA^2}dA = \int_z \frac{N^2}{2\,EA^2}dz\underbrace{\int_A dA}_{A}$$

$$\boxed{A = \int_z \frac{N^2}{2\,EA}dz} \tag{38}$$

2/ Energija elastične deformacije od momenta savijanja

Normalni naponi u preseku usled momenata savijanja dati su poznatim izrazima:

$$\sigma_z^{(Mx)} = \frac{M_x}{I_x}y \qquad \sigma_z^{(My)} = \frac{M_y}{I_y}x \tag{39}$$

Na sličan način kao i u prethodnom slučaku:

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z dV = \frac{1}{2}\sigma_z\frac{\sigma_z}{E}dV = \frac{1}{2E}\frac{M_x^2}{I_x^2}y^2\,dV \\ dA &= \frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z dV = \frac{1}{2}\sigma_z\frac{\sigma_z}{E}dV = \frac{1}{2E}\frac{M_y^2}{I_y^2}x^2\,dV \end{aligned} \tag{40}$$

Ukupna energija deformacije u nosaču dobija se integracijom po celoj zapremini. Uzimajući u obzir da su opterećenja M_x *i* M_y kao i preseci I_x *i* I_y konstante na posmatranom rasponu, tada imamo:

$$A = \int_V \frac{1}{2E}\frac{M_x^2}{I_x^2}y^2 dV = \int_z \frac{1}{2E}\frac{M_x^2}{I_x^2}dz\underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_x}$$

$$\boxed{A = \int_z \frac{M_x^2}{2\,EI_x}dz}$$

Analogno za opterećenje M_y: (41)

$$\boxed{A = \int_z \frac{M_y^2}{2\,EI_y}dz}$$

3/ Energija elastične deformacije od transverzalne sile

Smičući napon u preseku pod dejstvom transverzalnih sila (T_x *i* T_y) definisan je formulom Žuravskog u ovliku:

$$\tau_{zx}^{(Tx)} = \frac{T_x \cdot S_y}{t_y \cdot I_y} \qquad\qquad \tau_{zy}^{(Ty)} = \frac{T_y \cdot S_x}{t_x \cdot I_x} \tag{42}$$

U prethodnom delu teksta, izvedeni su izrazi (jednačine 9 - 11) koji definišu rad usled delovanja tangencijalnih napona:

$$dA = \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx}dV \qquad \text{odnosno} \qquad dA = \frac{1}{2}\tau_{zy}\gamma_{zy}dV \tag{43}$$

Na primeru smičućeg napona τ_{zx} izvešće se energija deformacije tranverzalne sile T_x.

$$dA = \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx}dV = \frac{1}{2}\tau_{zx}\frac{\tau_{zx}}{G}dV = \frac{1}{2G}\tau_{zx}^2\,dV = \frac{1}{2G}\frac{T_x^2 \cdot S_y^2}{t_y^2 \cdot I_y^2}dV \tag{44}$$

Ukupna energija deformacije u nosaču dobija se integracijom po celoj zapremini.

$$A = \int_V \frac{1}{2G}\frac{T_x^2 \cdot S_y^2}{t_y^2 \cdot I_y^2}dV = \int_z \frac{T_x^2}{2GI_y^2}\,dz \int_A \frac{S_y^2}{t_y^2}\,dA$$

Analogno

$$A = \int_V \frac{1}{2G}\frac{T_y^2 \cdot S_x^2}{t_x^2 \cdot I_x^2}dV = \int_z \frac{T_y^2}{2GI_x^2}\,dz \int_A \frac{S_x^2}{t_x^2}\,dA \tag{45}$$

Ako se uvedu oznake

$$\chi_x = \frac{A}{I_y^2}\int_A \frac{S_y^2}{t_y^2}\,dA \qquad i \qquad \chi_y = \frac{A}{I_x^2}\int_A \frac{S_x^2}{t_x^2}\,dA \tag{46}$$

dobijaju se izrazi za energiju u obliku:

$$\boxed{A = \chi_x \int_z \frac{T_x^2}{2GA}dz \qquad i \qquad A = \chi_y \int_z \frac{T_y^2}{2GA}dz} \tag{47}$$

Očigledno da veličine χ_x i χ_y zavise samo od geometrije poprečnog preseka i određuju se za svaki presek pojedinačno. Nakon toga, kao konstante se unose u odgovarajuće izraze za energiju deformacije. Na primer

- pravougaoni presek: $\chi_x = 5/6$, $\chi_y = 6/5$,
- kružni presek: $\chi_x = \chi_y = 10/9$, i slično.

Ipak, značajno je naglasiti da doprinos transverzalnih sila ukupnom deformacionom radu je veoma mali i u najvećem broju naših primera on se **zanemaruje.**

4/ Energija elastične deformacije od momenta torzije

Za nosače kružnog i prstenastog poprečnog preseka smičući napon usled dejstva momenta torzije M_t je oblika

$$\tau_z^{(Mt)} = \frac{M_t}{I_t}r \tag{48}$$

tako da ukupan deformacioni rad možemo prilazati izrazom:

$$A = \int_V \frac{1}{2G}\tau_z^2 dV = \int_V \frac{1}{2G}\frac{M_t^2 \cdot r^2}{I_t^2}dV = \int_z \frac{M_t^2}{2GI_t^2}\,dz \int_A r^2 dA \dashrightarrow I_t$$

$$\boxed{A = \int_z \frac{M_t^2}{2GI_t}dz} \tag{49}$$

Naravno, za druge preseke uvodi se odgovarajući moment inercije pri torziji I_t.

7 Energija deformacije za opšti slučaj naprezanja

Izraz za vrednost energije elastične deformacije za opšti slučaj naprezanja nosača dobija se superpozicijom energije elastične deformacije od pojedinačnih unutračnjih sila.

$$A = \int_z \frac{N^2}{2\,EA}\,dz + \int_z \frac{M_x^2}{2\,EI_x}\,dz + \int_z \frac{M_y^2}{2\,EI_y}\,dz + \int_z \frac{M_t^2}{2GI_t}\,dz + \chi_x \int_z \frac{T_x^2}{2GA}\,dz + \chi_y \int_z \frac{T_y^2}{2GA}\,dz \qquad (50)$$

Ovi integrali koji definišu energiju deformacije poznati su kao Mohr-ovi integrali.

NAPOMENA - korišćena i dopunska literatura:

Prof. dr Radenko Pejović, OTPORNOST MATERIJALA, Građevinski fakultet, 2015, Podgorica
Prof. dr Vlatko Brčič, OTPORNOST MATERIJALA, Građevinska knjiga, 1989, Beograd
Prof. dr Vlado Lubarda, OTPORNOST MATERIJALA, Univerzitetska riječ, 1989, Titograd