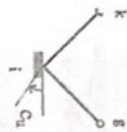


Momenti punog uklještenja štapa usled zadatog obrtanja uklještenja jednaki su:



$$\begin{aligned} m_{k,cu} &= a_{ik} \cdot c_u \cdot C \\ m_{i,cu} &= b_{ii} \cdot c_u \cdot C \\ \bar{m}_{i,cu} &= d_{ig} \cdot c_u \cdot C \end{aligned} \quad (2.18)$$

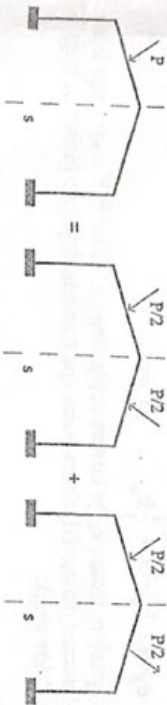
Slika 2.8

U izrazima za momente 2.16, 2.17 i 2.18 desna strana se množi konstantom redukcije $C = 2EI_c$, jer su konstante štapova a_{ik} , b_{ii} , c_k i d_{ig} redukovane tj. podeljene konstantom redukcije C . Na taj način se eliminiše redukcija momenta koji ulazi u slobodne članove uslovnih jednačina, za koje je već naglašeno da treba da ostanu neredukovani.

2.1.4 Simetrični nosači

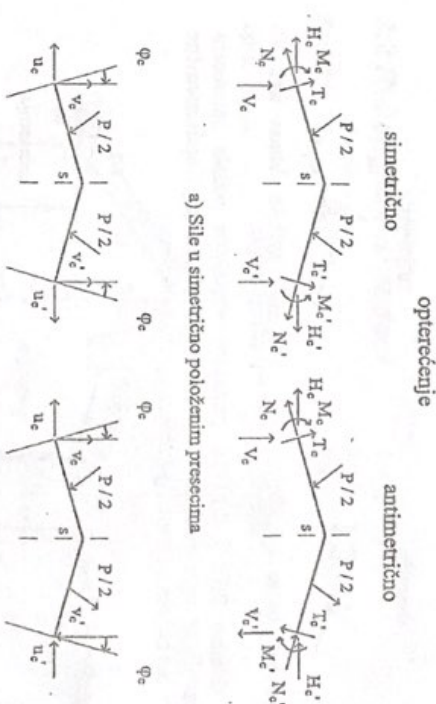
Nosač je simetričan ako su mu elementi simetrično raspoređeni u odnosu na jednu ili više osa simetrije i ako su mu karakteristike simetrično položanih preseka jednake.

Svako opterećenje na simetričnom nosaču se može prikazati kao zbir dva opterećenja, jednog koje je simetrično i drugog koje je antisimetrično u odnosu na osu simetrije.



Slika 2.9

Veza između sile i pomeranja u simetrično položanim presecima dobija se analizom uticaja u simetričnim prescima pri odgovarajućem opterećenju.



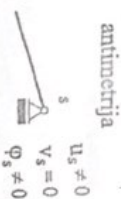
Slika 2.10

Na sl. 2.10 su prikazane sile i pomeranja u dva preseka C i C' simetrično položena u odnosu na osu s. Pri simetričnom opterećenju pomeranja i sile u preseku C' su slika u ogledalu u odnosu na pomeranja i sile u preseku C, tj. slika u ogledalu sa suprotnim znakom, pri antisimetričnom opterećenju. Na osnovu sl. 2.10 i konvencije o znaku presečnih silama dobija se da je:

simetrija		antisimetrija	
$u_c = -u_c$	$u_s = 0$	$u_c = u_c$	$u_s \neq 0$
$V_c = V_c$	$V_s \neq 0$	$V_c = -V_c$	$V_s = 0$
$\varphi_c = -\varphi_c$	$\varphi_s = 0$	$\varphi_c = \varphi_c$	$\varphi_s \neq 0$
$H_c = H_c$	$H_s \neq 0$	$H_c = -H_c$	$H_s = 0$
$V_c = -V_c$	$V_s = 0$	$V_c = V_c$	$V_s \neq 0$
$M_c = M_c$	$M_s \neq 0$	$M_c = -M_c$	$M_s = 0$

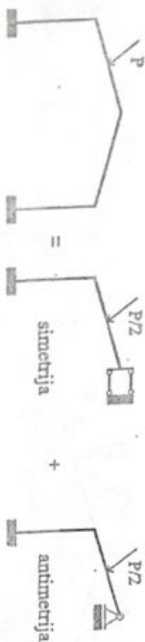
(2.19)

Kada su poznate veze između sile u simetrično položanim prescima C i C', može se umesto celog nosača posmatrati samo jedna polovina ako se pravilno definišu uslovi oslanjanja u osi simetrije. Uslovi oslanjanja u osi simetrije određuju se na osnovu činjenice da je vrednost antisimetričnog uticaja u tački S na osi simetrije jednaka nuli, a da je vrednost simetričnog uticaja u osi simetrije različita od nule.

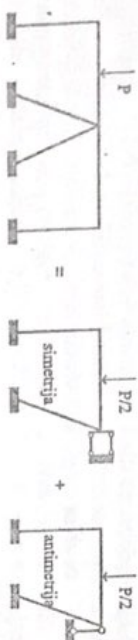


Slika 2.11 Uslovi u osi simetrije

Na slikama 2.12 i 2.13 su prikazani simetrični nosači opterećeni proizvoljnim opterećenjem i odgovarajuće simetrične i antisimetrične polovine nosača sa pripadajućim grančnim uslovima.

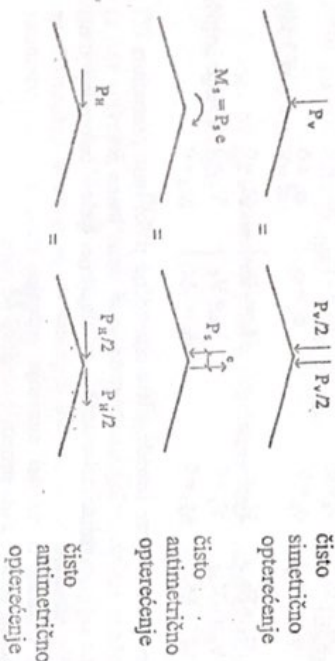


Slika 2.12



Slika 2.13

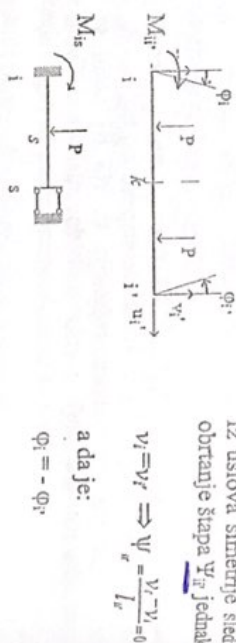
Kada opterećenje leži u osi simetrije, onda je:



Slika 2.14

Štap tipa s

Štap tipa s je štap kruto vezan na oba kraja sa ostalim delovima nosača, koga polovi osa simetrije, a koji je opterećen simetričnim opterećenjem slika 2.14.



Slika 2.15

Momenat na kraju štapa s M_{is} može se iskazati samo u funkciji obrtanja čvora i tako što se u izrazu za momenat M_{ir} eliminiše obrtanje čvora i i obrtanje štapa ψ_{ir} :

$$M_{is} = M_{ir} = a_{ir}\phi_i + b_{ir}\phi_r - c_{ir} \cdot \psi_{ir} + m_{ir} = \phi_i \cdot (a_{ir} - b_{ir}) + m_{ir}$$

$$M_{is} = e_{is}\phi_i + \bar{m}_{is} \quad (2.20)$$

gde je e_{is} konstanta štapa tipa s, a $\bar{m}_{is}$ momenat punog uključivanja štapa tipa s:

$$e_{is} = a_{ir} - b_{ir} = k_{is} = \frac{1}{2}k_{is} \quad \bar{m}_{is} = m_{ir} \quad (2.21)$$

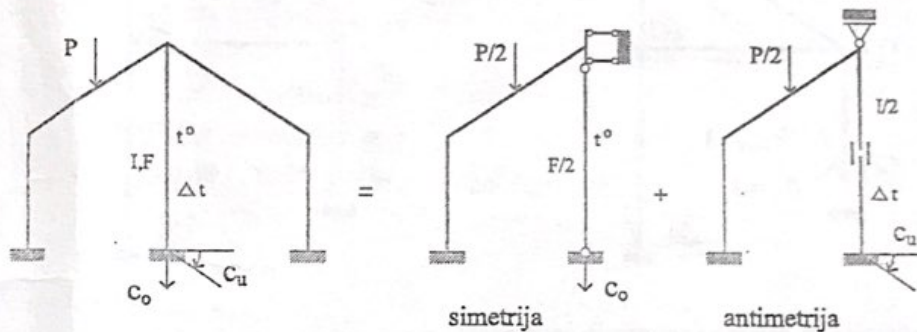
U gornjem izrazu k_{is} je krutost celog štapa i i, a k_{is} je krutost štapa tipa s. Momenat punog uključivanja štapa tipa s se određuje kao momenat štapa i i štapa tipa k.

Štap koji leži u osi simetrije

Štap koji leži u osi simetrije, čije su geometrijske karakteristike f i l, pri podeli nosača na simetričan i antisimetričan deo ostaje u osi simetrije sa karakteristikama $F/2$ i $l/2$.

Štap u osi simetrije pri simetričnom opterećenju može biti samo aksijalno napregnut, tj. na štapu u osi simetrije je $N \neq 0$, $M=T=0$. Zbog toga se taj štap u simetriji uzima kao prost štap (slika 2.15).

Pri antisimetričnom opterećenju štap u osi simetrije može biti opterećen samo na savijanje, što znači da je na štapu $N=0$, $M \neq 0$, $T \neq 0$. Stoga u antimetriji štap u osi ima podužni zglobov.



Slika 2.16

Temperaturna promena t^0 u osi štapa predstavlja čist simetričan uticaj, dok temperaturna razlika Δt predstavlja čist antisimetričan uticaj. Uticaji se u punom iznosu nanose na štap u osi simetrije kod simetrije, tj. antimetrije, slika 2.15

Sleganje oslonaca u osi simetrije c_o predstavlja čist simetričan uticaj, dok obrtanje uklještenja c_u predstavlja čist antisimetričan uticaj. Oni se u punom iznosu nanose u osloncu na osi simetrije kod simetrije, tj. antimetrije, slika 2.15

$$\frac{I_c}{I_k}$$

VJEŽBE IV

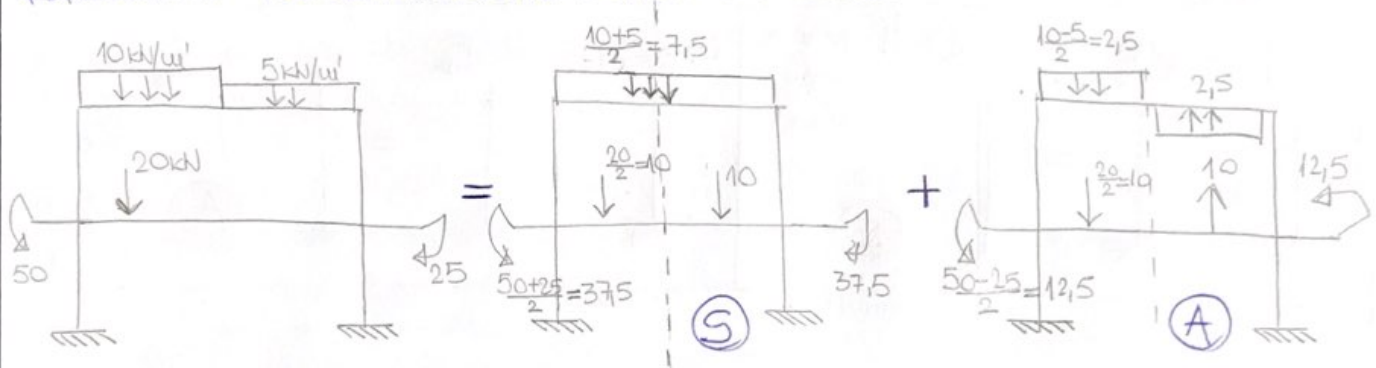
①

-SIMETRIČNI NOSAČI-

SIMETRIČAN NOSAČ JE NOSAČ KOD KOGA SU SVI ELEMENTI SIMETRIČNO RASPOREĐENI U ODNOSU NA OSU SIMETRIJE I KAD SU MATERIJALNE I GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE SIMETRIČNO POLOŽENIH POPR. PRESJEKA MEĐUSOBNO JEDNAKE.

OSOBINU SIMETRIJE NOSAČA KORISTIMO DA BI SMANJILI OBIM POSLA U RJEŠAVANJU PRESJ. SILA.

BILO KAKO, PROIZVOLJNO OPTEREĆENJE MOŽEMO ~~PODIJELITI~~ RAZLOŽITI NA SIMETRIČNO I ANTISIMETRIČNO.



FORMIRAMO SIMETRIČNO OPTEREĆENJE U ODNOSU NA OSU SIMETRIJE.

DIJELIMO OPTEREĆENJE SA 2, A ZATIM U ANTISIMETRIJI VRŠIMO DOPUNU DO KONAČNOG OPTEREĆENJA.

$$S = \frac{5+10}{2} = 7,5 \text{ kN/m}$$

$$S = \frac{20}{2} = 10 \text{ kN}$$

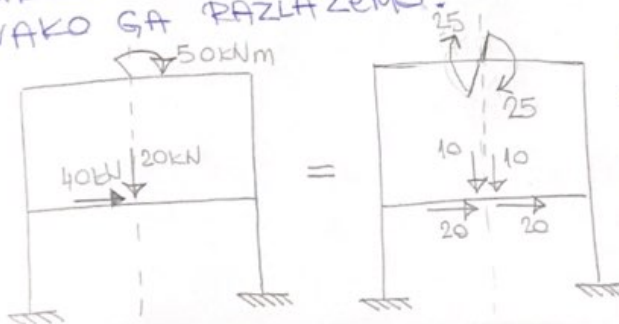
$$S = \frac{25+50}{2} = 37,5 \text{ kNm}$$

$$A = \frac{5-10}{2} = -2,5 \text{ kN/m}$$

$$A = -\frac{20}{2} = -10 \text{ kN}$$

$$A = \frac{25-50}{2} = -12,5 \text{ kNm}$$

UKOLIKO IMAMO KONCENTRISANA OPTEREĆENJE U OSI SIMETRIJE OVAKO GA RAZLAŽEMO:



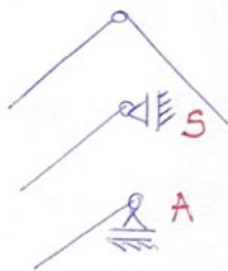
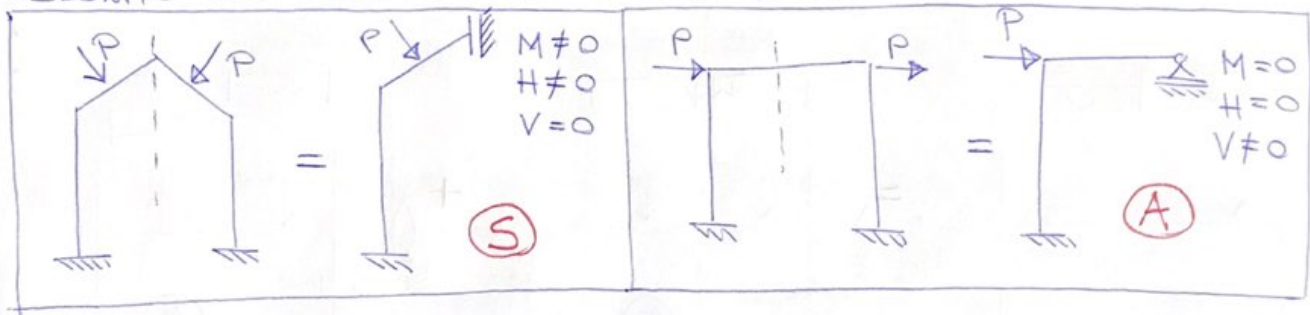
MOMENT I HORIZONTALNA SILA SU ANTISIMETRIČNA OPTEREĆENJA, DOK JE VERTIKALNA SILA SIMETRIČNO OPTEREĆENJE.

SIMETRIČNO OPTEREĆENJE JE SLIKA U OGLEDALU POLOVINE OPTEREĆENJA U ODNOSU NA OSU SIMETRIJE, DOK JE ANTIMETRIČNO OPTEREĆENJE SLIKA U OGLEDALU SAMO SA SUPROTNIM ZNAKOM.

SIMETRIČAN NOSAČ OPTEREĆEN SIMETRIČNIM OPTEREĆENJEM MOŽEMO POJEDNOSTAVITI TAKO ŠTO ĆEMO POSMATRATI SAMO POLOVINU NOSAČA, AKO SU ZADOVOLJENI GRANIČNI USLOVI U OSI SIMETRIJE.

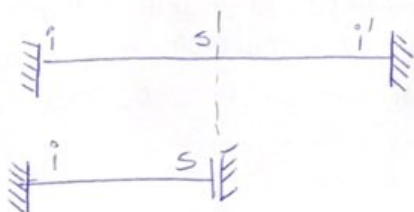
GRANIČNI USLOVI U OSI SIMETRIJE NOSAČA OPTEREĆENOG SIMETR. OPTEREĆENJEM SU ZADOVOLJENI AKO POSTAVIMO TRANSVERZALNI ZGLOB.

GRANIČNI USLOVI U OSI SIMETRIJE NOSAČA OPTEREĆENOG ANTIMETRIČNIM OPTEREĆENJEM SU ZADOVOLJENI AKO POSTAVIMO POKRETNI OSLOVAC SA VERTIKALNIM OSLANJANJEM.

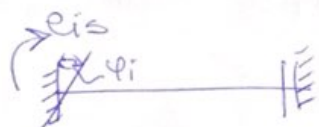
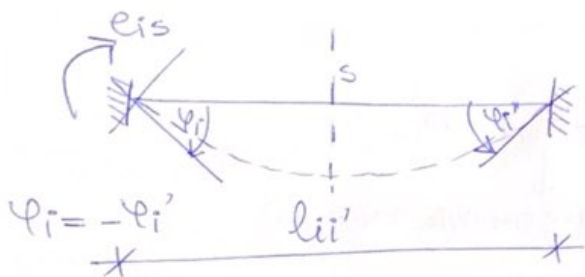


ŠTAP TIPA S

UKOLIKO OSA SIMETRIJE SIJEČE ŠTAP, TO JE ŠTAP TIPA "S".



E_{is} = MOMENT NA KRAJU I ŠTAPA TIPIA „S“ USLIJED JEDINIČNOG OBRATANJA ČVORA I. (2)

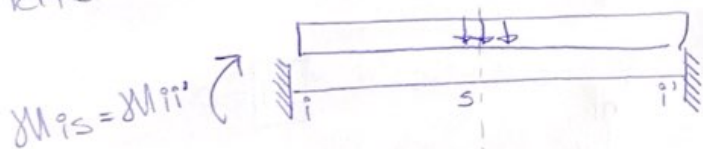


$$E_{is} = a_{ii'} - b_{ii'} = 2k_{ii'} - k_{ii'} = k_{ii'}$$

$$k_{ii'} = \frac{1}{l_{ii'}} = \frac{1}{2l_{is}} = \frac{1}{2} k_{is} = E_{is}$$

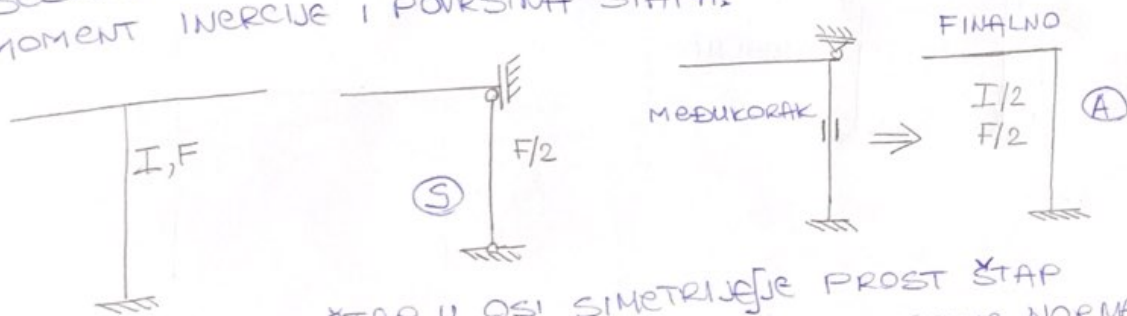
E_{is} = KRUTOST CIJELOG SIMETRIČNOG ŠTAPA, ILI POLOVINA KRUTOSTI POLOVINE ŠTAPA.

$\overline{M}_{is}$ - GOTSKI MOMENT NA KRAJU I ŠTAPA TIPIA „S“ SE RAČUNA KAO MOMENT PUNOG UKLJEŠTENJA NA KRAJU I ŠTAPA I-I'.



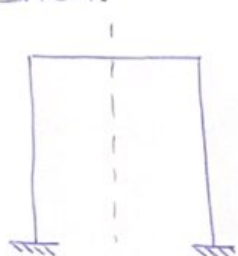
NOŠAČ SA ŠTAPOM U OSI SIMETRIJE

UKOLIKO IMAMO ŠTAP U OSI SIMETRIJE DIJELIMO GA NA DVA BESKONAČNO BLISKA ŠTAPA, PRI ČEMU SE NA POLA DIJELE I MOMENT INERCIJE I POVRŠINA ŠTAPA.



KOD SIMETRIJE, ŠTAP U OSI SIMETRIJE JE PROST ŠTAP
KOD ANTISIMETRIJE ŠTAP U OSI SIMETRIJE NE PRIMA NORMALNU SILU,
MEĐUTIM UKOLIKO UKLONIMO POKRETNI OSLOMAC I DODAMO NORM.
SILU U ŠTAPU DOBIJAMO FINALNU, JEDNOSTAVNIJU ŠEMU.

PRIMJER: ODREDI DEFORMACIJSKU NEODREĐENOST ZA ~~SIMETR~~
~~ANTISIMETR~~U. SIMETRIČNO I ANTISIMETRIČNO OPTEREĆENU POLOVINU
NOSAČA.

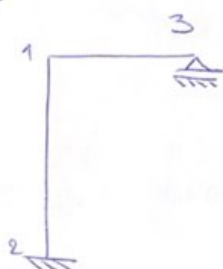


$$m=1 \quad \varphi_1$$

$$n=2 \cdot 3 - 3 - 2 - \overset{1}{\cancel{Z_{SIM}}} = 0$$

BRZU ŠTAPOVA TIPA "S"

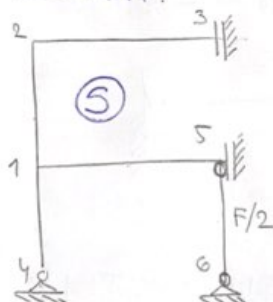
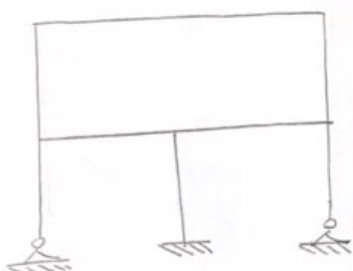
KOD ANTIMETRIJE NEMA ŠTAPA TIPA "S", POSTAJE ŠTAP TIPA
"g" ILI "k".



$$m=1$$

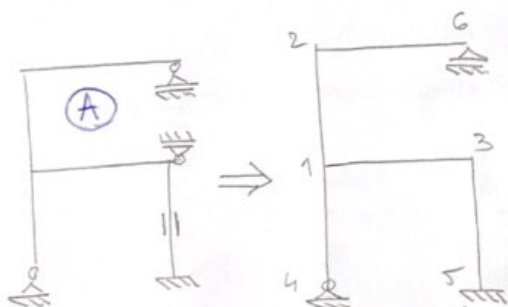
$$n=2 \cdot 3 - 3 - 2 = 1$$

PRIMJER: ODREDI DEFORMACIJSKU NEODREĐENOST SIMETR.
I ANTISIMETRIČNE POLOVINE NOSAČA.



$$m=2$$

$$n=2 \cdot 6 - 5 - 6 - \boxed{1} = 0$$



$$m=3$$

$$n=2 \cdot 6 - 5 - 5 = 2$$

FINALNO

③

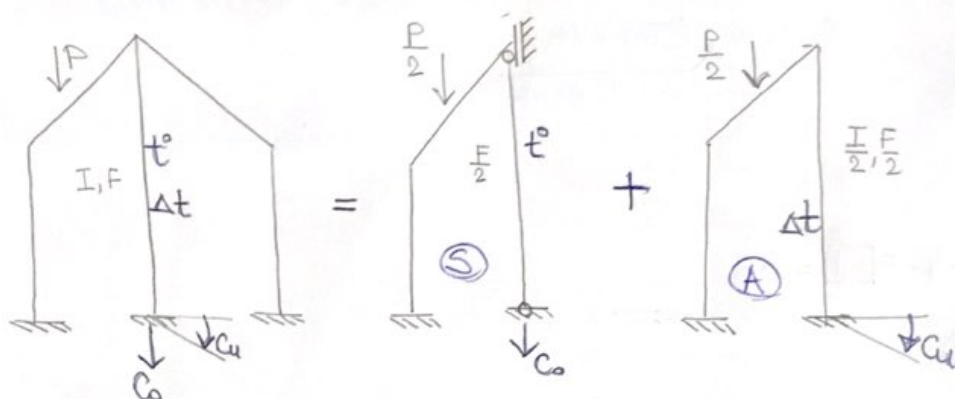
TEMPERATURNA PROMJENA JE ČIST SIMETRIČAN SLUČAJ OPTEREĆENJA.

TEMPERATURNI RAZLIKA JE ANTISIMETRIČAN SLUČAJ OPTEREĆENJA.

POMJERANJE OSLOMACA JE SIMETRIČAN SLUČAJ OPTEREĆENJA.

OBRTANJE UKLJEŠTENJA JE ANTISIMETRIČAN SLUČAJ OPTEREĆENJA.

UKOLIKO IMAMO OVAKAV SLUČAJ:



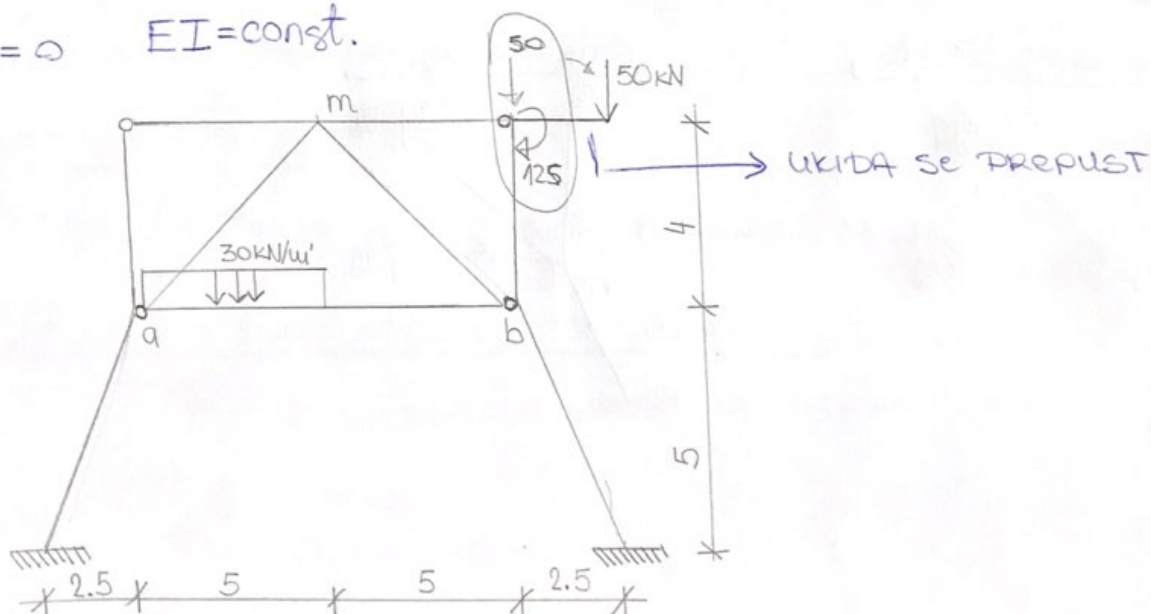
SVI POMENUTI UTICAJI (temp promj. i razlika, pomj. i obrtanje osl.) se nanose u punom iznosu NA ŠTAPU/OSLONCU NA OSI SIMETRIJE. (NE DIVILE SE NA $\frac{\Delta t}{2}$ ITD..)

ZADATAK: ZA DATI NOSAČ ODREDI:

a/ DIAGRAM M SAVIJANJA NA ŠTAPU a-b;

b/ KOMPONENTE POMJERANJA ČVORA m.

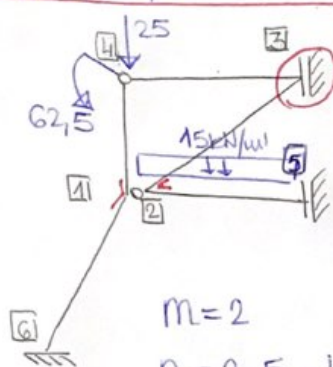
$I/F = 0$ $EI = \text{const.}$



DIJAGRAM M NA ŠTAPU a-b DOBIJAMO SUPERPOZICIJOM USLIJED SIMETRIČNOG I ANTISIMETRIČNOG OPTEREĆENJA.

$$M_{ab} = M_{ab}^s + M_{ab}^a$$

NOSAČ PRI SIMETRIČNOJ DEFORMACIJI:



$$m=2$$

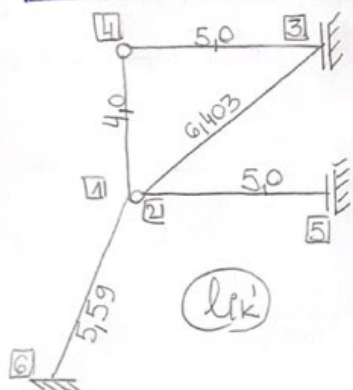
$$n=2 \cdot 5 - 4 - 5 - 1 = 0$$

POŠTO JE UKLJEŠTENJE, NE RAČUNA SE KRUTI UGAO IZMEĐU ŠTAPOVA

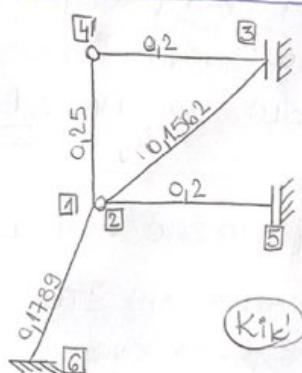
U JEDNOM ČVORU IMAMO DVIJE NEZAVISNE GRUPE ŠTAPOVA!!
KRUTO VEZANIH

$$I_c = I \Rightarrow l'_{ik} = l_{ik}$$

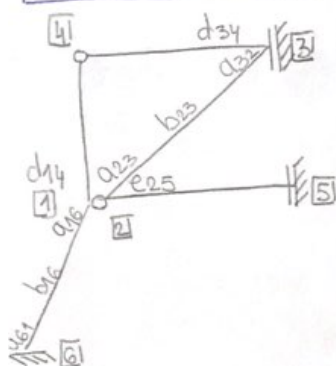
ŠEMA REDUKOVANIH DUŽINA



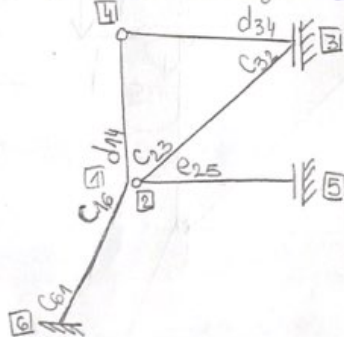
ŠEMA KRUTOSTI ŠTAPOVA



ŠEMA $a_{ik}, b_{ik}, d_{ik}, e_{is}$



ŠEMA c_{ik}, d_{ik}, e_{is}



USLOVNE J-NE:

(4)

$$A_{11}\varphi_1 + A_{12}\varphi_2 + A_{10} = 0$$

$$A_{21}\varphi_1 + A_{22}\varphi_2 + A_{20} = 0$$

$$A_{ii} = \sum a_{ik} + \sum d_{ig} + e_{is}$$

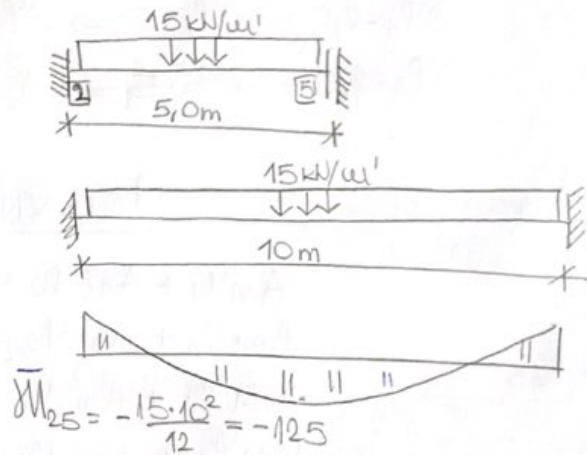
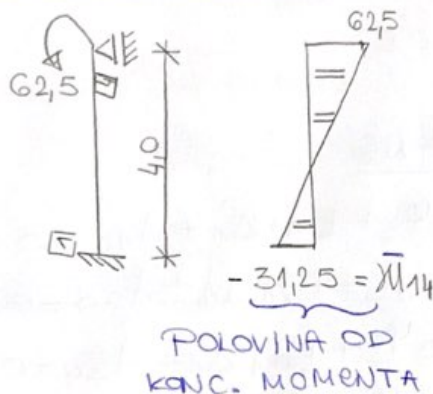
$$A_{11} = a_{16} + d_{14} = 2 \cdot k_{16} + 1,5 \cdot k_{14} = 2 \cdot 0,1789 + 1,5 \cdot 0,25 = 0,7328$$

$$A_{12} = 0$$

$$\text{POLOVINA KRUTOSTI } k_{is} = e_{is}$$

$$A_{22} = a_{23} + e_{25} = 2 \cdot 0,1562 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 = 0,4125$$

GOTSKI MOMENTI:



$$A_{10} = -31,25 \text{ kNm}$$

$$A_{20} = -125 \text{ kNm}$$

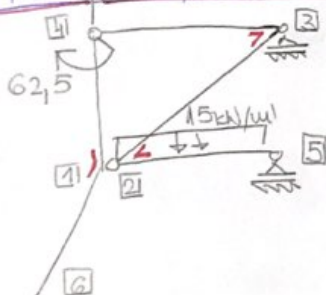
RIJEŠIMO SISTEM J-NA I DOBIJEMO: $\varphi_1 = 42,645$
 $\varphi_2 = 303,03$

TRAŽIMO M NA ŠTAPU TIPA 1,5".

$$M_{is} = e_{is}\varphi_i + \bar{M}_{is}$$

$$M_{25}^S = e_{25}\varphi_2 + \bar{M}_{25} = 0,2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 303,03 - 125 = -94,697 \text{ kNm}$$

NOŠAČ PRI ANTIMETRIČNOJ DEFORMACIJI:

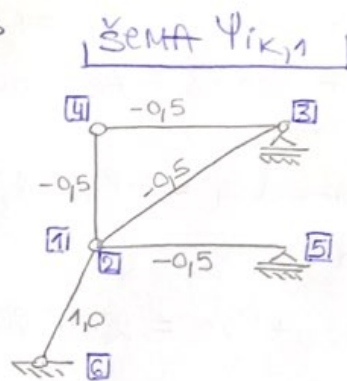
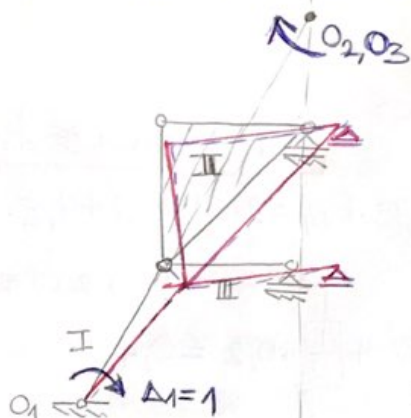
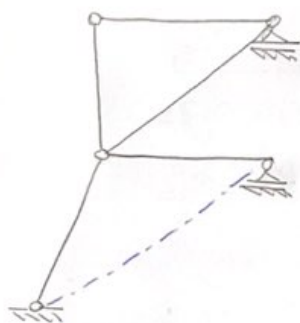


U ANTIMETRIJI NEMA VIŠE ŠTAPA TIPA 1,5".

$$m = 3$$

$$n = 2 \cdot 5 - 5 - 4 = 1$$

POŠTO IMAMO NEPOZNAT PARAMETAR POMI Δ_1 , FORMIRAMO REŠETKU SISTEMA.



$$\delta \Psi_{1,2,5} = -\delta \Psi_{2,5} \Rightarrow \delta \Psi_2 = -0,5$$

$$\delta \Psi_{1,2,5} = -\delta \Psi_{3,5} \Rightarrow \delta \Psi_3 = -0,5$$

$$A_{11} = a_{16} + d_{14}$$

$$A_{12} = 0$$

$$A_{13} = 0$$

$$A_{22} = a_{23} + d_{23}$$

$$A_{23} = b_{23}$$

$$A_{33} = d_{34} + a_{32}$$

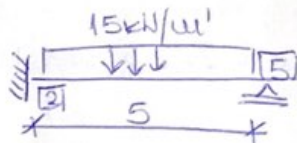
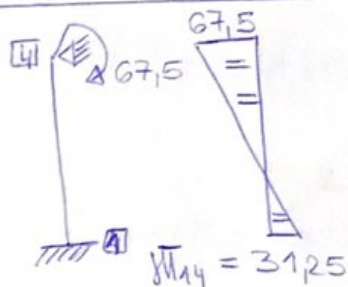
$$B_{11} = -(C_{16}\Psi_{16,1} + d_{14}\Psi_{14,1})$$

$$B_{21} = -(C_{23}\Psi_{23,1} + d_{25}\Psi_{25,1})$$

$$B_{31} = -(d_{34}\Psi_{34,1} + C_{32}\Psi_{32,1})$$

$$C_{11} = (C_{16} + C_{61})\Psi_{16,1}^2 + d_{14}\Psi_{14,1}^2 + d_{25}\Psi_{25,1}^2 + (C_{23} + C_{32})\Psi_{23,1}^2 + d_{34}\Psi_{34,1}^2$$

GOTSKI MOMENTI



SAD JE ŠTAP TIPIA 18"
PA GLEDAMO SAMO DIO
ŠTAPA 2-5, A NE 2-2'

$$\bar{M}_{25} = -\frac{15 \cdot 5^2}{8} = -46,875 \text{ kNm}$$

(5)

$$A_{10} = 31,25$$

$$A_{20} = -46,875$$

$$A_{30} = 0$$

$$C_{10} = -(\bar{M}_{14} \cdot \psi_{14,1} + \bar{M}_{25} \psi_{25,1} + R_1) = -(31,25 \cdot (-0,5) - 46,875 \cdot (-0,5) + 62,5 \cdot (-0,5) + 25 \cdot 5 \cdot (-0,5) - 15 \cdot 5 \cdot 2,5 \cdot (-0,5)) = -7,8125$$

ČVORNI MOMENT NE UZIMAMO U RAD, ALI OVO JE BIO ŠTAPNI MOMENT PA JE UZET U PRORAČUN RADA!!!

Riješimo sistem J-NA $\Rightarrow \psi_1, \psi_2, \psi_3, \Delta_1$

Moment na štapu a-b:

$$M_{25}^A = d_{25} \psi_2 - d_{25} \psi_{25,1} \Delta_1 + \bar{M}_{25} = -22,3 \text{ kNm} \quad \text{— NA OSNOVU IZRAZA ZA M NA KRAJU ŠTAPA}$$

$$\underline{M_{25} = M_{25}^S + M_{25}^A} \rightarrow \text{SUPERPONIRAMO REZULTATE}$$

b/ ODREDI KOMPONENTE POMJERANJA ČVORA m:

ZA ODREĐIVANJE VERT. POMJ. POSMATRA SE ~~SIMETRIČNO~~ ~~OPTEREĆENJE~~ NOSAČ PRI SIMETR. DEFORMACIJI.

VERTIKALNO POMJ NASTAJE PRI ~~TO~~ SIMETRIČNOJ DEFORMACIJI
DOK HORIZONTALNO POMJ NASTAJE PRI ANTIMETRIČNOJ DEF!!

SIMETRIČNO OPT NOSAČ:

$n=0 \rightarrow$ ~~DOBIJEN~~ DOBIJEN JE NOSAČ SA NEPOMJERLJIVIM ČVOROVIMA
PA NEMA VERTIKALNOG POMJ.

ODREĐIVAMO HOR POMJ:

POSMATRAMO NOSAČ PRI ANTIMETRIČNOJ DEF.

$$\underline{n=1}$$

$$U_{m1} = U_{m1} \cdot \Delta_1^C = 0,5 \cdot 6 \cdot \Delta_1 \cdot C$$

iz šeme
OBRATANJA

$\rightarrow$ RAZMJERA