VJEŽBE, I

MATRIČNA ANALIZA

U OVOM DIJELU KURSA VRŠIĆE SE PRORAČUN STATIČKI NEODREĐENIH NOSAČA PRIMJENOM MATRIČNE ANALIZE. U MATRIČNOJ ANALIZI NOSAČ SE RASTAVLJA NA ŠTAPOVE, ELEMENTE SISTEMA. SISTEM JE DISKRETAN, A ANALIZA DISKRETNOG SISTEMA SE SASTOJI OD:

1/ ANALIZE ELEMENTA (ŠTAPA)
2/ ANALIZE STRUKTURE (SISTEMA ŠTAPOVA)

NAJČEŠĆE PRIMJENJIVANA METODA MATRIČNE ANALIZE JE METODA DEFORMACIJA, I ONA ĆE BITI PREDMET RAZMATRANJA OVOG KURSA.

UKUPNA DEFORMACIJSKA NEODREĐENOST NOSAČA U TAČNOJ MET. DEFORMACIJA JE JEDNAKA:

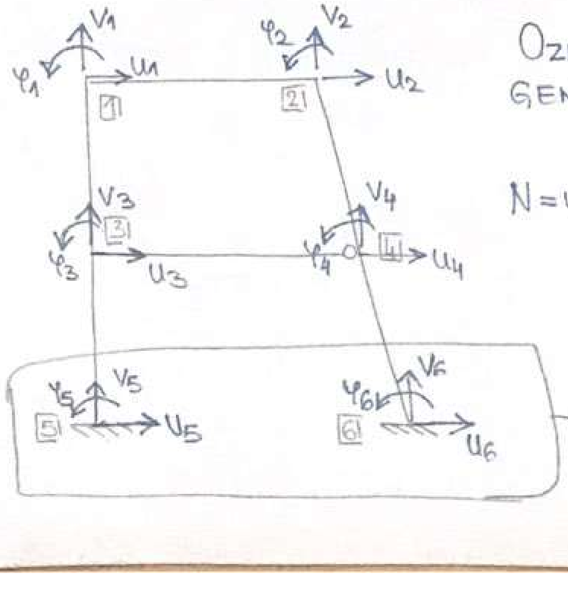
$$N = m + n = m + (2k - z_0)$$

m – BROJ NEPOZNATIH OBRTANJA JE JEDNAK BROJU GRUPA KRUTO VEZANIH ŠTAPOVA

n – BROJ NEPOZNATIH KOMPONENTALNIH POMJERANJA (BROJ STEPENI SLOBODE SISTEMA)

IMAMO **2K** KOMPONENTALNIH POMJERANJA ČVOROVA, A UMANJUJEMO GA ZA **z_0**, ~~ZA BROJA~~ JER POMJERANJA OSLONACA NIJESU NEPOZNATA, I JEDNAKA SU NULI.

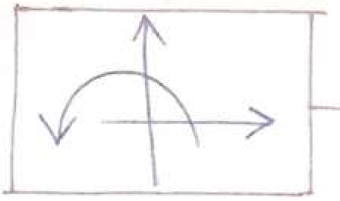
UKOLIKO BI ZANEMARILI UTICAJ NORMALNIH SILA NA DEFORMACIJU NOSAČA DOBILI BI PRIBLIŽNU METODU DEFORMACIJA.



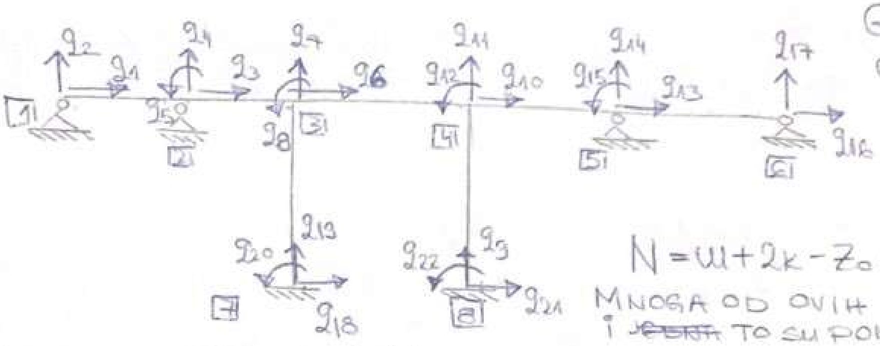
OZNAČIMO ČVOROVE, ZATIM OZNAČAVAMO GENERALISANA POMJERANJA ČVOROVA.

$$N = m + n = 4 + 2 \cdot 6 - 4 = 12$$

→ GENERALISANJA POMJERANJA OSLONACA SU POZNATA



POZITIVNA KONVENCIJA U TAČNOJ METODI DEFORMACIJA



GENERALISANA POMJ. ĆEMO OZNAČAVATI OZNAKOM q

$N = u + 2k - Z_0 = 4 + 2 \cdot 8 - 12 = 8 \times$ DEF. N.

MNOGA OD OVIH POMJERANJA SU POZNATA I ~~JEDNA~~ TO SU POMJ. OSLONACA

NA OVAJ NAČIN OZNAČAVAMO GENERALISANA POMJERANJA NOSAČA.

VEZA SILA I POMJERANJA USPOSTAVLJENA JE RELACIJOM:

$$\boxed{R = K \cdot q}$$

R - VEKTOR GENERALISANIH SILA

q - VEKTOR GENERALISANIH POMJERANJA

K - MATRICA KRUTOSTI

PRIMJENOM TAČNE METODE DEFORMACIJA ~~DOBIJA~~ KAO REZULTAT DOBIJAMO GENERALISANA POMJERANJA NA KRAJEVIMA ŠTAPOVA, A NAKON TOGA IZ POMJERANJA DOBIJAMO MOMENTE NA KRAJEVIMA ŠTAPOVA.

ŠTAP TIPA „K"

ŠTAP TIPA „K" IMA 6 STEPENI SLOBODE POMJERANJA.

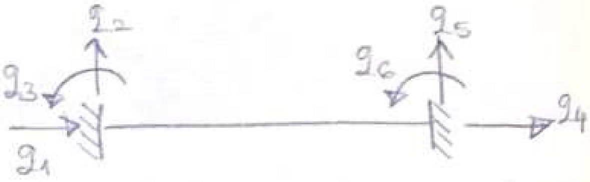
$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_k \\ v_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} \qquad \underline{R = K \cdot q}$$

K - MATRICA KRUTOSTI ŠTAPA, SIMETRIČNA U ODNOSU NA GLAVNU DIJAGONALU, PA JE $K_{ij} = K_{ji}$

MATRICA KRUTOSTI JE KVADRATNA MATRICA REDA $n \times n$. n - BROJ STEPENI SLOBODE POMJERANJA.

OPŠTI OBLIK MATRICE KRUTOSTI ŠTAPA TIPA „K".

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$



NPR. TREĆA KOLONA MATRICE KRUTOSTI PREDSTAVLJA VRIJEDNOSTI GENERALISANIH SILA USLIJED JEDINIČNOG GENERALISANOG POMJERANJA $q_3 = 1,0$

ŠTAP TIPA „G"

ŠTAP TIPA „g" IMA 5 STEPENI SLOBODE POMJERANJA.

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_k \\ T_k \end{bmatrix} \qquad \underline{R = k \cdot q}$$

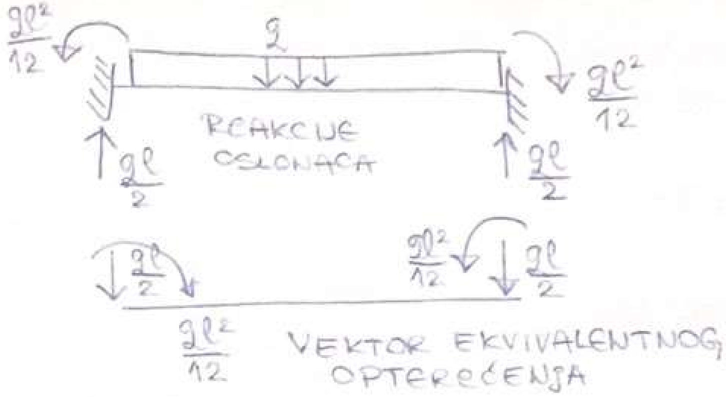
MATRICA KRUTOSTI KOD ŠTAPA TIPA „g" JE REDA 5x5.

VEKTOR EKVIVALENTNOG OPTEREĆENJA

U TAČNOJ METODI DEFORMACIJA POTREBNO JE ODREDITI I VEKTOR EKVIVALENTNOG OPTEREĆENJA. ON PREDSTAVLJA NEGATIVNE VRIJEDNOSTI REAKCIJA ~~ŠTAPOVA~~ KRAJEVA TOTALNO UKLJEŠTENOG ŠTAPA USLIJED ZADATOG OPTEREĆENJA KOJE DJELUJE NA ŠTAP.

KONCENTRISANO OPTEREĆENJE NA KRAJEVIMA ŠTAPA KOJIM SE ZAMJENJUJU SPOLJAŠNJI UTICAJI KOJI DJELUJU DUŽ OSE ŠTAPA NAZIVA SE EKVIVALENTNO OPTEREĆENJE.

PRIMJER

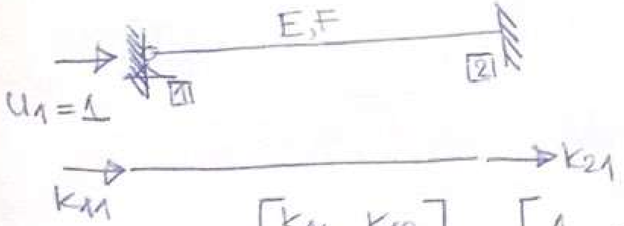


Q - VEKTOR EKVIVALENTNOG OPTEREĆENJA

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix}$$

NAPONSKO STANJE U RAVNI SE MOŽE PODIJELITI NA AKSIJALNO NAPREZANJE I SAVIJANJE SILAMA U RAVNI.

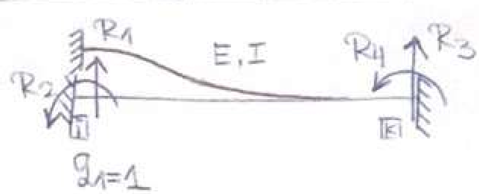
AKSIJALNO NAPREZANJE



USLIJED JEDINIČNOG POMJERANJA $u_1 = 1$, JAVLJAJU SE SILE k_{11} U ČVOR 1 I k_{21} U ČVORU 2.

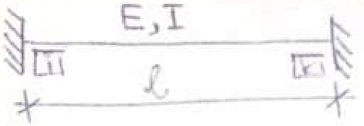
$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{EF}{l}$$ - IZVEDENO U TEORIJI

SAVIJANJE U RAVNI

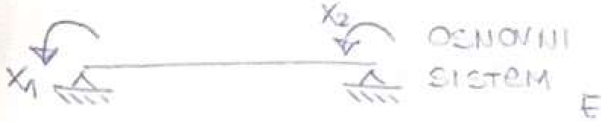


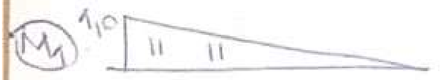
USLIJED JEDINIČNOG POMJERANJA $q_1 = 1$ JAVLJAJU SE SILE $R_1 = k_{11}$ $R_3 = k_{31}$
$R_2 = k_{21}$ $R_4 = k_{41}$

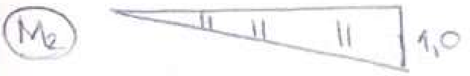
ELEMENTI MATRICE KRUTOSTI ODREĐUJU SE PRIMJENOM METODE SILA.



2X ST. NEODREĐEN SISTEM







$$EI\delta_{11} = \int M_1^2\, ds = \frac{l}{3}$$

$$EI\delta_{22} = \int M_2^2\, ds = \frac{l}{3}$$

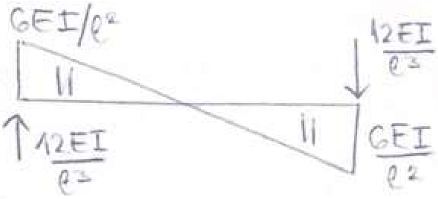
$$EI\delta_{12} = \int M_1 M_2\, ds = -\frac{l}{6}$$

$$EI\delta_{10} = -EIC\cdot c = -EI\cdot\frac{1}{l}$$

$$EI\delta_{20} = -EIC\cdot c = -EI\cdot\frac{1}{l}$$

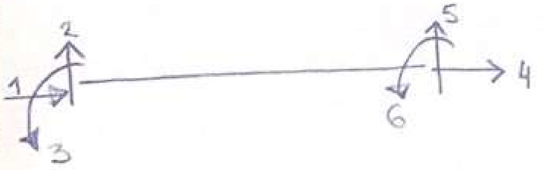
$$X_1 = M_i = EI\frac{6}{l^2} = M_k = X_2$$

$$T_i = -T_k = EI\frac{12}{l^3}$$



$$K = \begin{bmatrix} 12\frac{EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 6\frac{EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

SPOLJAŠNJI UTICAJI PREDSTAVLJAJU ZBIR UTICAJA KOJI SE JAVLJAJU ~~USLIJED~~ U SLUČAJU AKSIJALNOG NAPREZANJA I U SLUČAJU SAVIJANJA PA SE MATRICA KRUTOSTI DOBIJA SUPERPOZICIJOM MATRICA KRUTOSTI USLIJED OVA DVA TIPA NAPREZANJA.



REDOSLIJED OZNAČAVANJA: NORM. SILA, TRANSVERZALNA, PA MOMENT.

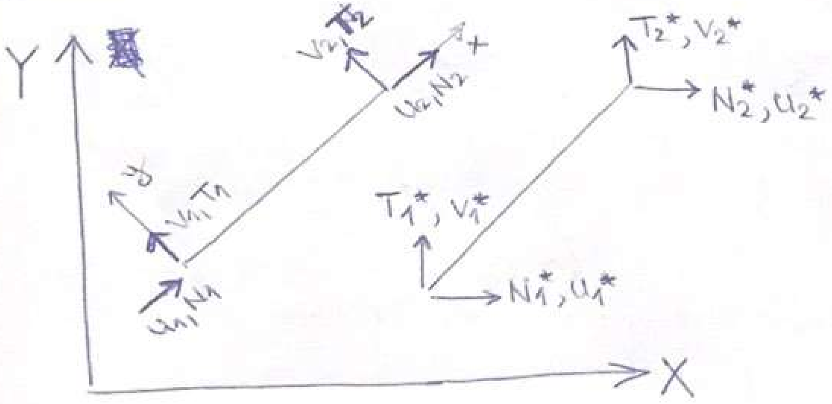
$$K = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

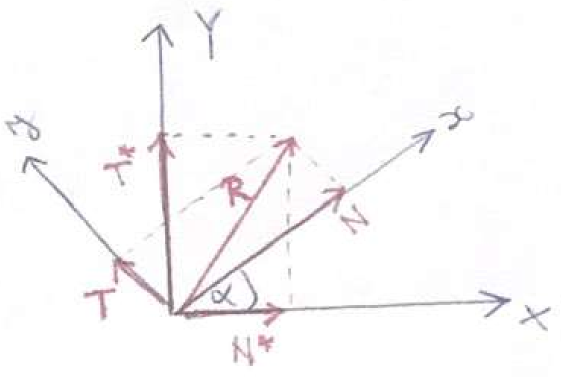
- ZA ŠTAP TIPA „g" MATRICA KRUTOSTI JE JEDNAKA:

$$K=\begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix}$$

OBJEŠNJENO JE NA KOJI SE NAČIN ODREĐUJE MATRICA KRUTOSTI ŠTAPA. OVE RELACIJE SU OSNOVA ZA ODREĐIVANJE MATRICE KRUTOSTI SISTEMA ŠTAPOVA.

SVAKI ŠTAP SE ZASEBNO POSMATRA U LOKALNOM KOORDINATNOM SISTEMU. KAD POSMATRAMO CIJELI NOSAČ IMAMO SKUP LOKALNIH KOORDINATNIH SISTEMA KOJE JE POTREBNO TRANSFORMISATI U JEDINSTVENI GLOBALNI KOORDINATNI SISTEM.





$$N=N^*\cos\alpha+T^*\sin\alpha$$

$$T=-N^*\sin\alpha+T^*\cos\alpha$$

$$\lambda=\cos\alpha$$

$$\mu=\sin\alpha$$

MOMENT OSTAJE NEPROMIJENJEN U ODNOSU NA GLOBALNI I LOKALNI KOORDINATNI SISTEM. $\boxed{M=M^*}$

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N^* \\ T^* \\ M^* \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{R = t \cdot R^*}}$$

t – MATRICA TRANSFORMACIJE ČVORA

R – VEKT. GENER. SILA U LOK. KOORD. SIST.

R* – VEKT. GENER. SILA U GLOB. KOORD. SIST.

$$T = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$$ – MATRICA TRANSFORMACIJE ŠTAPA

$$T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & \mu & 0 & & & \\ -\mu & \lambda & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & \lambda & \mu & 0 \\ & 0 & & -\mu & \lambda & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$ MATRICA TRANSFORMACIJE ZA ŠTAP TIPA „K"

$$T = \left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda & \mu & 0 & & \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & & & \lambda & -\mu \\ & 0 & & -\mu & \lambda \end{array}\right] \rightarrow$$ MATRICA TRANSFORMACIJE ZA ŠTAP TIPA „g"

$$\boxed{R^* = T^T \cdot R} \rightarrow$$ VEZA GENERALISANIH SILA U GLOBALNOM I LOKALNOM KOORDINATNOM SISTEMU

$$\boxed{T^T = T^{-1}} \rightarrow$$ MATRICA TRANSFORMACIJE JE ORTOGONALNA

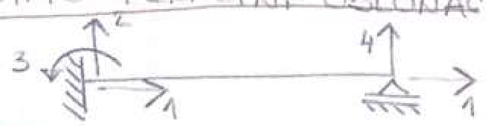
$$\boxed{K^* = T^T \cdot k \cdot T}$$

K* – MATRICA KRUTOSTI ŠTAPA U GLOBALNOM KOORDINATNOM

K – -||- -||- -||- -||- LOKALNOM -||- SIST.

$$k = \begin{bmatrix} 5 \times 5 \end{bmatrix}$$

A AKO IMAMO POKRETNI OSLONAC



NEMA AKSIJALNOG NAPREZANJA, JER JE SLOBODNO KRETANJE U TOM PRAVCU

$$k = \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c|c} & & \\ & & \\ & & \end{array}\right] & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

OVO SU BILE RELACIJE VEZANE ZA ŠTAP U GLOBALNOM KOORDINATNOM SISTEMU.

KADA SE POSMATRA CIJELI NOSAČ, FORMIRA SE SISTEM JEDNAČINA I NA KRAJU SE DOLAZI DO SLJEDEĆEG IZRAZA:

$\boxed{S^* = k^* \cdot g^*} \rightarrow$ DETALJNO IZVEDENO U TEORIJI (STR 120-125 SKRIPTA PROFESORICE)

S^* - VEKTOR SLOBODNIH ČLANOVA KOJI SE ODREĐUJE KAO ZBIR ZADATIH KONCENTRISANIH SILA U ČVOROVIMA I VEKTORA EKVIVALENTNOG ČVORNOG OPTEREĆENJA

K^* - MATRICA KRUTOSTI SISTEMA

g^* - VEKTOR GENERALISANIH POMJERANJA SISTEMA

MATRICU K^* MOŽEMO PODIJELITI NA SUBMATRICE.

$$K^* = \begin{bmatrix} K_{nn}^* & K_{np}^* \\ K_{pn}^* & K_{pp}^* \end{bmatrix}$$

K_{nn}^* - SUBMATRICA KRUTOSTI VEZANA ZA NEPOZNATA POMJERANJA

$S^* = P^* + Q^*$

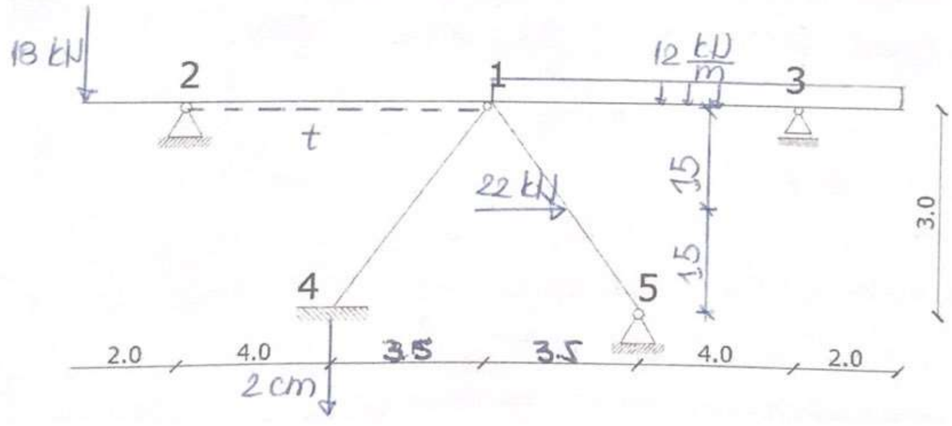
P^* - KONCENTRISANE SILE U ČVOROVIMA (VEKTOR SPOLJAŠNJIH SILA

A/ Primjenom tačne metode deformacija odrediti sile u presjecima datog nosača usled:

1. Zadatog opterećenja;
2. Temperaturne promjene t = 24 °C duž označenih štapova
3. Pomjeranja označenog oslonca.

B/ Rezultate kontrolisati primjenom programa SAP2000

b = 0,4m
h_{ik} = 0,1 l_{ik}
E=3x10^7kN/m^2
α_t = 10^{-5} 1/°C



НАЧИН ОЗНАЧАВАЊА ШТАПА

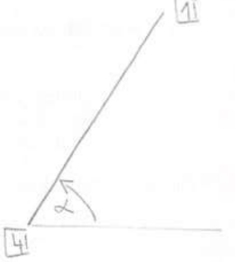
БИРАМО ДА ЛИ ЋЕ ШТАР' БИТ НПР. 1-4 ИЛИ 4-1
БИТНО ЈЕ САМО ДА ПРАВИЛНО ОДРЕДИМО УГАО α.

ПОЗИТИВАН СМЈЕР ОБРТАЊА ЈЕ СУПРОТАН ОД СМЈЕРА КАЗАЉКЕ НА САТУ.

АКО ЈЕ ШТАП 1-4

МЈЕРИМО УГАО ОД ХОРИЗОНТАЛЕ ДО ШТАПА

АКО ЈЕ ШТАП 4-1



РАЗЛИКА ЋЕ БИТИ У $\sin\alpha$ И $\cos\alpha$ У ЗАВИСНОСТИ ТОГА КАКВЕ ЋЕМО ОЗНАКЕ УСВОЈИТИ.

$b=0,4m$

$h_{ik}=0,1 l_{ik}$

$E=3\cdot10^{7} kN/m^{2}$

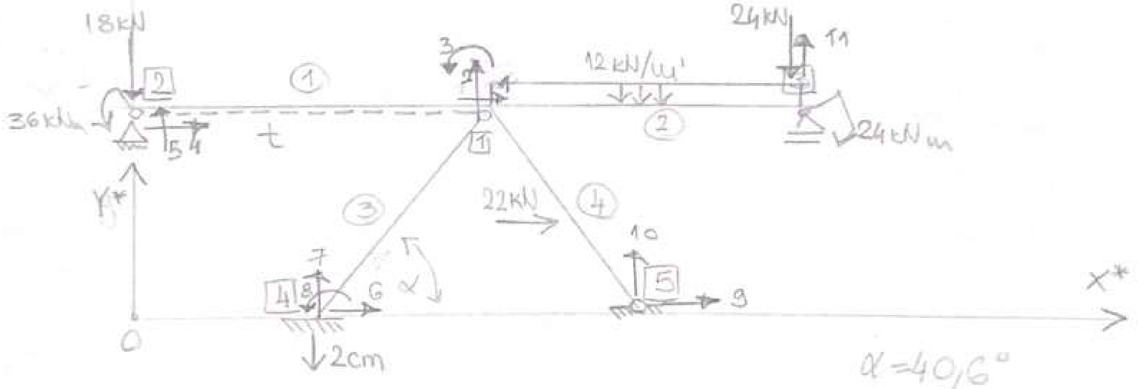
$\alpha_t=10^{-5} 1/°C$

$N=m+n=1+2\cdot5-7=4-\underline{1}=3$

ПОШТО ЈЕ У ЧВОРУ $\boxed{3}$ ПОКРЕТНИ ОСЛОНАЦ ИМАМО ЈЕДНУ МАЊЕ НЕПОЗНАТУ. СА СЛИКЕ СЕ МОЖЕ ВИДЈЕТИ ДА ПОСТОЈЕ 3 НЕПОЗНАТА ПОМЈ.

ГЕОМЕТРИЈСКЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ

ШТАП	i	k	cosα	sinα	$l_{ik}^{[m]}$	$h_{ik}^{[m]}$	$F_i(m^2)$	$I\cdot10^{-3}$	$\frac{F_i}{I_i}$	$\frac{EI}{l}$
1	2	1	1	0	7,5	0,75	0,3	14,063	21,33	56252
2	1	3	1	0	7,5	0,75	0,3	14,063	21,33	56252
3	4	1	0,76	0,65	4,61	0,46	0,184	3,245	56,7	21117,1
4	1	5	0,76	-0,65	4,61	0,46	0,184	3,245	56,7	21117,1



Матрице крутости у локалном координатном систему

ШТАП 1

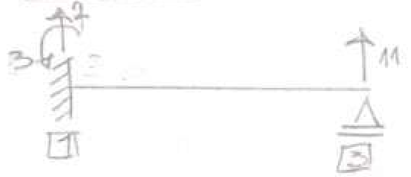
ПРВО СЕ ОДРЕЂУЈУ МАТРИЦЕ КРУТОСТИ У ЛОКАЛНОМ КООРДИНАТНОМ СИСТЕМУ

EI/l

$$K_1=\left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & \\ 21,33 & 0 & -21,33 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0,05\dot{3} & 0 & -0,05\dot{3} & -0,4 & 5 \\ -21,33 & 0 & 21,33 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,05\dot{3} & 0 & 0,05\dot{3} & +0,4 & 2 \\ 0 & -0,4 & 0 & +0,4 & 3 & 3 \end{array}\right]\cdot 56252=\hat{K}_1=K_1^{*}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} K^{*}=T^{T}\cdot K\cdot T \\ \hat{K}=K\cdot T \end{array}}$$

ШТАП 2



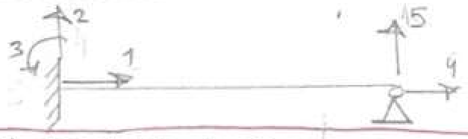
$$K_2=\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 11 & \\ 0,05\dot{3} & 0,4 & -0,05\dot{3} & 2 \\ 0,4 & 3 & -0,4 & 3 \\ -0,053 & -0,4 & 0,05\dot{3} & 11 \end{array}\cdot 56252$$

ШТАП 3

$$K_3=\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ 56,7 & 0 & 0 & -56,7 & 0 & 1 \\ 0 & 0,141 & 0,651 & 0 & -0,141 & 2 \\ 0 & 0,651 & 3 & 0 & -0,651 & 3 \\ -56,7 & 0 & 0 & 56,7 & 0 & 4 \\ 0 & -0,141 & -0,651 & 0 & 0,141 & 5 \end{array}\cdot 21\,117,1$$

КОМПОНЕНТЕ ПОМЈЕРАЊА ЗА ШТАП 3 И 4 МОЖЕМО ОЗНАЧИТИ ПРОИЗВОЉНО 6,7,8,1 И 2 ЈЕР ЋЕ СЕ МАТРИЦА КРУТОСТИ ТЕК ТРАНСПОНОВАТИ, ПА ЈЕ САМО НА КРАЈУ БИТНО ПРАВИЛНО ОЗНАЧИТИ

ШТАП 4



$$K_4=\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ 56,7 & 0 & 0 & -56,7 & 0 & 1 \\ 0 & 0,141 & 0,651 & 0 & -0,141 & 2 \\ 0 & 0,651 & 3 & 0 & -0,651 & 3 \\ -56,7 & 0 & 0 & 56,7 & 0 & 4 \\ 0 & -0,141 & -0,651 & 0 & 0,141 & 5 \end{array}\cdot 21\,117,1$$

КОД ШТАПОВА 1 И 2 СМО ОДМАХ ОЗНАЧАВАЛИ СТВАРНИМ РЕДОСЛИЈЕДОМ ЈЕР СУ ХОРИЗОНТАЛНИ ШТАПОВИ ПА ИМ ЈЕ МАТРИЦА ТРАНСФ. = 1

матрице трансформације

$$T_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3=\begin{bmatrix} 0,76 & 0,65 & 0 & 0 & 0 \\ -0,65 & 0,76 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,76 & 0,65 \\ 0 & 0 & 0 & -0,65 & 0,76 \end{bmatrix} \qquad T_4=\begin{bmatrix} 0,76 & -0,65 & 0 & 0 & 0 \\ 0,65 & 0,76 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,76 & -0,65 \\ 0 & 0 & 0 & 0,65 & 0,76 \end{bmatrix}$$

матрице крутости штапова $\hat{k}_j = k_j \cdot T_j$ (ТРАНСФОРМАЦИ

$$\hat{k}_1 = k_1 \cdot T_1 = k_1$$

$$\hat{k}_2 = k_2 \cdot T_2 = k_2 = \begin{bmatrix} 0{,}053 & 0{,}4 & -0{,}053 \\ 0{,}4 & 3 & -0{,}4 \\ -0{,}053 & -0{,}4 & 0{,}053 \end{bmatrix} \cdot 56252$$

$$\hat{k}_3 = k_3 \cdot T_3 = \begin{bmatrix} 43{,}1 & 36{,}855 & 0 & -43{,}1 & -36{,}855 \\ -0{,}092 & 0{,}1072 & 0{,}651 & 0{,}092 & -0{,}1072 \\ -0{,}423 & 0{,}495 & 3 & 0{,}423 & -0{,}495 \\ -43{,}1 & -36{,}855 & 0 & 43{,}1 & 36{,}855 \\ 0{,}092 & -0{,}1072 & -0{,}651 & -0{,}0917 & 0{,}1072 \end{bmatrix} \cdot 21\,117{,}1$$

$$\hat{k}_4 = k_4 \cdot T_4 = \begin{bmatrix} 43{,}1 & -36{,}855 & 0 & -43{,}1 & 36{,}855 \\ 0{,}092 & 0{,}1072 & 0{,}651 & -0{,}092 & -0{,}1072 \\ 0{,}423 & 0{,}495 & 3 & -0{,}432 & -0{,}495 \\ -43{,}1 & 36{,}855 & 0 & 43{,}1 & -36{,}855 \\ -0{,}092 & -0{,}1072 & -0{,}651 & 0{,}092 & 0{,}1072 \end{bmatrix} \cdot 21\,117{,}1$$

Матрице крутости у ГЛОБАЛНОМ КООРДИНАТНОМ СИСТЕМУ

$$k_1^* = T_1^T \cdot \hat{k}_1 = \begin{array}{c|ccccc|c} & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & 119{,}98 & 0 & -119{,}98 & 0 & 0 & 4 \\ & 0 & 0{,}3 & 0 & -0{,}3 & -2{,}25 & 5 \\ & -119{,}98 & 0 & 119{,}98 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -0{,}3 & 0 & 0{,}3 & 2{,}25 & 2 \\ & 0 & -2{,}25 & 0 & 2{,}25 & 16{,}875 & 3 \end{array} \cdot 10^4$$

$$K_2^* = T_2^T \cdot \hat{k}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 11 & \\ 0,3 & 2,25 & -0,3 & 2 \\ 2,25 & 16,876 & -2,25 & 3 \\ -0,3 & -2,25 & 0,3 & 11 \end{array}\right] \cdot 10^4$$

$$K_3^* = T_3^T \cdot \hat{k}_3 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & \\ 69,284 & 59 & -0,894 & -69,284 & -59 & 6 \\ 59 & 50,76 & 1,045 & -59 & -50,76 & 7 \\ -0,894 & 1,045 & 6,335 & 0,894 & -1,045 & 8 \\ -69,284 & -59 & 0,894 & 69,284 & 59 & 1 \\ -59 & -50,76 & -1,045 & 59 & 50,76 & 2 \end{array}\right] \cdot 10^4$$

$$K_4^* = T_4^T \cdot \hat{k}_4 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & \\ 69,284 & -59 & 0,884 & -69,284 & 59 & 1 \\ -59 & 50,76 & 1,045 & 59 & -50,76 & 2 \\ +0,894 & 1,045 & 6,335 & -0,894 & -1,045 & 3 \\ -69,284 & 59 & -0,894 & 69,284 & -59 & 9 \\ 59 & -50,76 & -1,045 & -59 & 50,76 & 10 \end{array}\right] \cdot 10^4$$

$$K_{nn}^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ 258,548 & 0 & 0,849 & 1 \\ 0 & 102,12 & 5,545 & 2 \\ 0,849 & 5,545 & 40,087 & 3 \end{array}\right] \cdot 10^4$$

$$K^* = \left[\begin{array}{c|c|c} 1\;2\;3 & 4\;5\;6\;7\;8\;9\;10\;11 & \\ K_{nn}^* & K_{np}^* & 1\;2\;3 \\ \hline K_{pn}^* & K_{pp}^* & 4\;5\;6\;7\;8\;9\;10\;11 \end{array}\right] \longrightarrow$$

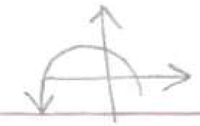
ПОЈЕДИНАЧНЕ МАТРИЦЕ КРУТОСТИ СЕ САБЕРУ У ЈЕДНУ, МАТРИЦУ КРУТОСТИ СИСТЕМА

МОЖЕМО ОДРЕДИТИ И ОСТАЛЕ ЧЛАНОВЕ МАТРИЦЕ $K^* = [11 \times 11]$ МЕЂУТИМ ТО НИЈЕ НЕОПХОДНО ЗА РЈЕШАВАЊЕ ЗАДАТКА, ПА СЕ МОЖЕ СМАЊИТИ ОБИМ ПОСЛА УКОЛИКО САМО ОДРЕДИМО $\underline{K_{nn}^*}$

непознате су 1,2,3

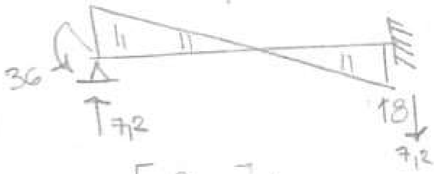
Вектор еквивалентног чворног оптерећења

И КОД ЕКВИВАЛЕНТНОГ ОПТ. ПОЗИТИВНА КОНВЕНЦИЈА ЈЕ



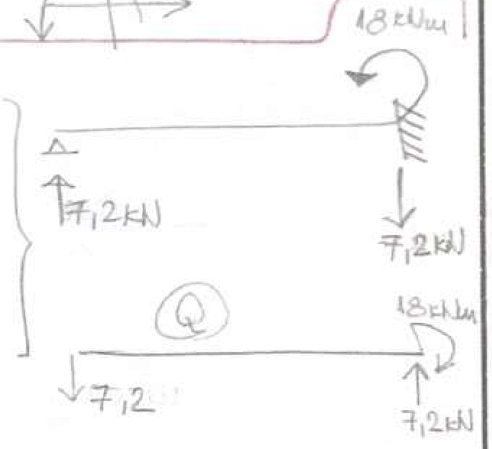
ШТАП 1

18kN се убраја у Ф*



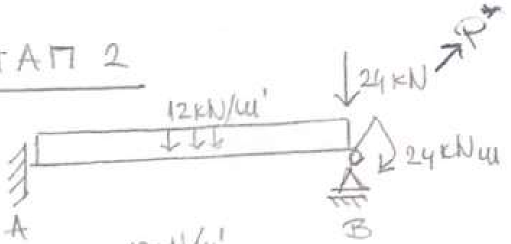
$$R_A = -\frac{3 \cdot 36}{2 \cdot 7{,}5} = -7{,}2 \text{ kN}$$

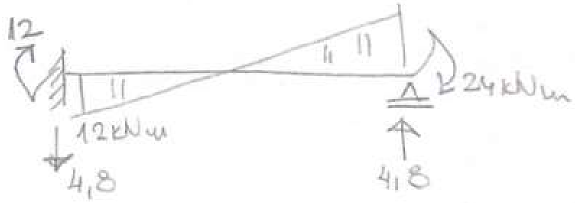
$$R_B = 7{,}2 \text{ kN}$$

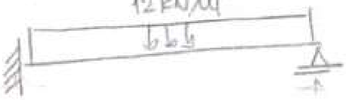


$$Q_1 = \begin{array}{[c]l} 0 & 4 \\ -7{,}2 & 5 \\ 0 & 1 \\ 7{,}2 & 2 \\ -18 & 3 \end{array} = Q_1^* = T_1^T \cdot Q_1$$

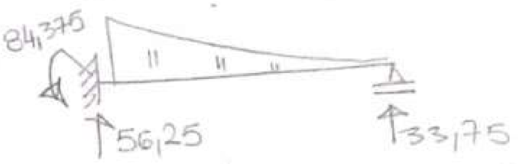
ШТАП 2







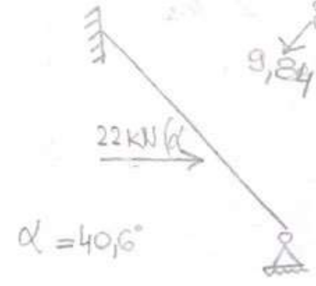
УКУПНО

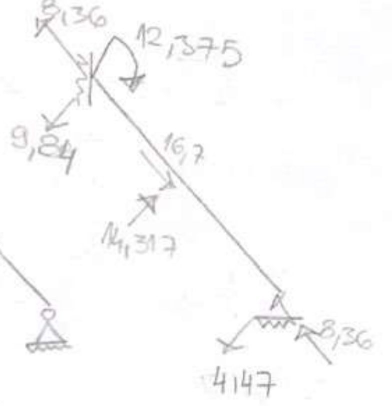


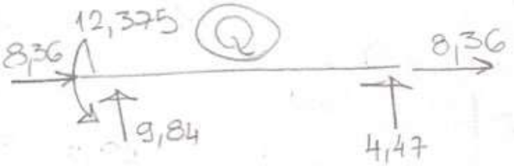
$$Q_2 = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} -51{,}45 \\ -72{,}375 \\ -38{,}55 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 11 \end{array} \end{array} = Q_2^* = T_2^T \cdot Q_2$$

$Q_3 = 0$

ШТАП 4







$$Q_4 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 8{,}36 \\ 9{,}83 \\ 12{,}375 \\ 8{,}36 \\ 4{,}47 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 10 \end{array} \end{array}$$

$$Q_4^* = T_4^T \cdot Q_4 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 12{,}743 \\ 2{,}0368 \\ 12{,}375 \\ 9{,}259 \\ -2{,}037 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 10 \end{array} \end{array}$$

$$Q^* = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 12{,}734 \\ -42{,}213 \\ -78 \\ 0 \\ -7{,}2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9{,}259 \\ -2{,}03 \\ -38{,}55 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} \end{array} \quad P^* = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -18 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -24 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} \end{array} \quad S^* = Q^* + P^* = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 12{,}734 \\ -42{,}213 \\ -78 \\ 0 \\ -25{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9{,}259 \\ -2{,}03 \\ -62{,}55 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} \end{array}$$

Одређивање непознатих помјерања у глобалном координатном систему

$K^* \cdot q^* = S^*$ $\qquad K_{nn}^* q_n^* + K_{np}^* \overset{0}{\cancel{q_p^*}} = S_n^*$

$K_{nn}^* \cdot q_u^* = S_u^*$ $\qquad q_p^*$ – ЗАДАТА ПОМЈЕРАЊА, НЕМАМО ИХ, ОНА СЕ ЈАВЉАЈУ КОД ПОМЈЕРАЊА ОСЛОНАЦА

$q_u^* = K_{nn}^{*-1} \cdot S_u^*$

$$K_{nn}^* = \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & 258{,}548 & 0 & 0{,}849 & 1 \\ & 0 & 102{,}12 & 5{,}545 & 2 \\ & 0{,}849 & 5{,}545 & 40{,}087 & 3 \end{array} \cdot 10^4 \qquad S^* = \begin{bmatrix} 12{,}743 \\ -42{,}213 \\ -78 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$q_u^* = \begin{bmatrix} 0{,}05554 \\ -0{,}30998 \\ -1{,}9041 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \cdot 10^{-4}$$

Прорачун сила на крајевима штапова

$R_i = \hat{K}_i \cdot q_i^* - Q_i$

$$R_1 = \hat{k}_1 \cdot q_1^* - Q_1 = \begin{array}{|ccccc|c} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & \\ \hline 119{,}98 & 0 & -119{,}98 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & -0{,}3 & -2{,}25 & 5 \\ -119{,}98 & 0 & 119{,}98 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0{,}3 & 0 & 0{,}3 & 2{,}25 & 2 \\ 0 & -2{,}25 & 0 & 2{,}25 & 16{,}876 & 3 \end{array} \cdot 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}05554 \\ -0{,}30998 \\ -1{,}9041 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \cdot 10^{-4}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 \\ -7{,}2 \\ 0 \\ 7{,}2 \\ -18 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -6{,}66 \\ -2{,}94 \\ 6{,}665 \\ 2{,}94 \\ -14{,}83 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

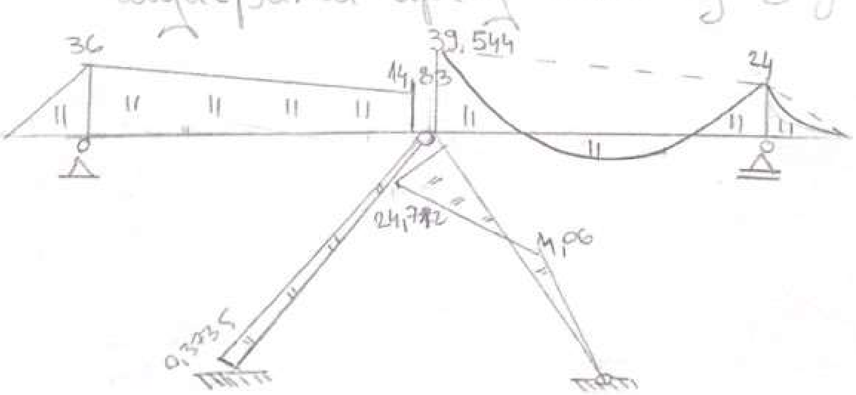
$$R_2=\hat{K}_2 q_2^* - Q_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 2 & 3 & 11 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0,3 & 2,25 & -0,3 \\ 2,25 & 16,875 & -2,25 \\ -0,3 & -2,25 & 0,3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,30998 \\ -1,9041 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -51,45 \\ -72,375 \\ -38,55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47,073 \\ 39,544 \\ 42,927 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{matrix}$$

$$R_3=\hat{K}_3 \cdot q_3^* = \begin{array}{c} \begin{matrix} 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 91,01 & 77,82 & 0 & -91,01 & -77,82 \\ -0,194 & 0,226 & 1,375 & 0,194 & -0,226 \\ -0,893 & 1,045 & 6,335 & 0,893 & -1,045 \\ -91,01 & -77,82 & 0 & 91,01 & 77,82 \\ 0,194 & -0,226 & -1,375 & -0,194 & 0,226 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,05554 \\ -0,30998 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26,3 \\ 0,081 \\ 0,3735 \\ -26,3 \\ -0,0809 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

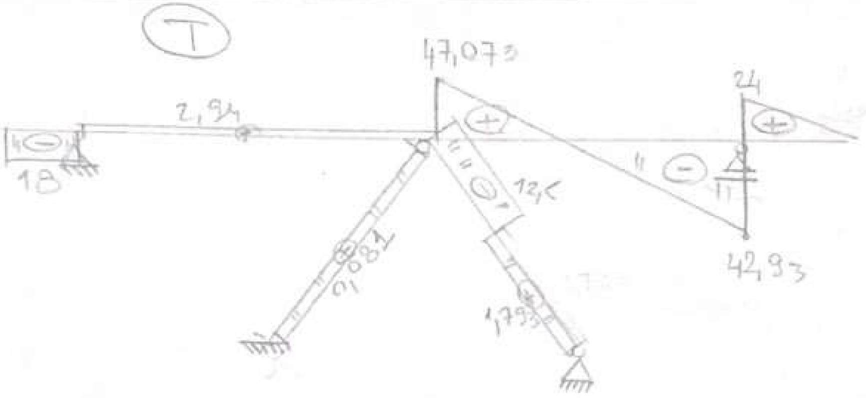
$$R_4=\hat{K}_4 \cdot q_4^* - Q_4 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 91,01 & -77,82 & 0 & -91,01 & 77,82 \\ 0,194 & 0,226 & 1,375 & -0,194 & -0,226 \\ 0,893 & 1,045 & 6,335 & -0,893 & -1,045 \\ -91,01 & 77,82 & 0 & 91,01 & -77,82 \\ -0,194 & -0,226 & -1,375 & 0,194 & 0,226 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,05554 \\ -0,30998 \\ -1,9041 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

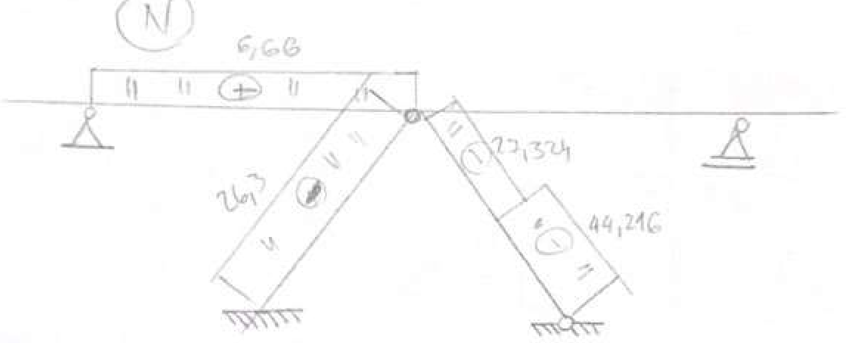
$$- \begin{bmatrix} 8,36 \\ 9,83 \\ 12,375 \\ 8,36 \\ 4,47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27,324 \\ -12,507 \\ -24,712 \\ -44,216 \\ -1,793 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Дијаграми пресј сила од задатог опт



M


T
47,073
24
2,94
18
12,5
0,881
1,793
42,93


N
6,66
27,324
26,3
44,216

② Температурна промјена

$E = 3\cdot10^7\,kN/m^2$ УСЉИЈЕД ТЕМП. ПРОМЈ. ЈАВЉАЈУ СЕ САМО НОРМАЛНЕ СИЛЕ

$t = 24^\circ C$

$\alpha_t = 10^{-5}\frac{1}{^\circ C}$

$$Q_1 = -EF\alpha_t\cdot t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$Q_1^* = T_1^T\cdot Q_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&0&4\\0&1&0&0&0&5\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&2\\0&0&0&0&1&3\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}-EF\alpha_t t\\0\\EF\alpha_t t\\0\\0\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c}-2160&4\\0&5\\2160&1\\0&2\\0&3\end{array}\right]$$

$EF\alpha_t t = 90\cancel{10^5}\cdot\frac{1}{\cancel{10^5}}\cdot 24 = 2160$

$$S_n^* = \left[\begin{array}{c|c}2160&1\\0&2\\0&3\end{array}\right] \qquad S^* = Q^* + \overset{0}{\cancel{P^*}}$$

$k^*\cdot q^* = S^*$ 0 НЕМА ЗАДАТИХ ПОМЈЕРАЊА

$K_{nn}^* q_u^* = S_u^* \quad K_{nn}^* q_n^* + K_{np}^* \cancel{\Delta_p^*} = S_n^*$

$q_u^* = K_{nn}^{*-1}\cdot S_u^*$

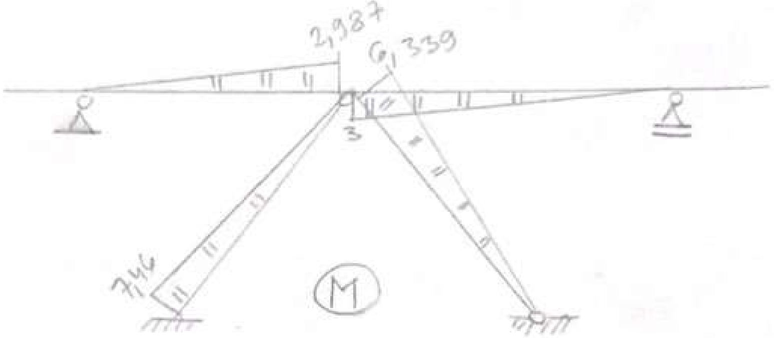
$$q_u^* = \left[\begin{array}{c|c}-8,355&1\\0&2\\-0,178&3\end{array}\right]$$

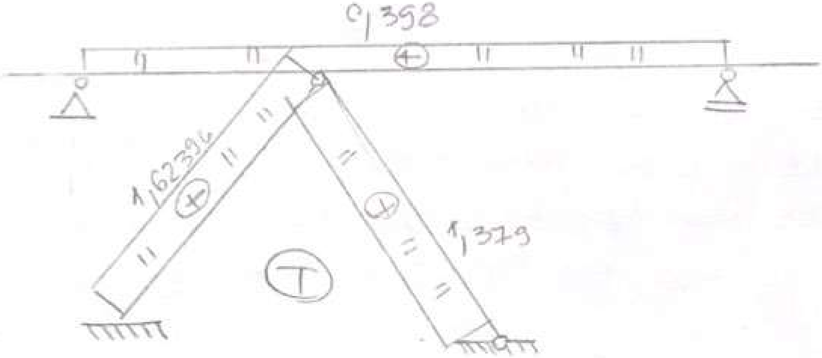
Силе на крајевима штапова

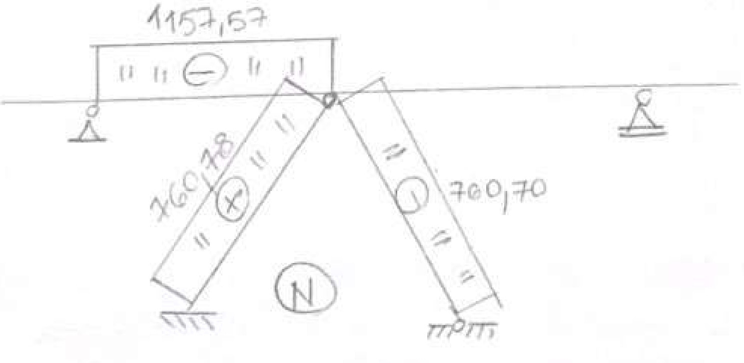
$$R_i = \hat{k}_i\, q_i^* - Q_i \qquad R_2 = \hat{k}_2\, q_2^* - \overset{0}{\cancel{Q_2}}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix}-1002,42\\0,398\\1002,42\\-0,398\\-2,987\end{bmatrix} - \left[\begin{array}{c|c}-2160&4\\0&5\\2160&1\\0&2\\0&3\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}1157,57&4\\0,398&5\\-1157,57&1\\-0,398&2\\-2,987&3\end{array}\right] \qquad R_2 = \left[\begin{array}{c|c}-0,4&2\\-3&3\\0,4&11\end{array}\right]$$

$$R_3 = \begin{array}{cc}\begin{bmatrix} -760,78 \\ 1,62396 \\ 7,46 \\ 760,78 \\ -1,619 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\end{array} \qquad R_4 = \begin{array}{cc}\begin{bmatrix} 760,79 \\ 1,379 \\ 6,339 \\ -760,79 \\ -1,379 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}\end{array}$$







ПОМЈЕРАЊЕ ОСЛОНАЦА

$$K_{nn}^* q_n^* + K_{np}^* q_p^* = \overset{\nearrow 0}{\cancel{S_n^*}}$$

$$q_n^* = K_{nn}^{*-1}\left(-K_{np}^* q_p^*\right)$$

$$K^* = \begin{array}{c|cccccccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \\
\hline
\multicolumn{3}{c|}{K_{nn}^*} & \multicolumn{8}{c|}{K_{np}^*} & 1,2,3 \\
\hline
\multicolumn{3}{c|}{K_{pn}^*} & \multicolumn{8}{c|}{K_{pp}^*} & 4,5,6,7,8,9,10,11
\end{array}$$

$$K_{np}^* = \begin{array}{cccccccc|c}
4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \\
\hline
K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} & K_{19} & K_{1\,10} & K_{1\,11} & 1 \\
K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} & K_{29} & K_{2\,10} & K_{2\,11} & 2 \\
K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} & K_{39} & K_{3\,10} & K_{3\,11} & 3
\end{array}$$

$$q_p^* = \begin{array}{c|c}
0 & 4 \\
-0{,}02 & 5 \\
0 & 6 \\
0 & 7 \\
0 & 8 \\
0 & 9 \\
0 & 10 \\
0 & 11
\end{array}$$

НЕ МОРАМО ОДРЕЂИВАТИ СВЕ ЧЛАНОВЕ МАТРИЦЕ K_{np}^* ВЕЋ САМО КОЛОНУ 5 ЈЕР СМО ИМАЛИ ПОМЈЕРАЊЕ q_5 задато И СА ЊИМ ЋЕМО МНОЖИТИ ДАТУ КОЛОНУ

ПОМЈЕРАЊЕ ОСЛОНАЦА

$$K_{nn}^* q_n^* + K_{np}^* q_p^* = \overset{\nearrow 0}{\cancel{S_n^*}}$$

$$q_u^* = K_{nn}^{*-1}\left(-K_{np}^* q_p^*\right)$$

$$K_{nn}^* = \begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc} 258{,}548 & 0 & 0{,}849 \\ 0 & 102{,}12 & 5{,}545 \\ 0{,}849 & 5{,}545 & 40{,}087 \end{array}\right]\end{array}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \cdot 10^4$$

$q_p^* = -0{,}02$ – ЗАДАТО ПОМЈЕРАЊЕ

$$K_{np}^* = \left[\begin{array}{c} -59 \\ -50{,}76 \\ 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \cdot 10^4 \qquad -K_{np}^* \cdot q_p^* = \left[\begin{array}{c} -1{,}18 \\ -1{,}015 \\ 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

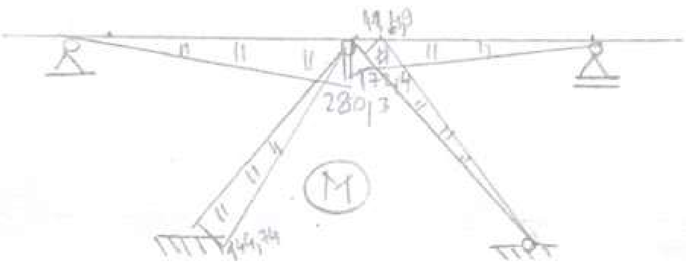
$$q_u^* = \left[\begin{array}{c} -4{,}569 \cdot 10^{-3} \\ -1 \cdot 10^{-2} \\ 1{,}483 \cdot 10^{-3} \end{array}\right]\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\left[\begin{array}{c} -45{,}69 \\ -100 \\ -14{,}83 \end{array}\right] \cdot 10^{-4}$$

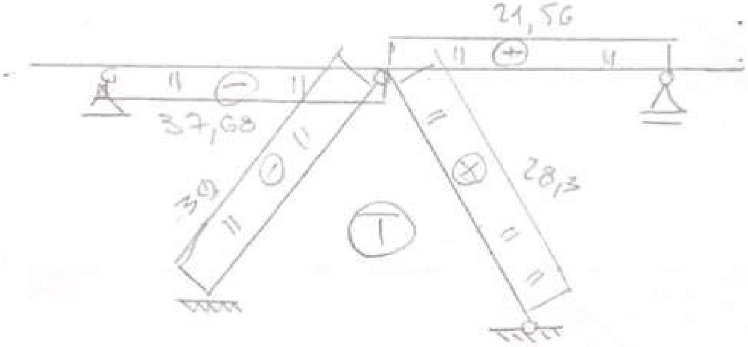
силе на крајевима штапова

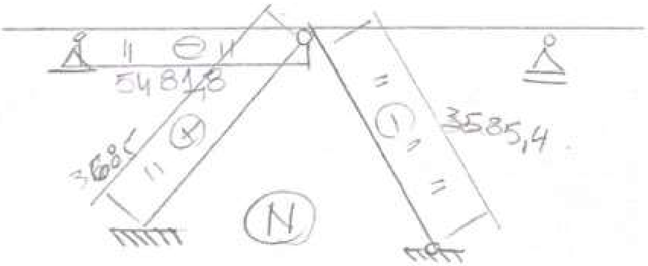
$$R_i = \hat{k}_i \cdot q_i^* - \overset{\nearrow 0}{\cancel{Q_i}}$$

$$R_1 = \left[\begin{array}{c} 5481{,}88 \\ -37{,}67 \\ -5481{,}89 \\ +37{,}67 \\ -280{,}3 \end{array}\right]\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \qquad R_2 = \left[\begin{array}{c} 21{,}56 \\ -172{,}3 \\ -21{,}56 \end{array}\right]\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 11 \end{array} \qquad R_3 = \left[\begin{array}{c} -3685 \\ -30 \\ -144{,}7 \\ 3685 \\ 30 \end{array}\right]\begin{array}{c} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

$$R_4 = \left[\begin{array}{c} 3585{,}4 \\ 28{,}3 \\ 114{,}2 \\ -3585{,}4 \\ -28{,}3 \end{array}\right]\begin{array}{c} 1 \\ 7 \\ 3 \\ 9 \\ 10 \end{array}$$


11,89
172,4
280,3
144,74
M


21,56
37,68
39
28,3
T


5481,8
3685
3585,4
N