HARMONIJSKA ANALIZA APERIODIČNIH SIGNALA

1. Pronaći spektralnu gustinu amplituda i faza signala opisanog funkcijom:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau/2 \\ E, & -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0, & \tau/2 < t < \infty \end{cases}$$

Na osnovu dobijenog rezultata pronaći spektralnu gustinu amplituda kada:
a) $\tau \rightarrow 0 \; i \; E\tau \rightarrow 1$; b) $\tau \rightarrow \infty$.

Rešenje:

Spektar aperiodičnih siganala anliziramo pomoću Furijeove transformacije:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\theta(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$|F(j\omega)|$ naziva se spektralnom gustinom amplituda, a $\theta(\omega)$ spektralnom gustinom faza.

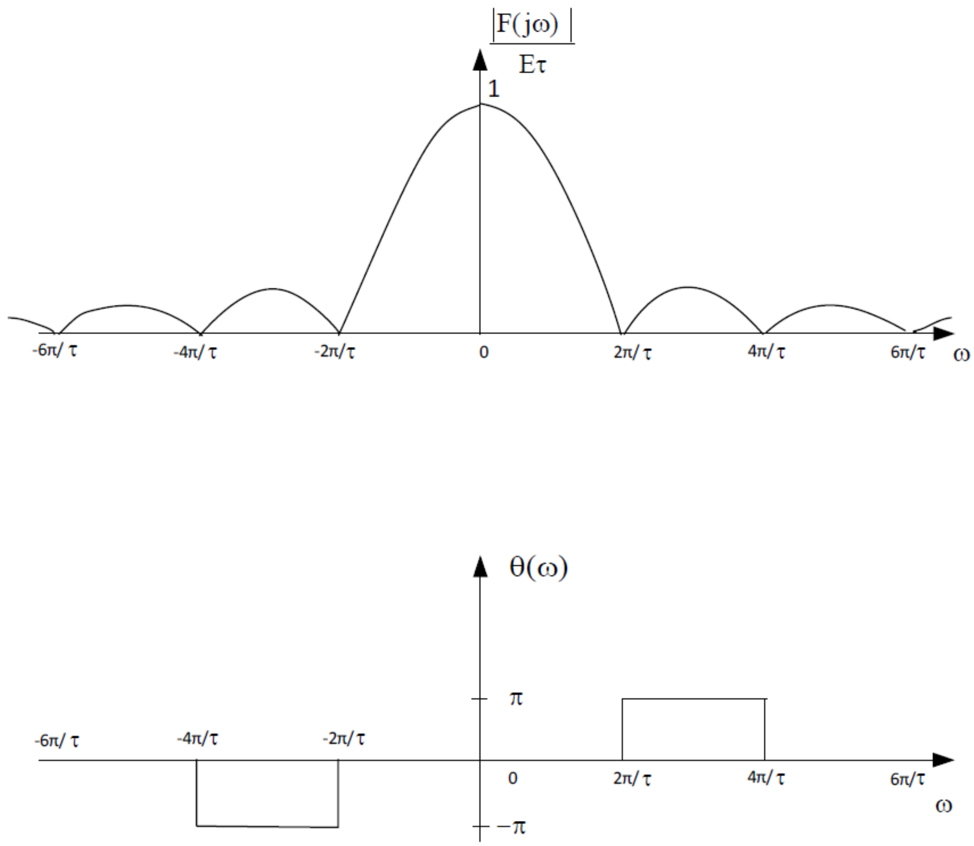
Za dati signal:

$$F(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \mathrm{E}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{dt} = 2\mathrm{E}\int_{0}^{\infty} \cos\omega \mathrm{tdt} = \mathrm{E}\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

Spektralne gustine amplituda i faza ovog signala su:

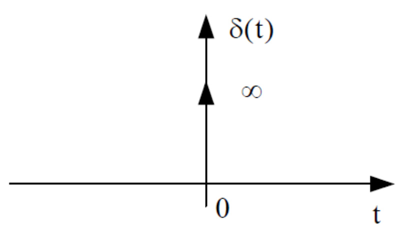
$$|F(j\omega)| = E\tau\left|\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\right|$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0, & \dfrac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} > 0 \\ \pm\pi, & \dfrac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} < 0 \end{cases}$$



Slika 1. Spektralna gustina amplutda (gore) i spektralna gustina faza (dolje) signala f(t).

a) Kako u ovom slučaju $E\tau \to 1$, to se, kada $\tau \to 0$, pravougaoni impuls svodi na Dirakov impuls u koordinatnom početku ($\delta(t) = \lim_{\tau\to 0} f(t)$).

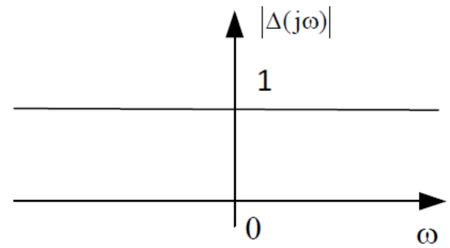


Slika 2: Dirakov impuls.

Furijeova transformacija Dirakovog impulsa:

$$\Delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-j\omega t} dt = 1$$

Spektralna gustina amplituda Dirakovog impulsa sa slike 2 prikazana je na slici 3.



Slika 3: Spektralna gustina amplituda Dirakovog impulsa.

Inverzna Furijeova transformacija kompleksnog spektra $F(j\omega)$ jednaka je signalu f(t);

$$\mathrm{f(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F(j}\omega\mathrm{)e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\mathrm{d}\omega$$

Stoga, važi:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega t \ \mathrm{d}\omega$$

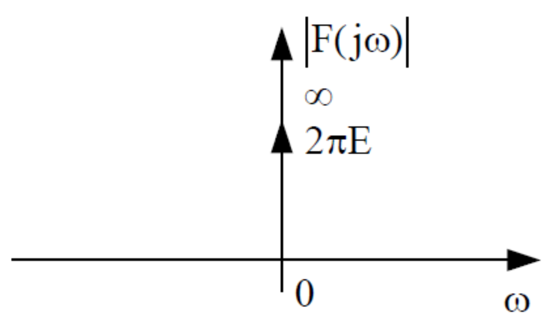
b) U ovom slučaju, pošto $\tau \to \infty$ jedan pravougaoni impuls se transformiše u signal konstante vrijednosti E. Furijeova transformacija ovog signala je:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Ee^{-jot}dt = E\int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega t dt$$

Odnosno:

$$F(j\omega) = 2\pi \mathrm{E}\delta(\omega)$$

Dakle, spektralna gustina amplituda konstantnog signala je Dirakov impuls u koordinatnom početku, površine 2πE, a prikazana je na sl. 4.



Slika 4. Spektralna gustina amplituda signala f(t)=E.

2. Pronaći spektar signala datog izrazom:

$$f(t)=\begin{cases}0\ ,\ t<0\\ e^{-at}\ ,\ t\geq 0;\ a>0\end{cases}$$

a osnovu dobijenog rezultata pronaći spektar signala opisanog Hevisajdovom funkcijom.

Rešenje:

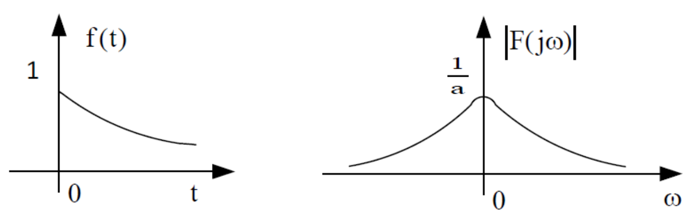
Spektar signala f(t) je:

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{a+j\omega}$$

Spektralna gustina amplituda signala f(t) je:

$$|F(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

i prikazana je na slici 5 (desno).



Slika 5. Signal f(t) (lijevo) i njegova spektralna gustina amplituda (desno).

Hevisajdova funkcija može se predstaviti preko signala f(t) na sledeći način:

$$\mathrm{x_H(t)}=\lim_{\mathrm{a}\to 0}[\mathrm{f(t)}]$$

Spektar ove funkcije je:

$$\mathrm{X_H}(\mathrm{j}\omega)=lim[\mathrm{F}(\mathrm{j}\omega)]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

Iz prethodnog izraza vidi se da spektar $\mathrm{X_H}(\mathrm{j}\omega)$ nije definisan za $\omega=0$. Vrijednost $\mathrm{X_H}(\mathrm{j}\omega)$ za ω=0 može se pronaći tako što ćemo Hevisajdovu funkciju predstaviti sumom parne funkcije $f_p(t)$ i neparne funkcije $f_n(t)$, koje su prikazane na sl. 6a) i 6b), respektivno.

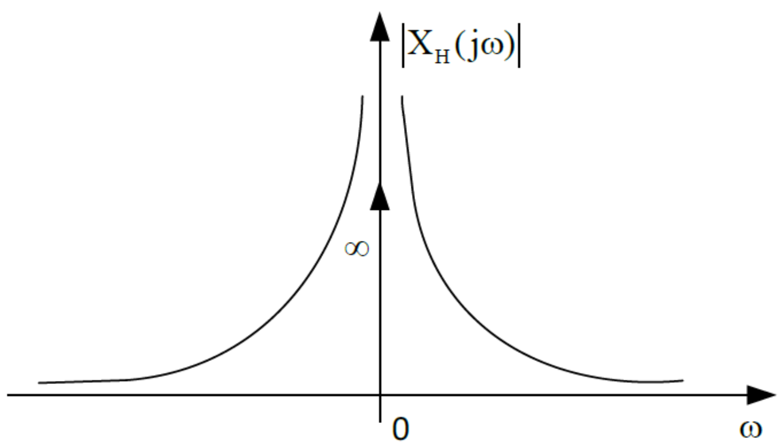
Slika 6. Funkcije čija suma čini Hevisajdovu funkciju.

Jednosmjernu komponentu u spektru Hevisajdove funkcije jednaka je jednosmjernoj komponenti funkcije $f_p(t)$. Za funkciju $f_p(t)$ važi:

$$\mathrm{F_p}(\mathrm{j}\omega) = \pi\delta(\omega)$$

Stoga možemo zaključiti:

$$X_H(j\omega) = \begin{cases} \pi\delta(\omega), & \omega = 0 \\ \dfrac{1}{j\omega}, & \omega \neq 0 \end{cases}$$



Slika 7. Spektralna gustina amplituda Hevisajdova funkcije.

3. Pronaći spektar signala f(t) definisanog na sledeći način:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau/2 \\ E\cos\omega_0 t, & -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0, & \tau/2 < t < \infty \end{cases}$$

Naći spektralnu gustinu amplituda ovog signala kada je:
a) $\omega_0 >> 2\pi/\tau;$ b) $\tau \to \infty$.

Rešenje:

Signal f(t) može se napisati u obliku:

$$f(t) = f_\tau(t)\cos\omega_0 t$$

gdje je $f_\tau(t)$ pravougaoni impuls trajanja τ i amplitude E. Furijeova transformacija signala $f(t)$ je:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_\tau(t)\cos\omega_0 t e^{-j\omega t}dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f_\tau(t)\left[e^{-j(\omega-\omega_0)t} + e^{-j(\omega+\omega_0)t}\right]dt$$

Ako sa $\mathrm{F}_\tau(\mathrm{j}\omega)$ označimo Furijeovu transformaciju signala $f_\tau(t)$, tada prethodni izraz glasi:

$$\mathrm{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2}\mathrm{F}_\tau[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)] + \frac{1}{2}\mathrm{F}_\tau[\mathrm{j}(\omega+\omega_0)]$$

Kako je Furijeova transformacija implulsa $f_\tau(t)$:

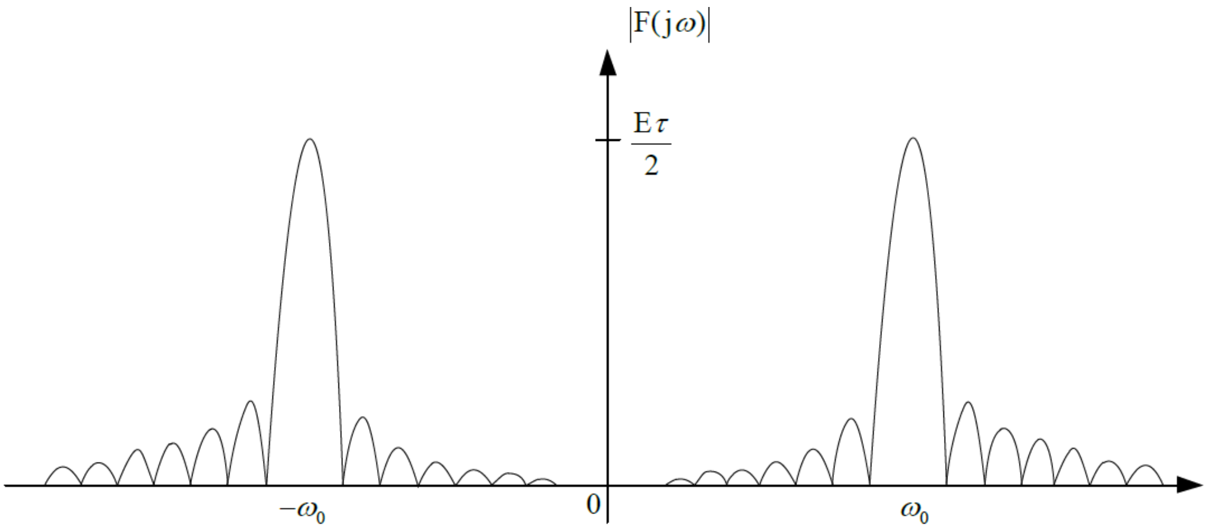
$$\mathrm{F}_\tau(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{E}\tau\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

to je:

$$F(j\omega) = \frac{E\tau}{2}\left\{\frac{\sin[(\omega-\omega_0)\tau/2]}{(\omega-\omega_0)\tau/2} + \frac{\sin[(\omega+\omega_0)\tau/2]}{(\omega+\omega_0)\tau/2}\right\}$$

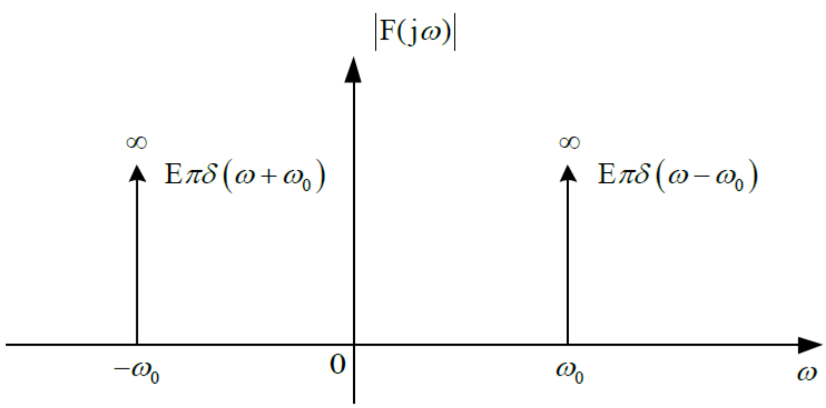
a) Iz osobina spektra jednog impulsa i uslova $\omega_0 >> 2\pi/\tau$, proizilazi da se može približno pisati:

$$F(j\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \mathrm{E}\tau \dfrac{\sin\left[\dfrac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}\right]}{\dfrac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}}, & \omega < 0 \\ \dfrac{1}{2} \mathrm{E}\tau \dfrac{\sin\left[\dfrac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\right]}{\dfrac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}}, & \omega > 0 \end{cases}$$



Slika 8: Spektralna gustina amplituda signala f(t).

b) $F(j\omega) = E\pi\delta(\omega - \omega_0) + E\pi\delta(\omega + \omega_0)$



Sl.3

Slika 9: Spektralna gustina amplituda signala f(t).

4. Ako spektar signala f(t) zauzima opseg učestanosti od $-f_m$ do f_m, odrediti opseg učestanosti koji zauzima spektar signala $f^2(t)$.

Rešenje:

Spektar signala $f^2(t)$ može se odrediti primjenom teoreme o konvoluciji, koja glasi:

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f^2(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\nu)F[j(\omega-\nu)]d\nu$$

gdje je:

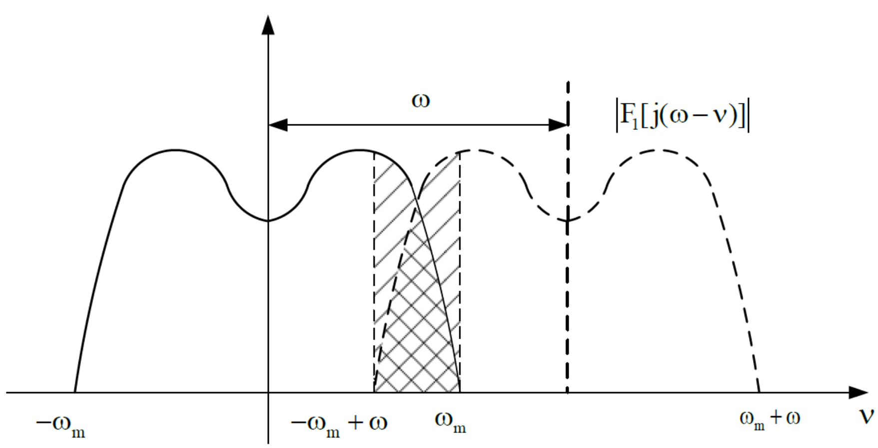
$$F(j\nu) = \begin{cases} F(j\nu), & |\nu| \leq \omega_\mathrm{m} \\ 0, & |\nu| > \omega_\mathrm{m} \end{cases} \text{ i } F[\mathrm{j}(\omega-\nu)] = \begin{cases} \mathrm{F}[\mathrm{j}(\omega-\nu)], & |\omega-\nu| \leq \omega_\mathrm{m} \\ 0, & |\omega-\nu| > \omega_\mathrm{m} \end{cases}$$

Za pretpostavljeni oblik spectra $F(j\nu)$ sa slike 10 (puna linija), na istoj slici je nacrtan i spektar $F[j(\omega-\nu)]$ (isprekidana linija), za $\omega > 0$.

Sa slike se lako može ustanoviti u kom opsegu ω $F(j\omega)$ nije jedanako nuli. To će biti zadovoljeno ako je:

$$\omega - \omega_\mathrm{m} \leq \omega_\mathrm{m}, \text{ za } \omega > 0 \text{ i}$$

$$\omega + \omega_\mathrm{m} \geq -\omega_\mathrm{m}, \text{ za } \omega < 0$$



Slika 10. Spektar $F(j\nu)$ $(puna\ linija)$ i $F[j(\omega-\nu)]$ (isprekidana linija).

Možemo zaključiti da je:

$$F(j\omega) = \begin{cases} F(j\omega), & -2\omega_m \leq \omega \leq 2\omega_m \\ 0, & |\omega| > 2\omega_\mathrm{m} \end{cases}$$

5. (Za vježbu) Signali $g(t)$ i $f(t)$ su ograničenog opsega,

$$G(j\omega) = \begin{cases} G(j\omega), & |\omega| \leq \omega_g \\ 0, & |\omega| > \omega_g \end{cases} \text{ i } F(j\omega) = \begin{cases} F(j\omega), & |\omega| \leq \omega_f \\ 0, & |\omega| > \omega_f \end{cases}$$

Odrediti maksimalnu učestanost signala $y(t) = g(t) \cdot f(t)$.