Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prof.dr Igor Radusinović

igorr@ucg.ac.me

Prof.dr Enis Kočan

enisk@ucg.ac.me

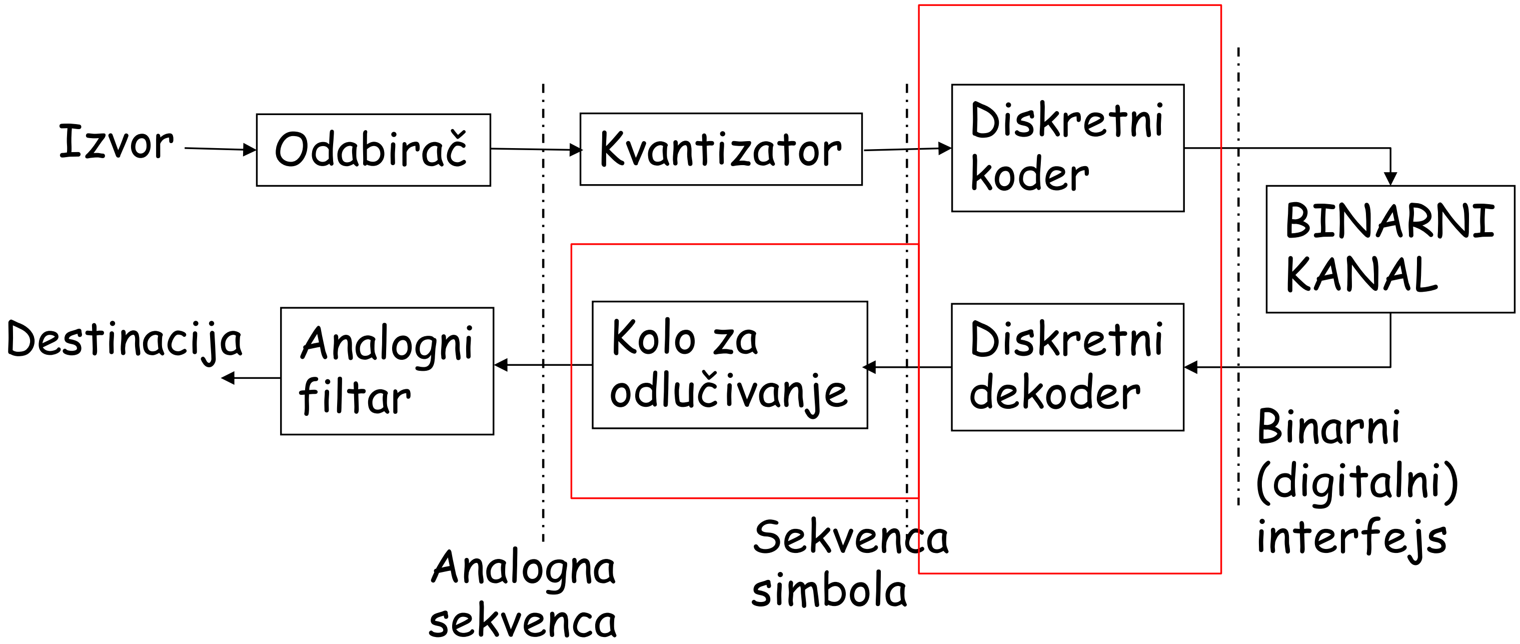
dr Slavica Tomović

slavicat@ucg.ac.me

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

- Oblici digitalnih signala
- Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu učestanosti
- Intersimbolska interferencija
- Prenos bez ISI u realnim sistemima
- Nyquistov kriterijumi
- Prenos signala kroz realne kanale i dijagram oka
- Transferzalni filtar

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu



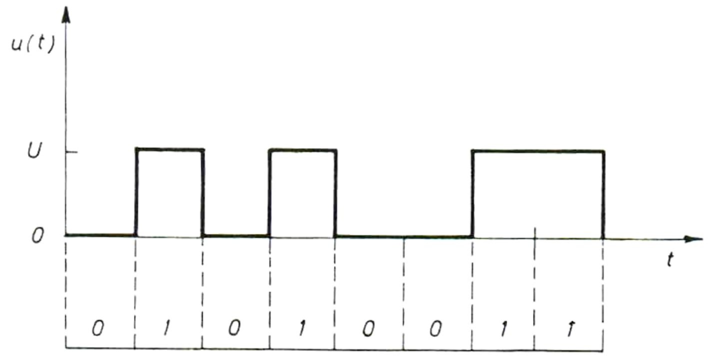
Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Oblici digitalnih signala

Unipolarni binarni signal bez povratka na nulu

- *Non Return to Zero* (NRZ)
- Dvije moguće vrijednosti
  - O (numeriše se sa 0)
  - Neka vijednost različita od 0 (numeriše se sa 1)
- Ovim signalom se prenosi i jednosmjerna komponenta

Kolika je srednja vrijednost NRZ signala?



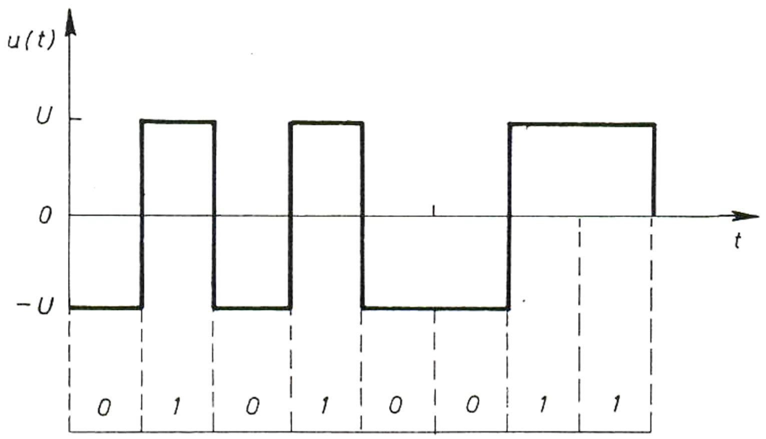
Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Oblici digitalnih signala

Polarni binarni signal

- Dvije moguće vrijednosti
  - -U (numeriše se sa 0)
  - U (numeriše se sa 1)

Prenosi li se ovim signalom jednosmjerna komponenta?

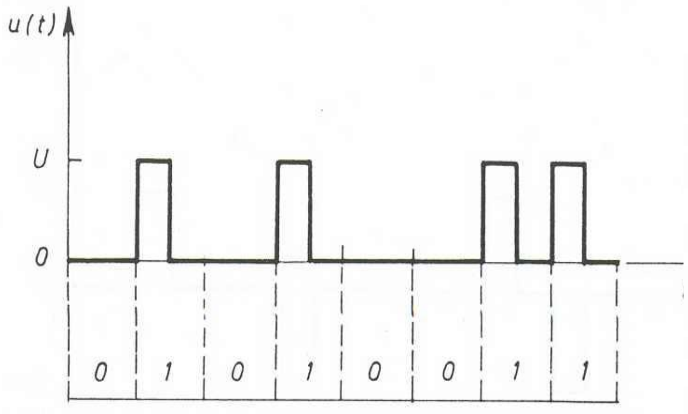


Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

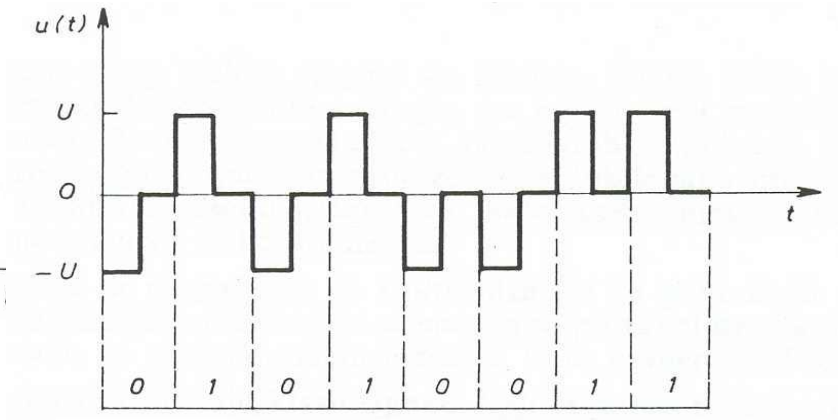
Oblici digitalnih signala

Binarni signal sa povratkom na nulu

- *Return to Zero* (RZ)
- Unipolarni ("1" traje T/2, "0" odgovara napon 0)
- Polarni ("1" i "0" traju po T/2, "1" odgovara U, "0" odgovara -U



Unipolarni signal sa povratkom na nulu



Polarni signal sa povratkom na nulu

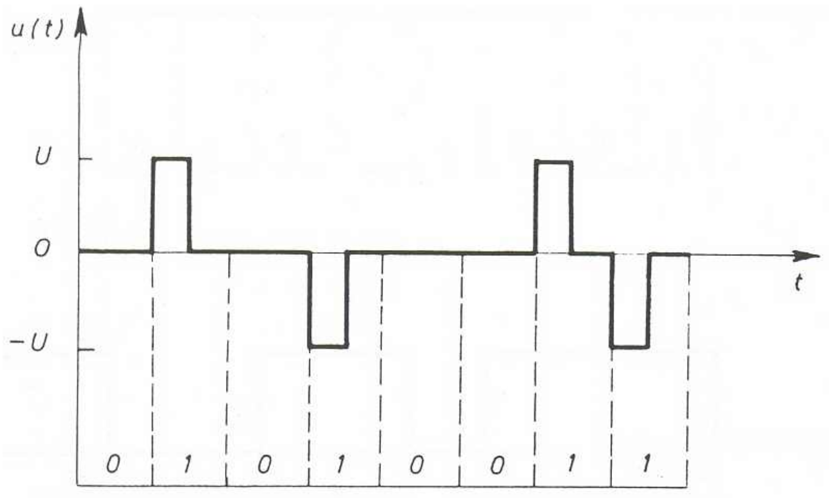
Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Oblici digitalnih signala

Bipolarni signal

- Dobija se od unipolarnog (RZ ili NRZ) signala
- Svakoj drugoj "1" se mijenja vrijednost
- Značajni parametar uzima jednu od tri moguće vrijednosti (+U, -U, 0)

Ima li ovaj signal jednosmjernu komponentu?



Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Oblici digitalnih signala

Diferencijalno kodirani binarni signal

- Binarni signal sa diferencijalnim kodiranjem
- Prvi bit se uzima proizvoljno
- Svakoj "0" originalnog signala odgovara promijenjeno stanje iz prethodnog signalizacionog intervala
- Svakoj "1" originalnog signala odgovara nepromijenjeno stanje iz prethodnog signalizacionog intervala
- Diferenecijalnim kodiranjem se postiže veća koncetracija snage digitalnog signala u jednom opsegu

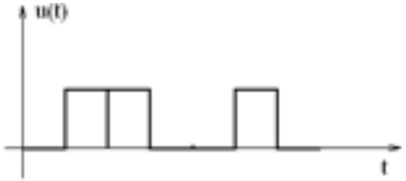
Originalni binarni niz: 0 1 1 0 0 1 0

Diferencijalno kodiran binarni niz: 1 0 0 0 1 0 0 1

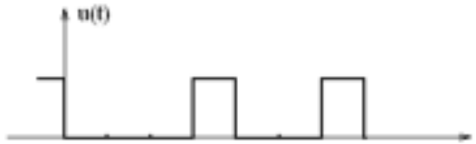
bira se proizvoljno, ne nosi nikakvu poruku

"0" znači promjenu u odnosu na prethodno stanje

"1" znači nepromijenjeno stanje u odnosu na prethodno



originalni binarni niz



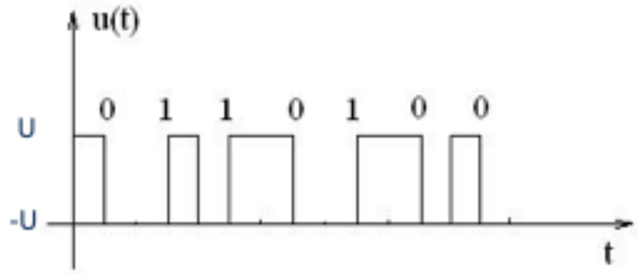
Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Oblici digitalnih signala

Mančester kodirani binarni signal

- "1" originalnog signala se predstavlja pozitivnom tranzicijom na sredini signalizacionog intervala u kodiranom signalu,
- "0" originalnog signala se predstavlja negativnom tranzicijom na sredini signalizacionog intervala.
- Tamo gdje se javljaju dva ista binarna elementa jedan do drugog (kombinacija 00 ili 11) u kodiranom signalu se dodaje nova tranzicija na granici ta dva značajna intervala (ona ne nosi nikakvu informaciju).

Primjer *Manchester* kodiranog signala:
Originalni signal: 0 1 1 0 1 0 0
Kodirani signal je prikazan na slici.

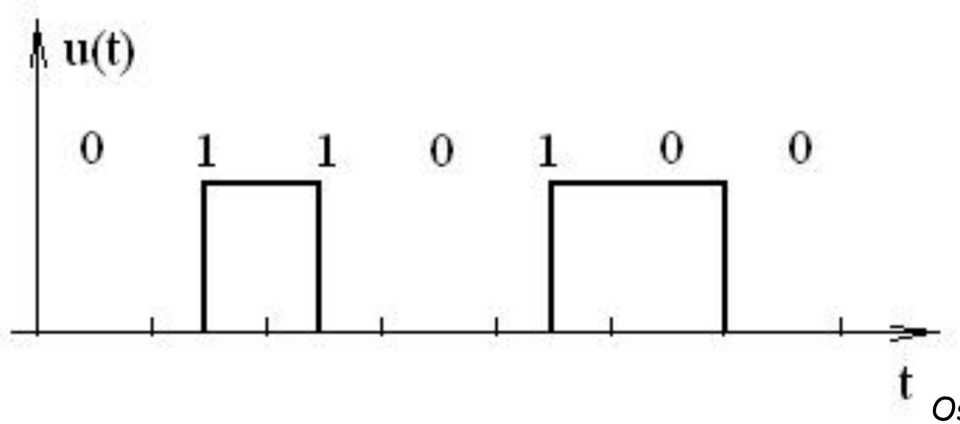


Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Oblici digitalnih signala

Milerov kodirani binarni signal

- "1" je predstavljena tranzicijom na sredini signalizacionog intervala
- "0" nema tranzicije.
- U slučaju dvije "0" koje se prenose jedna za drugom uvodi se tranzicija između ta dva intervala koja ne nosi nikakvu poruku.
- Dvije uzastopne "1" podrazumijevaju jednu pozitivnu jednu negativnu tranziciju.

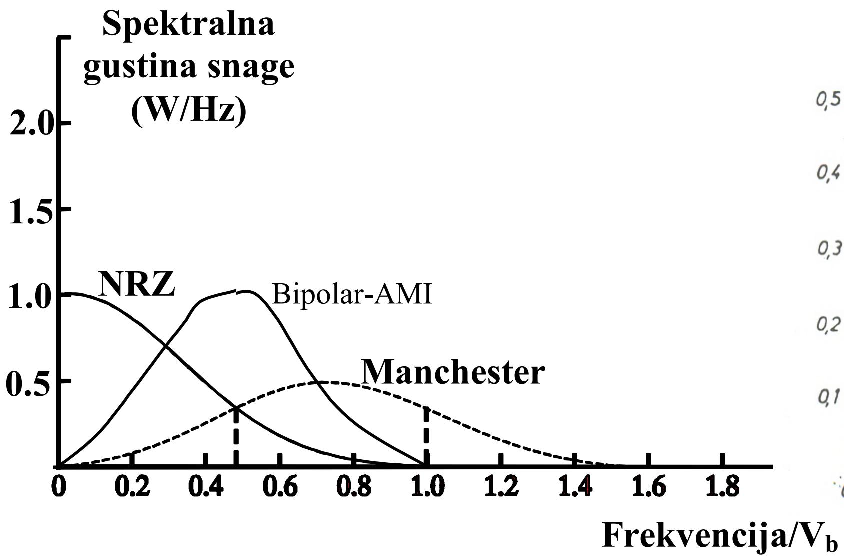


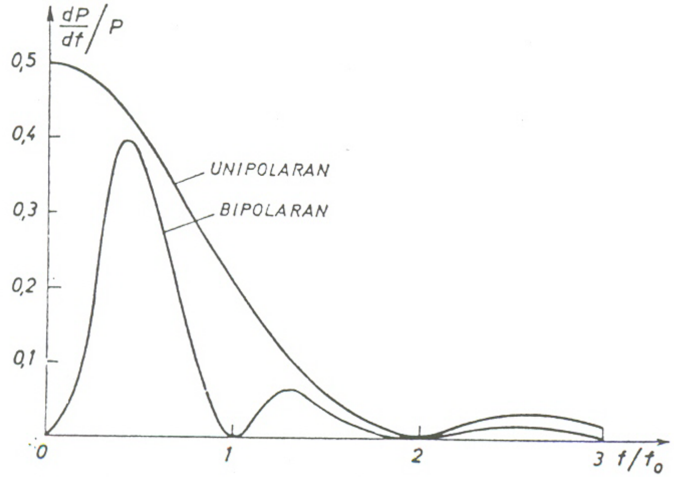
Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Oblici digitalnih signala

Kodiranjem se

- oblikuje spektar signala prema sistemu za prenos u cilju koncentrisanja spektra snage,
- ostvaruje određeni stepen sinhronizacije predajnika i prijemnika.





Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

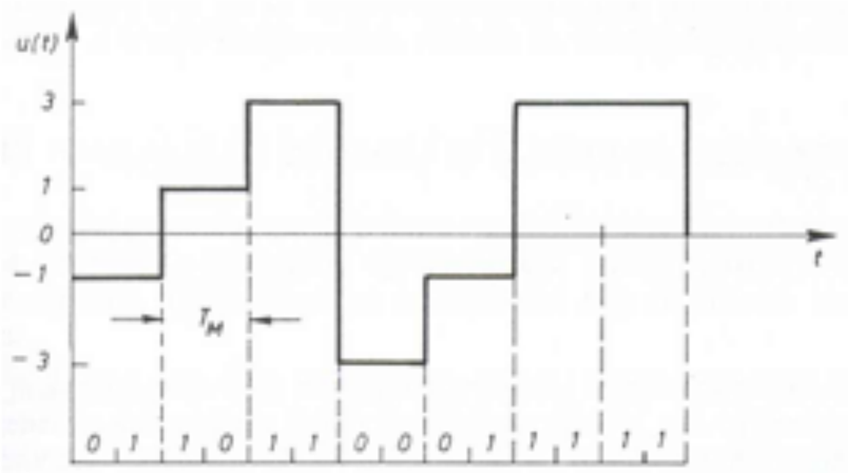
Oblici digitalnih signala

M-arni digitalni signal

- Značajni parametar M-arnog signala može da ima jednu od M mogućih vrijednosti koje odgovaraju određenim naponskim stanjima.
- Ako se M različitih stanja predstavlja kao kombinacija n binarnih elemenata, važi sledeće: $n=\log_2 M$

−3 —> 00
−1 —> 01
1 —> 10
3 —> 11

M=4

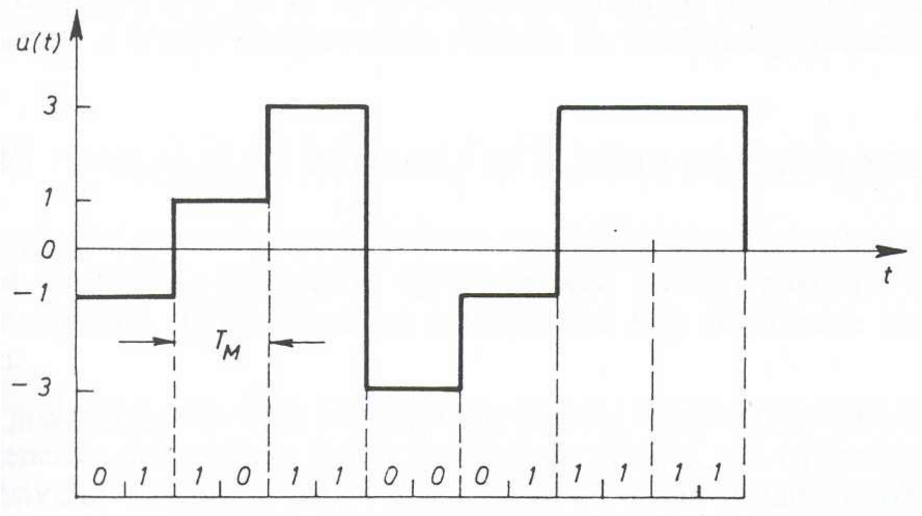


Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Oblici digitalnih signala

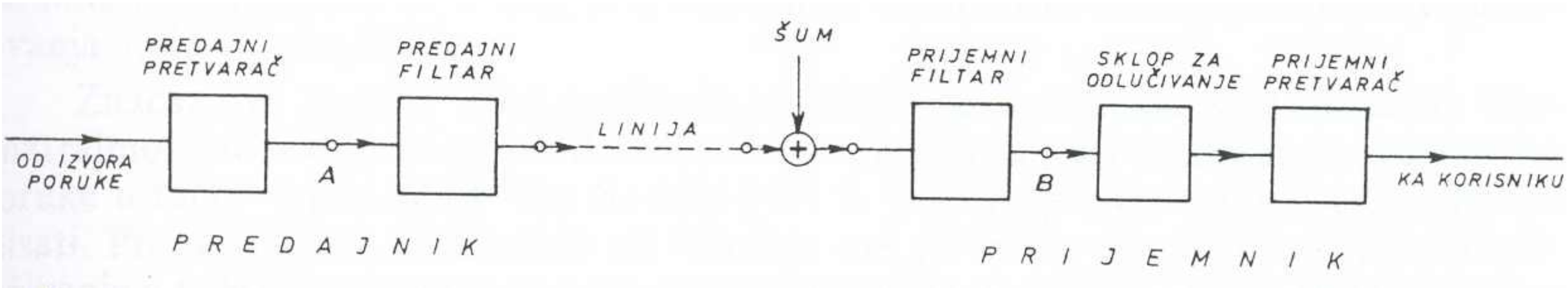
M-arni digitalni signal

- M-arni digitalni protok se izražava brojem M-arnih digita u sekundi.
- Za svaki M-arni signal može da se definiše ekvivalentni binarni signal, pa time i ekvivalentni binarni protok.
- Ako je T_M vrijeme trajanja signalizacionog intervala
  - Digitalni protok M-arnog signala će iznositi $1/T_M$
  - Ekvivalentni binarni protok je $1/T_b = n/T_M = (1/T_M) \log_2 M$
  - Digitalni protok se često naziva brzinom signaliziranje i izražava se u baudima



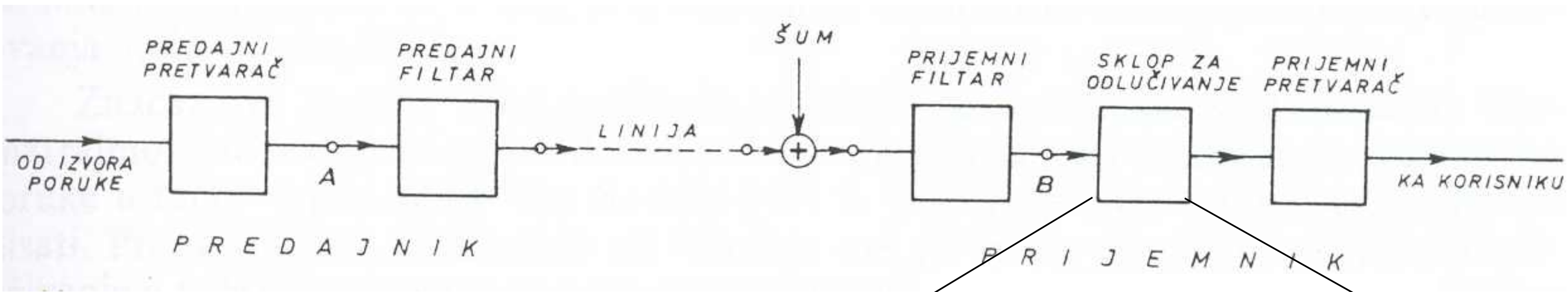
Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

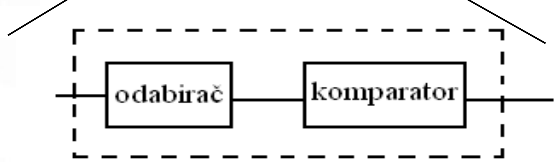
- Digitalni signal na izlazu iz pretvarača poruke u signal se nalazi u osnovnom opsegu učestanosti
- Ukoliko se ne pribjegne obradi ovog signala kojom bi se njegov spektar translirao u neki drugi opseg odnosno on se prenosi direktno preko prenosnog puta onda se radi o prenosu u osnovnom opsegu učestanosti
- Sistemi prenosa u osnovnom opsegu su jednostavni

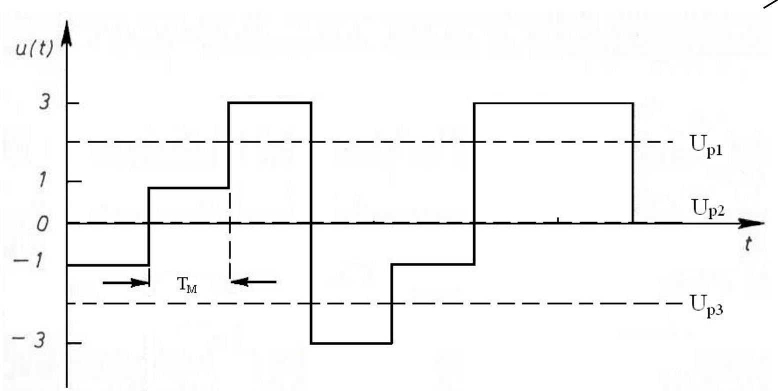


Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

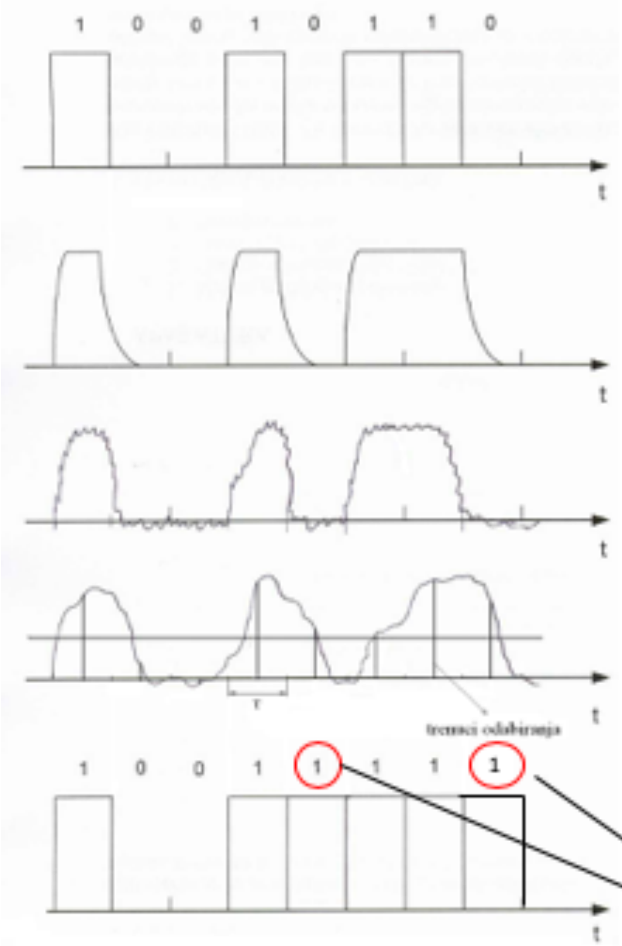
- Sklop za odlučivanje uzima odbirke koji se upoređuju sa pragom
- U slučaju binarnog signala postoji jedan prag, dok kod M-arnog signala postoji M-1 prag
- Vrijednosti pragova se biraju zavisno od statistika pojavljivanja simbola







Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu



Signal na izlazu iz predajnog pretvarača-digitalni signal.

Prolaskom kroz predajni filtar dolazi do izobličenja signala

Na liniji veze se signalu superponira šum

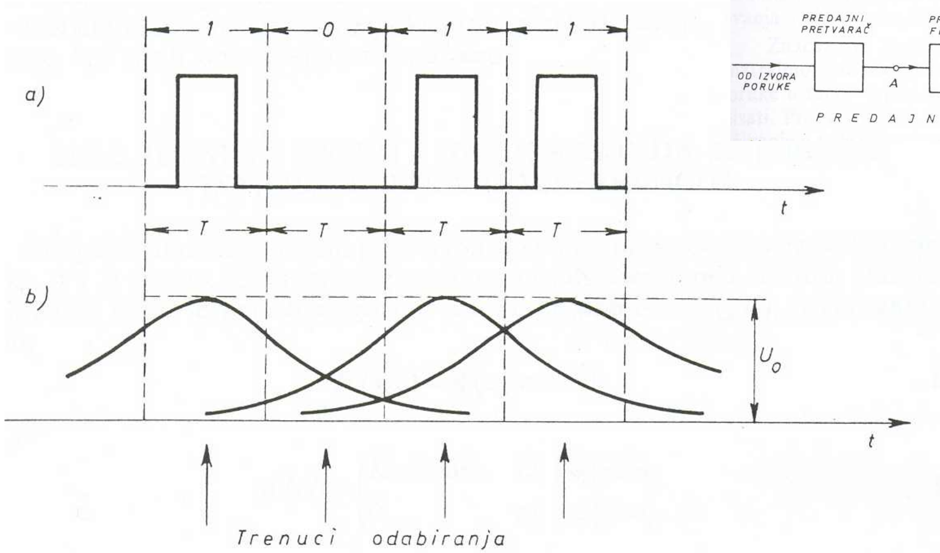
Prolaskom kroz prijemni filtar šum se ograničava (uskopojasni šum).
Ovaj signal dolazi na sklop za odlučivanje i na osnovu odbiraka (uzetih u sredini signalizacionog intervala) regeneriše se signal.

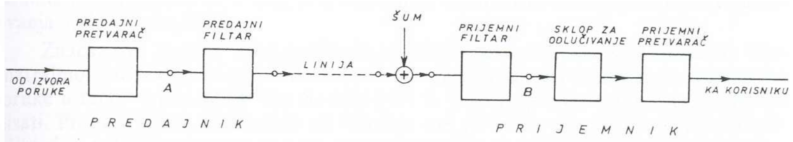
Signal na izlazu prijemnika, sa greškama koje su se desile u prenosu.

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Intersimbolska interferencija (ISI)

- Digitalni signal u osnovnom opsegu učestanosti sadrži pravougaone impulse što znači da ima beskonačni opseg
- Predajni filter, prenosni medijum i prijemni filter imaju karakteristike filtara propusnika niskih učestanosti tako da se okomite ivice impulse deformišu, impulsi se šire, a mogu se pojaviti i oscilacije njegove amplitude



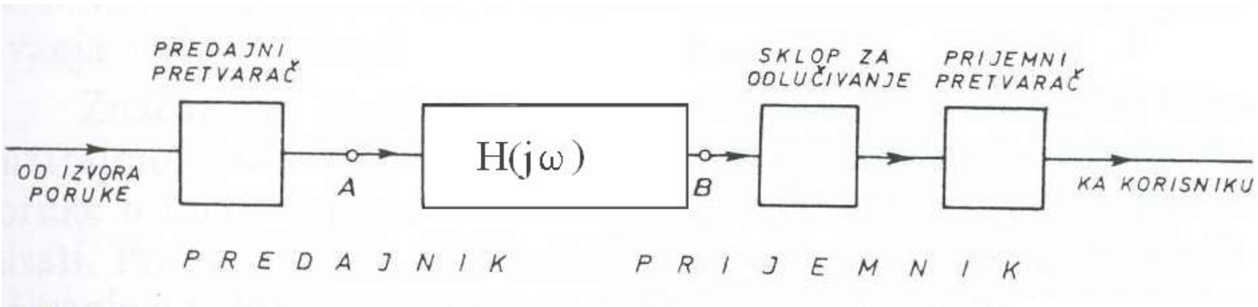


Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

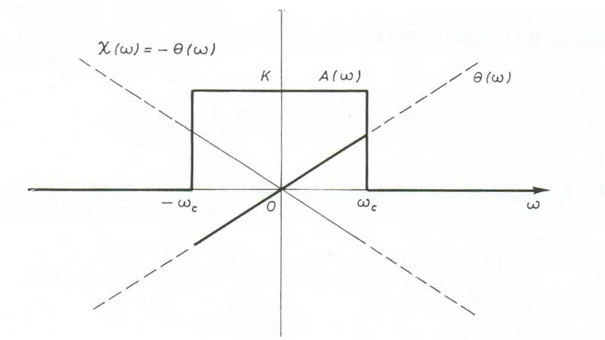
Intersimbolska interferencija (ISI)

Idealni sistem

- Sistem u kome nema ISI
- $H(j\omega)$ predstavlja idealni propusnik niskih učestanosti kojim se modeluju predajni filter, prenosni medijum i prijemni filter



$$H(j\omega) = A(\omega)e^{-j\theta(\omega)}$$



$$A(\omega) = \begin{cases} K = const & \text{za } |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \text{za } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

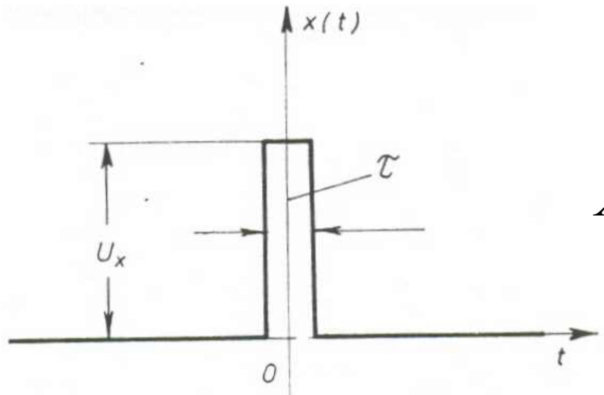
$$\theta(\omega) = \omega t_{0,} \qquad \mathrm{t}_0 = const$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Intersimbolska interferencija (ISI)

Idealni sistem

- Neka je signal kojim se pobuđuje idealni sistem prenosa u tački *A* usamljeni impuls vrlo kratkog trajanja τ i amplitude U_x.



$$X(j\omega)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_x e^{-j\omega t}dt \approx \tau U_x$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = K\frac{\tau U_x}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)}d\omega = K\tau U_x\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c(t-t_0)}{\omega_c(t-t_0)}$$

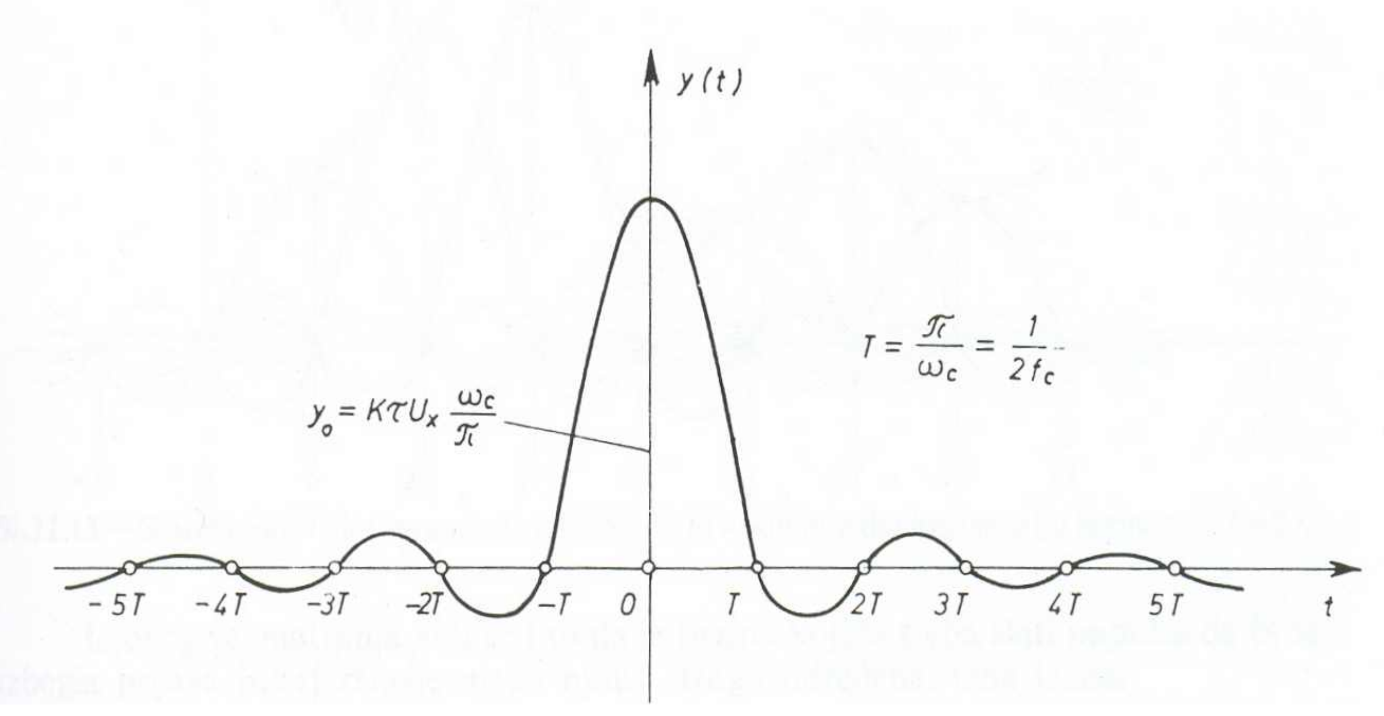
$$y(t)=K\tau U_x\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}=y_0\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Intersimbolska interferencija (ISI)

Idealni sistem

$$y(t) = K\tau U_x \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} = y_0 \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t}$$

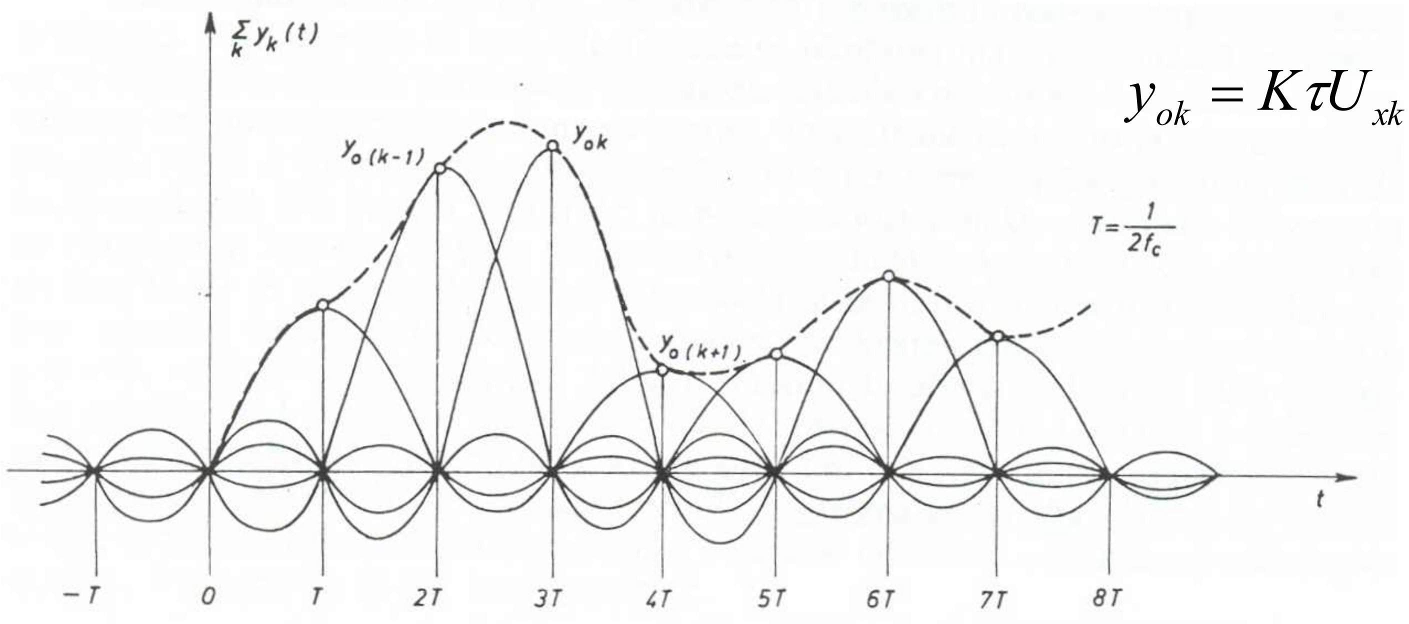


Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Intersimbolska interferencija (ISI)

Idealni sistem

- U slučaju kada postoji više impulsa širine τ, smještenih u trenucima T, 2T, ..., nT, amplituda U_{x1}, U_{x2}, ..., U_{xn} odziv idealnog sistema na ovakvu povorku će se dobiti superpozicijom svih pojedinačnih odziva $y_k(t)$



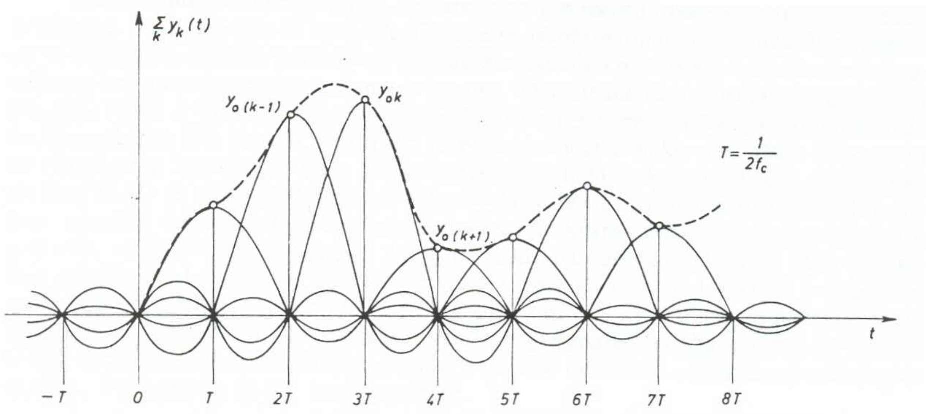
$$y_{ok} = K\tau U_{xk} \frac{\omega_c}{\pi}$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Intersimbolska interferencija (ISI)

Idealni sistem

- y_{0k} ne zavisi od impulsa u ostalim signalizacionim intervalima zato što svaki od njihovih ¨repova¨ u tački odabiranja ima vrijednost 0. To znači da neće doći do ISI!
- Brzina kojom treba slati impulse da bi se izbjegla pojava ISI strogo je određena i iznosi $1/T=2f_c$ ili n-ti dio od $1/T$, gdje je $n=1, 2, 3...$
- Brzina $1/T=2f_c$ se naziva Nyquistovom brzinom,
- Signalizacioni interval $T=1/2f_c$ se kaže da predstavlja Nyquistov interval.

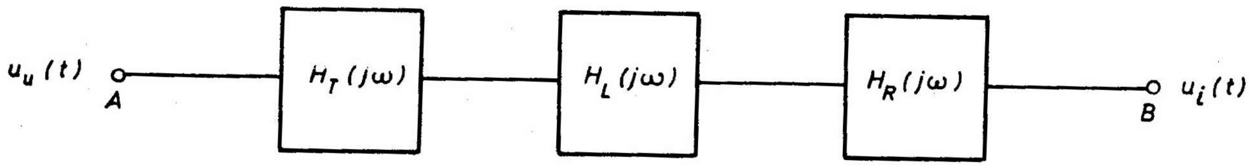


$$y_{ok} = K\tau U_{xk}\frac{\omega_c}{\pi}$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Intersimbolska interferencija (ISI)

- Idealni sistemi fizički ne postoje
- Jednostavna eliminacija ISI podešavanjem signalizacionog intervala propusnom opsegu filtra se ne može realizovati
- *Nyquist*-ovi kriterijumi preciziraju uslove koje treba da zadovolje sistemi za prenos signala u osnovnom opsegu učestanosti kako bi se izbjegla pojava intersimbolske interferencije.



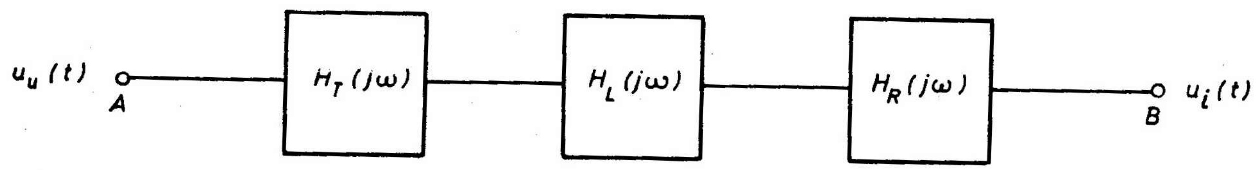
Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Intersimbolska interferencija (ISI)

- Digitalni signal $$u_u(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k x(t - kT)$$
- x(t) je standardni signal (impuls u jednom signalizacionom intervalu)
- *Fourier*-ova transformacija ulaznog signala $U_u(j\omega) = F\{u_u(t)\}$
- *Fourier*-ova transformacija izlaznog signala $U_i(j\omega) = F\{u_i(t)\}$

$U_i(j\omega) = H_T(j\omega)\, H_L(j\omega)\, H_R(j\omega)\, U_u(j\omega) = H(j\omega)\, U_u(j\omega)$

$$u_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) U_u(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Intersimbolska interferencija (ISI)

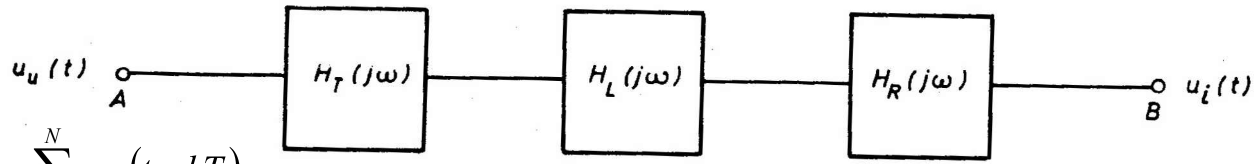
$$u_i(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)U_u(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$U_u(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-N}^{N} a_k x(t-kT)e^{-j\omega t}dt = \sum_{k=-N}^{N} a_k X(j\omega)e^{-j\omega kT}$$

$$u_i(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)\sum_{k=-N}^{N} a_k X(j\omega)e^{-j\omega kT}e^{j\omega t}d\omega = \sum_{k=-N}^{N} a_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega(t-kT)}d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega(t-kT)}d\omega = y(t-kT)$$

$$u_i(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k y(t-kT)$$

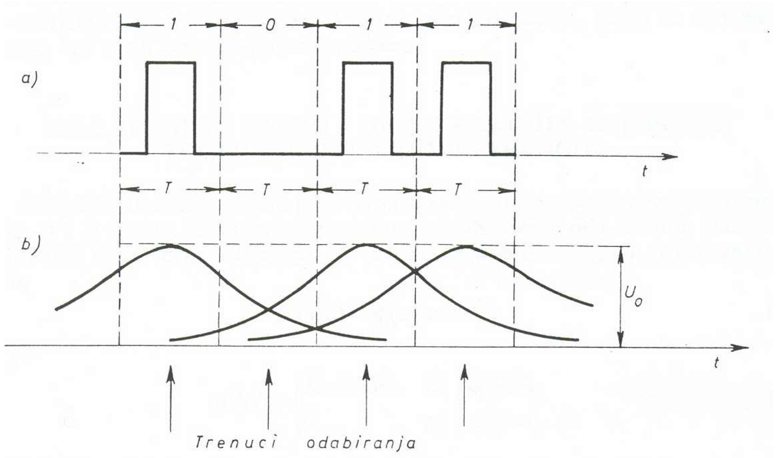


$$u_u(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k x(t-kT)$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Intersimbolska interferencija (ISI)

- Signal $u_i(t)$ dolazi na sklop za odlučivanje
- Zavisi od standardnog odziva y(t)
- Njegov oblik treba podesiti tako da u trenucima odlučivanja nema ISI
- Cilj je da značajni parametar digitalnog signala $u_i(t)$ u složenoj funkciji u jednom određenom signalizacionom intervalu bude potpuno nezavisan od onoga što se dešava u ostalim signalizacionim intervalima.



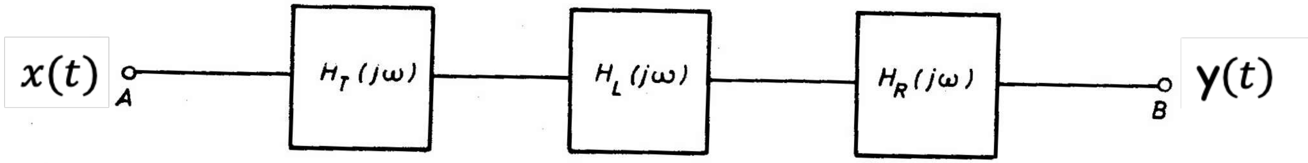
Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Intersimbolska interferencija (ISI)

- Fourierovu transformacija funkcije *y* (t) se označava sa Y(jω):

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = H_T(j\omega)H_L(j\omega)H_R(j\omega)X(j\omega)$$

- Mogu se projektovati filtri (podešavati $H_T(j\omega)$ i $H_R(j\omega)$) tako da se dobije funkcija Y(jω) čija će inverzna Fourierova transformacija *y* (t) obezbijediti odsustvo ISI
- Ova dva filtra se često nazivaju *filtrima za oblikovanje impulsa*, i određuju se na osnovu Nyquistovih kriterijuma.



Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Intersimbolska interferencija (ISI)

Postoje 3 različita Nyquistova kriterijuma, u zavisnosti od tog šta se uzima kao značajni parametar signala:

- Prvi Nyquistov kriterijum:
  - odnosi se na prenos digitalnih signala kod kojih se odluka na prijemu donosi na osnovu *amplituda* odbiraka uzetih u sredini signalizacionih intervala.
- Drugi Nyquistov kriterijum:
  - definiše uslove za sisteme u kojima je za tačan prenos potrebno da ne dođe do promjene *trajanja* značajnog stanja signala.
- Treći Nyquistov kriterijum:
  - govori o mogućnosti da se izbjegne ISI u sistemima u kojima se kao značajni parametar signala odabere površina koju signal obuhvata u jednom signalizacionom intervalu. Ova situacija se rijetko koristi i ima više teorijski nego praktični značaj.

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

- Prvi Nyquistov kriterijum se odnosi na prenos digitalnih signala kod kojih se odluka na prijemu donosi na osnovu amplituda odbiraka uzetih u sredini signalizacionih intervala.
- Taj kriterijum kaže da u ovakvom sistemu prenosa neće doći do ISI ako standardni odziv $y(t)$ zadovoljava uslov da je $y(0)=y_0$, gdje je y_0 konstanta različita od 0, i ako su sve vrijednosti $y(mT)$ ravne nuli, gje je m bilo koji pozitivan ili negativan cio broj, a T trajanje signalizacionog intervala.

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

- Analitički izraz za prvi Nyquistov kriterijum bi bio:

$$y(mT) = y_0 \delta_{m0} \quad \text{, gdje je} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \mathrm{i} = \mathrm{j} \\ 0 & \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \end{cases} \quad \textit{Kronecker}\text{-ova delta}$$

$$u_i(mT) = \sum_{k=-N}^{N} a_k y[(m-k)T] = y_0 \sum_{k=-N}^{N} a_k \delta_{m-k,0}$$

$$u_i(mT) = y_0 (a_{-N} \delta_{m+N,0} + \cdots + a_m \delta_{m-m,0} + \cdots + a_N \delta_{m-N,0})$$

$$u_i(mT) = a_m y_0 = a_m y(0)$$

- vrijednost primljenog signala u *m*-tom trenutku odabiranja zavisi samo od onoga što je u tom signalizacionom intervalu bilo poslato od predajnika (ISI je jednaka nuli) ukoliko standardni odziv zadovoljava uslov koji definiše prvi Nyquistov kriterijum.

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

- Polazeći od formulacije Nyquistovog kriterijuma u domenu vremena, može se odrediti i odgovarajuća forma u domenu učestanosti kako bi se definisao uslov koji treba da zadovolji funkcija prenosa sistema kako ne bi došlo do ISI.

$$y(mT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)e^{j\omega mT}\,d\omega$$

$$y(mT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\frac{2\pi m}{\omega_s}\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y[j(\omega + n\omega_s)]\,d\omega$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

$$y(mT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\frac{2\pi m}{\omega_s}\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y[j(\omega + n\omega_s)] d\omega$$

- Kako bi bio ispunjen Prvi Nyquistov kriterijum, tj. $y(mT) = y_0\delta_{m,0}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y[j(\omega + n\omega_s)] = \frac{2\pi}{\omega_s} y_0 = T y_0$$

- Ovo je formulacija Prvog Nyquistovog kriterijuma u domenu učestanosti.
- Tada je:

$$y(mT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\frac{2\pi m}{\omega_s}\omega} \frac{2\pi}{\omega_s'} y_0 d\omega = y_0 \frac{\sin m\pi}{m\pi} = y_0 \delta_{m0}$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = H_T(j\omega)H_L(j\omega)H_R(j\omega)X(j\omega)$$

Ako je standardni signal koji predstavlja digitalni signal u jednom signalizacionom intervalu delta impuls ($x(t)=\delta(t)$), tada je

$$Y(j\omega) = H(j\omega) = A(\omega)e^{j\chi(\omega)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y[j(\omega + n\omega_s)] = \sum_{-\infty}^{\infty} A(\omega + n\omega_s)e^{j\chi(\omega + n\omega_s)} = \frac{2\pi}{\omega_s} y_0 = Ty_0 = K, \quad -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

Ako se razdvoje realni i imaginarni dio, dolazi se do uslova:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\omega + n\omega_s)\cos\chi(\omega + n\omega_s) = K, \quad -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

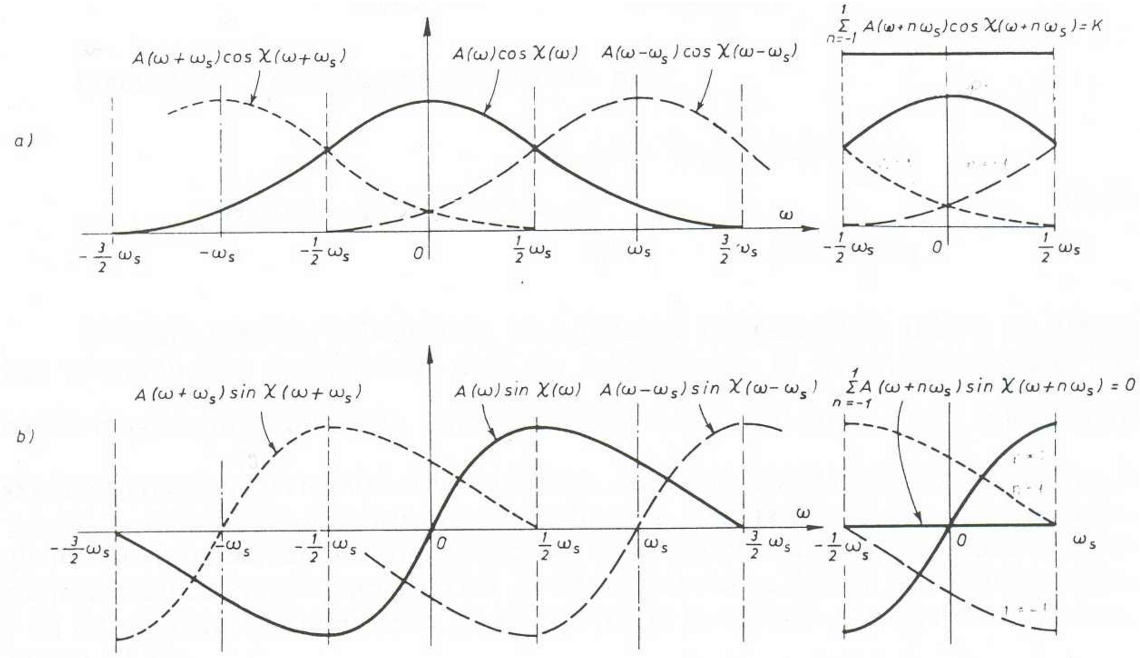
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\omega + n\omega_s)\sin\chi(\omega + n\omega_s) = 0, \quad -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\omega + n\omega_s)\cos\chi(\omega + n\omega_s) = K, \quad -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\omega + n\omega_s)\sin\chi(\omega + n\omega_s) = 0, \quad -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$



Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

Sistemi koji zadovoljavaju prvi Nyquistov kriterijum

1. Idealni sistem

- Amplitudska i fazna karakteristika

$$A(\omega)=\begin{cases} A(\omega), |\omega| \le \dfrac{\omega_s}{2}=\omega_c \\ 0, \quad |\omega| > \dfrac{\omega_s}{2} \end{cases} \qquad \chi(\omega)=\begin{cases} \chi(\omega), |\omega| \le \dfrac{\omega_s}{2}=\omega_c \\ 0, \quad |\omega| > \dfrac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

Pošto je ovako definisana funkcija prenosa različita od 0 samo u intervalu $-\omega_s/2 \le \omega \le \omega_s/2$, sume Nyquistovog kriterijuma će imati po jedan član i svešće se na

$$A(\omega)\cos\chi(\omega)=K, \text{ i } A(\omega)\sin\chi(\omega)=0, \qquad |\omega| \le \frac{1}{2}\omega_s$$

$$A(\omega)=K=y_0, \text{ i } \chi(\omega)=0, \qquad |\omega| \le \frac{1}{2}\omega_s$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

- Na osnovu toga je jasno da je funkcija prenosa sistema u opsegu učestanosti $-\omega_s/2 \le \omega \le \omega_s/2$ koja zadovoljava Prvi Nyquistov kriterijum oblika:

$$H(j\omega) = A(\omega) = \begin{cases} K = Ty_0, & |\omega| \le \frac{1}{2}\omega_s \\ 0, & |\omega| \ge \frac{1}{2}\omega_s \end{cases}$$

- Uočava se da je sistem prenosa koji ima minimalni propusni opseg, i u kome nema intersimbolske interferencije, ustvari idealni sistem prenosa.
- Sistemi koji zadovoljavaju Nyquistov kriterijum i mogu se fizički realizovati (na račun proširenja propusnog opsega za najviše dva puta) nazivaju se Nyquistovi slučajevi. Takvih sistema je beskonačno mnogo.

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

Nyquistovi slučajevi

- Riječ je o sistemima propusnicima niskih učestanosti kod kojih je propusni opseg proširen u odnosu na idealan sistem. Kod takvih sistema je:

$$A(\omega)=\begin{cases} A(\omega), & |\omega| \le \omega_g \\ 0, & |\omega| > \omega_g \end{cases} \qquad , \frac{1}{2}\omega_s \le \omega_g \le \omega_s$$

- Ograničenje u realizaciji ovakvih sistema se ogleda u tome da se minimalni propusni opseg (slučaj idealnog sistema) može proširiti najviše 100%.
- Amplitudska i fazna karakteristika ovakvog realnog sistema zadovoljavaju uslove:

$$A(\omega)\cos\chi(\omega) + A(\omega-\omega_s)\cos\chi(\omega-\omega_s) = K, \qquad 0 \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

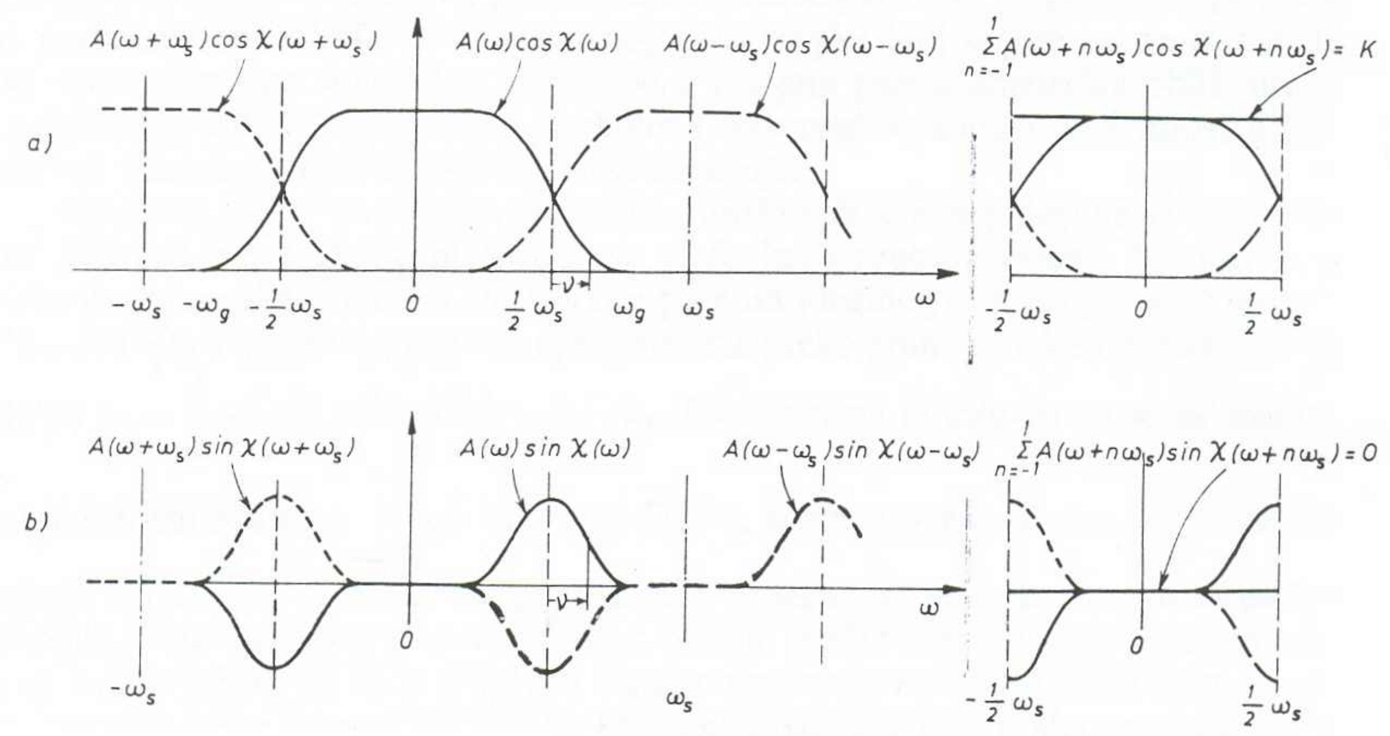
$$A(\omega)\sin\chi(\omega) + A(\omega-\omega_s)\sin\chi(\omega-\omega_s) = 0, \qquad 0 \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

Nyquistovi slučajevi

Realni i imaginarni dio funkcije prenosa imaju oblik kao na slici:



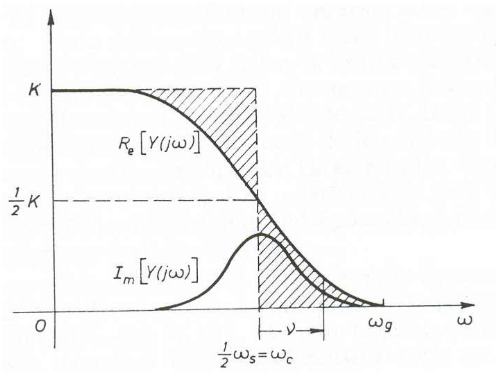
Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

Nyquistovi slučajevi

Ako se sa prethodnih slika uzme samo jedan detalj može se zaključiti sledeće:

- realni i imaginarni dio funkcije prenosa imaju određenu simetriju.
- realni dio može da se shvati kao da je sastavljen iz dva dijela: iz pravougaonog oblika, prikazanog isprekidanom linijom, i zaobljenog oblika, koji je neparno simetričan u odnosu na tačku ($\omega_s/2$, $K/2$).
- zaobljena kriva linija definiše osjenčenu površinu koja se oduzima od pravougaonog oblika i dodaje iznad učestanosti $\omega_c = \omega_s/2$ kako bi se dobio realni dio funkcije prenosa.
- imaginarni dio funkcije prenosa je parno simetričan u odnosu na pravu $\omega = \omega_c = \omega_s/2$.

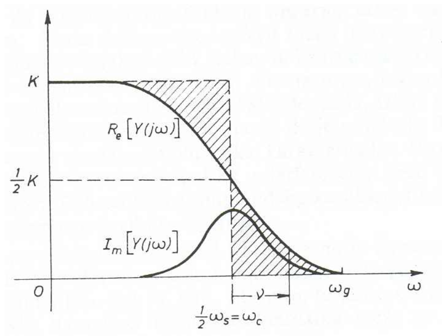


Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

Nyquistovi slučajevi

- Kako je $\omega_s/2= \omega_c \leq \omega_g \leq \omega_s=2\ \omega_c$, Nyquist je zaključio da je moguće napraviti bezbroj funkcija prenosa koje obezbjeđuju prenos bez ISI.
- ***Nyquistovi uslovi simetrije*** koje te funkcije prenosa moraju zadovoljavati:
  - Ako se pođe od idealnog sistema prenosa za koji je realni dio Re[H(jω)] dat pravougaonim oblikom, a imaginarni dio Im[H(jω)] je 0, i doda li se prvom neparno simetrično zaobljenje u odnosu na tačku ($\omega_s/2$, K/2), a drugom parno simetričan oblik u odnosu na pravu $\omega=\omega_c= \omega_s/2$, uslovi za prenos bez interferencije među simbolima (Prvi Nyquistov kriterijum) biće uvijek ispunjeni.



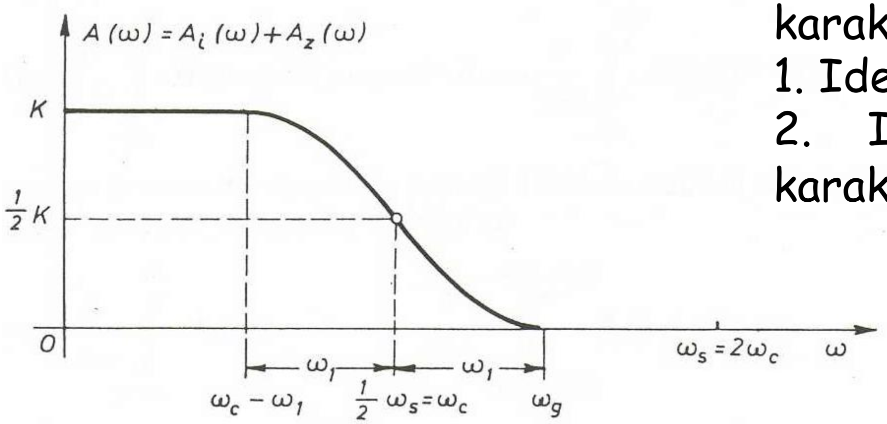
Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

Primjeri Nyquistovih sistema za prenos

Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem

- fazna funkcija ravna nuli ($\chi(\omega)=0$, tj. nema kašnjenja),
- amplitudska karakteristika ima opšti oblik kao na slici. Idealnom sistemu prenosa je dodato ***neparno*** zaobljenje i to po zakonu kosinusa.
- Potrebno je pronaći odziv takvog sistema na pobudu u vidu delta impulsa ($x(t)=\delta(t)$).



Pretpostavljena amplitudska karakteristika $A(\omega)$ može da se razloži na dvije karakteristike:

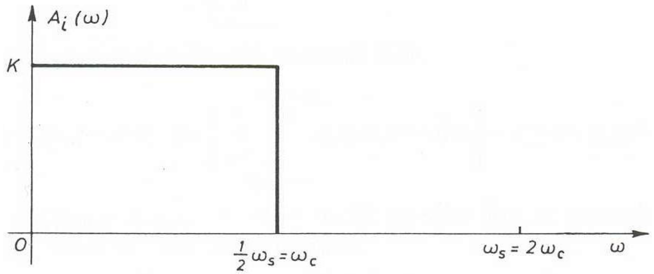
1. Idealni dio sistema označen sa $A_i(\omega)=K$
2. Izobličenje u odnosu na idealnu karakteristiku označeno sa $A_z(\omega)$

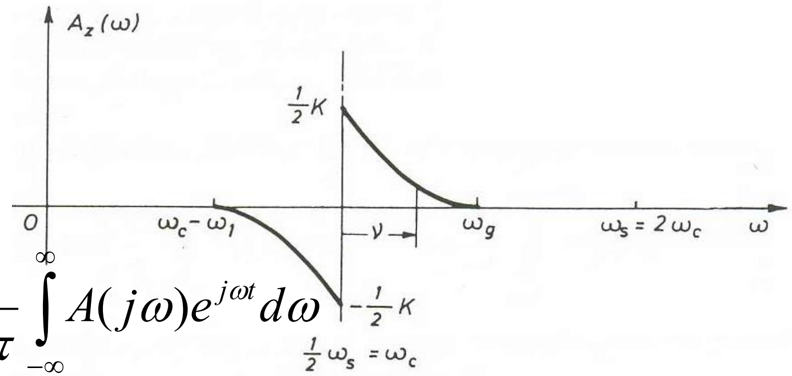
Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

Primjeri Nyquistovih sistema za prenos

Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem





$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}A_i(\omega)e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-(\omega_c+\omega_1)}^{-(\omega_c-\omega_1)}A_z(\omega)e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_c-\omega_1}^{\omega_c+\omega_1}A_z(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}A_i(\omega)e^{j\omega t}d\omega+\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}\int_{\omega_c-\omega_1}^{\omega_c+\omega_1}A_z(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]=y_i(t)+y_z(t)$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

Primjeri Nyquistovih sistema za prenos

Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem

- Odziv se sastoji od dvije komponente. Jedna je posljedica idealnog dijela karakteristike prenosa, a druga je od zaobljenja.
- Kako je $A_i(\omega)=K$, to je odziv na idealni dio prenosne karakteristike sistema:

$$y_i(t) = K\frac{2\omega_s}{2\pi}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t} = \frac{K}{T}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t} = y_0\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}$$

- Komponenta odziva koja potiče od zaobljenja karakteristike je:

$$y_z(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}\int_{\omega_c-\omega_1}^{\omega_c} A_z(\omega)e^{j\omega t}d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{\omega_c}^{\omega_c+\omega_1} A_z(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

Primjeri Nyquistovih sistema za prenos

Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem

- Posmatrana funkcija zadovoljava Nyquistov kriterijum simetrije, tj. zaobljenje je neparno simetrično, pa važi da je:

$$A_z(\omega_c - \nu) = -A_z(\omega_c + \nu)$$

- Odavde se dobija da je:

$$y_z(t) = \frac{2}{\pi} \sin \omega_c t \int_0^{\omega_1} A_z(\omega_c - \nu) \sin \nu t d\nu$$

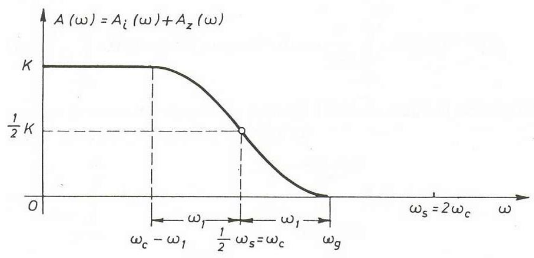
$$y(t) = y_i(t) + y_z(t) = \frac{K}{T} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} + \frac{2}{\pi} \sin \omega_c t \int_0^{\omega_1} A_z(\omega_c - \nu) \sin \nu t d\nu$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

Primjeri Nyquistovih sistema za prenos

Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem



- Ako se pretpostavi kosinusoidalno zaobljenje tako da je:

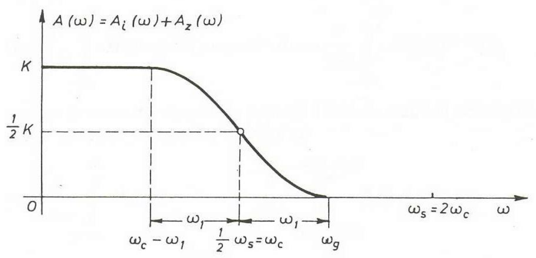
$$A_z(\omega) = K\begin{cases} -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}\dfrac{|\omega| - \omega_c}{\omega_1}, & \omega_c - \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_c \\[2ex] \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}\dfrac{|\omega| - \omega_c}{\omega_1}, & \omega_c \leq |\omega| \leq \omega_c + \omega_1 \end{cases}$$

- Ukupna prenosna funkcija je:

$$A(\omega) = K\begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c - \omega_1 \\[1ex] \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}\dfrac{|\omega| - \omega_c}{\omega_1}, & \omega_c - \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_c + \omega_1 \\[1ex] 0, & |\omega| \geq \omega_c + \omega_1 \end{cases}$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum



Primjeri Nyquistovih sistema za prenos

Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem

- Uobičajeno je da se za ovakve zaobljene karakteristike definiše **faktor zaobljenja** ("roll off") kao odnos ω_1 i ω_c.

$$\xi = \frac{\omega_1}{\omega_c}$$

- Kod sistema iz grupe Nyquistovih slučajeva ovaj faktor se kreće u granicama od 0 (idealan sistem) do 1 (maksimalno proširenje sistema, duplo veće od idealnog).
- Da bi se pronašao traženi odziv sistema čija amplitudska karakteristika ima kosinusoidalno zaobljenje na pobudu δ impulsom potrebno je u izrazu za odziv sistema uvrstiti karakteristiku $A_z(\omega)$, pa se konačno dobija:

$$y(t) = \frac{K}{T}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t} + \frac{2}{\pi}\sin\omega_c t\int_0^{\omega_1} K\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\frac{\nu}{\omega_1}\right)\sin\nu t\, d\nu$$

$$y(t) = \frac{K}{T}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}\frac{\cos\omega_1 t}{1-\left(\frac{2\omega_1 t}{\pi}\right)^2}, \quad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{1}{2f_c}$$

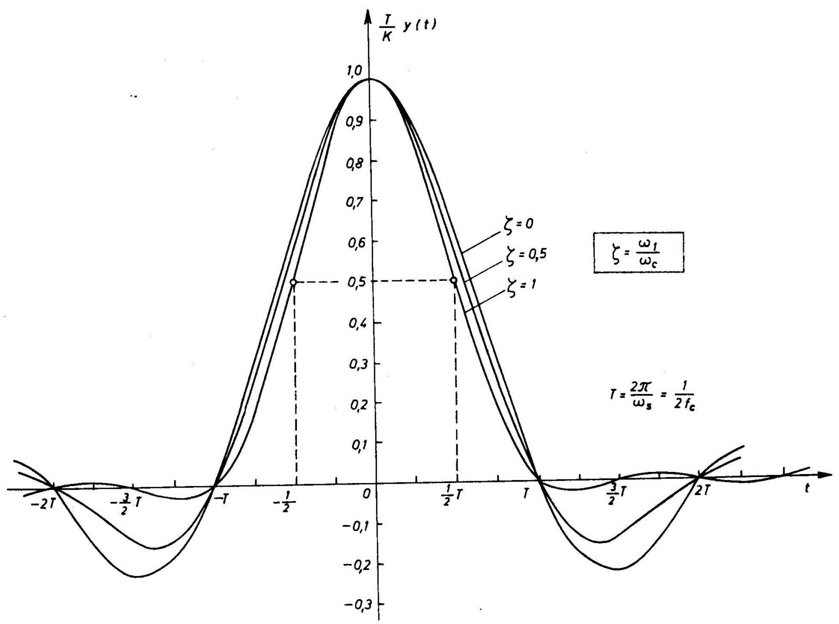
Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

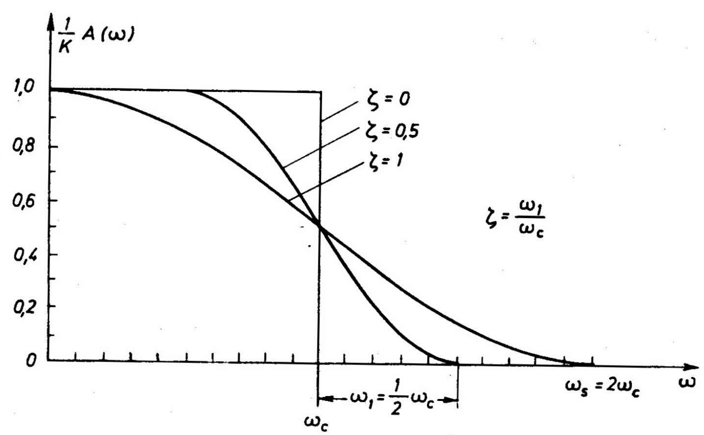
Prvi Nyquistov kriterijum

Primjeri Nyquistovih sistema za prenos

Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem

- Za različite vrijednosti roll off faktora dobijaju se različiti oblici odziva.
- Neki od njih su prikazani na slici, i to: slučaj idealne amplitudske karakteristike za koji je faktor zaobljenja ξ=0, slučaj u kome je faktor zaobljenja ξ=0,5 i slučaj u kome je ξ= 1. Prikazane su i odgovarajuće amplitudske karakteristike ovih sistema.





Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prvi Nyquistov kriterijum

Primjeri Nyquistovih sistema za prenos

Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem

- Analizirajući impulsni odziv vidi se da se unošenjem zaobljenja u amplitudsku karakteristiku nije izmijenio ni položaj nula odziva u odnosu na odziv idealnog sistema, ni maksimalna vrijednost odziva $y(0)=y_0=K/T$. Znači, neće postojati ISI.
- S druge strane, uticaj zaobljenja je takav da je amplituda oscilacija u »repu« odziva utoliko manja ukoliko je faktor zaobljenja ξ bliži vrijednosti 1. To znači da ako i dođe do intersimbolske interferencije iz bilo kojih razloga, njen uticaj će biti manji ako postoji zaobljenje.
- Posebnu pažnju zaslužuje karakteristika čiji je faktor zaobljenja $\xi=1$. Ovakva karakteristika naziva se često i karakteristikom "*podignuti kosinus*". Sa slike se vidi da su u tom slučaju amplitude oscilacija u odzivu ne samo smanjene već se u odzivu javljaju i dodatne nule u trenucima $\pm 3T/2$, $\pm 5T/2$, $\pm 7T/2$, ...$(2n+1)T/2$, a u tačkama $\pm T/2$ relativna amplituda odziva iznosi 0,5. To ima poseban značaj i na to će biti dat osvrnuti kada bude riječi o Drugom Nyquistovom kriterijumu.

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prenos digitalnog signala kroz realne kanale i dijagram oka

- Neka se signal prenosi u osnovnom opsegu učestanosti i neka na ulaz sistema dolazi standardni signal:

$$u_u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x(t - kT)$$

- Odziv sistema na poslati signal je:

$$u_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y(t - kT)$$

- Pošto se signalu u toku prenosa superponira i šum, rezultirajući signal na ulazu sklopa za odlučivanje je:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y(t - kT) + \eta(t)$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prenos digitalnog signala kroz realne kanale i dijagram oka

- Neka se odbirci uzimaju u trenucima t=nT.

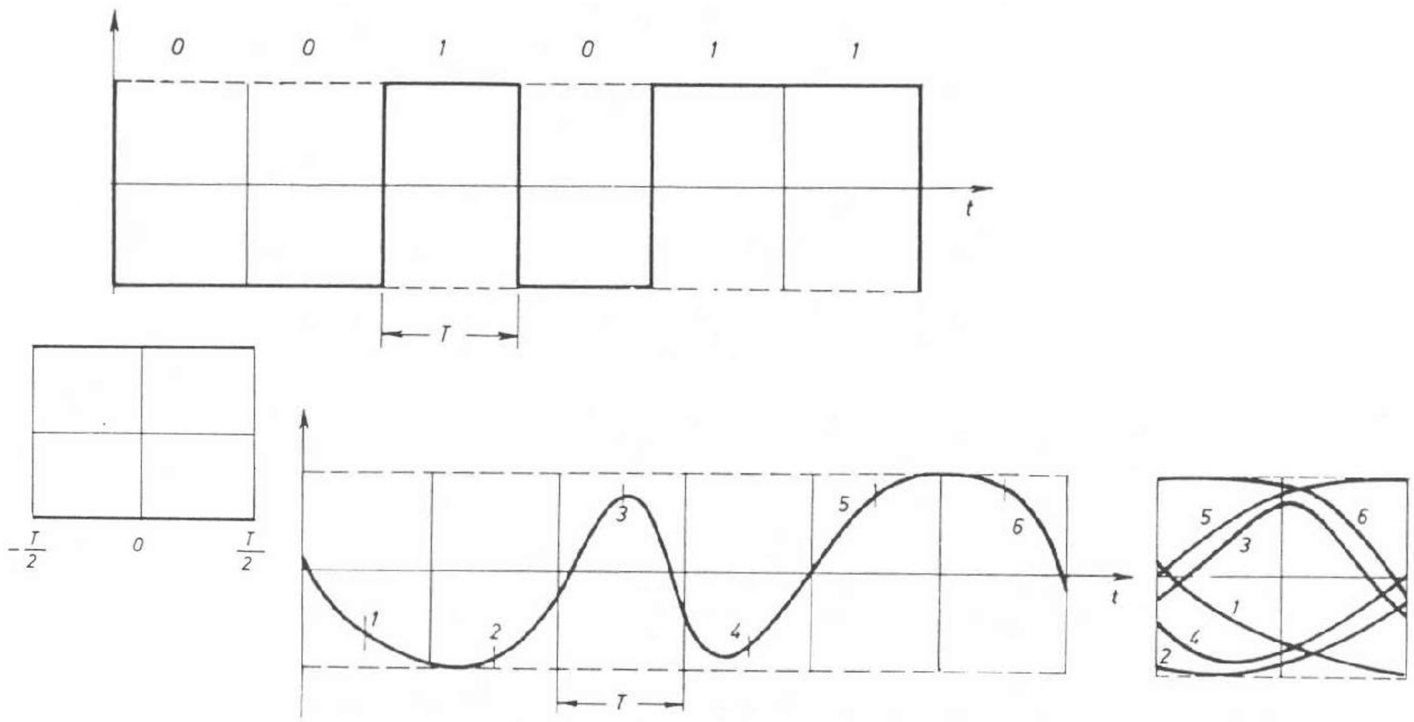
$$u(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y(nT - kT) + \eta(nT)$$

- Ovaj n-ti odbirak može da se napiše i u obliku:

$$u_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y_{n-k} + \eta_n = a_n y_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} a_k y_{n-k} + \eta_n$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

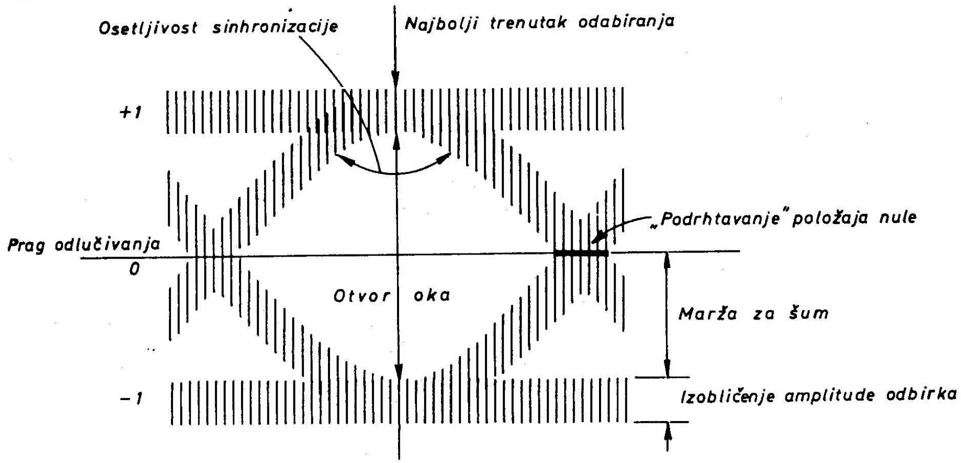
Prenos digitalnog signala kroz realne kanale i dijagram oka



Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prenos signala kroz realne kanale i dijagram oka

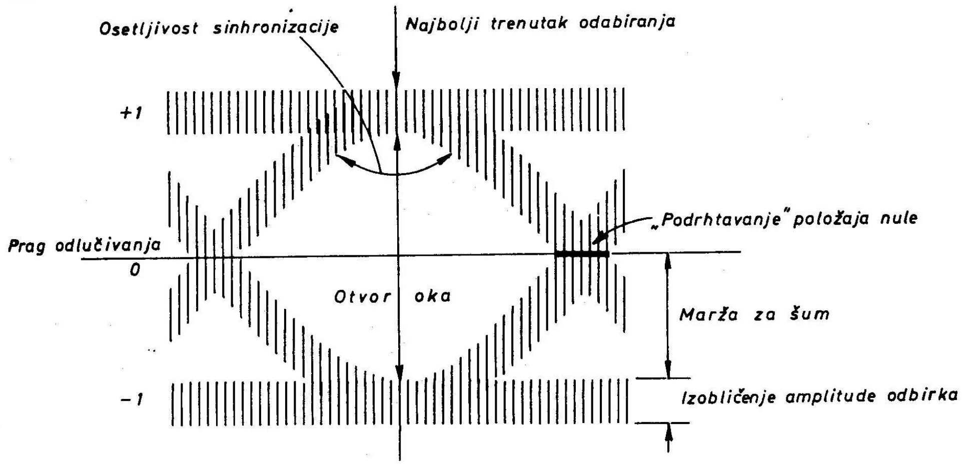
Dijelovi signala iz pojedinih signalizacionih intervala koji su preklopljeni jedan preko drugog daju dijagram oka. Naravno, ako se uzme dugačka povorka impulsa, mnoge linije će se preklopiti i obrazovaće se zadebljani tragovi. Oni su prikazani kao osjenčene površine na slici.



Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Prenos signala kroz realne kanale i dijagram oka

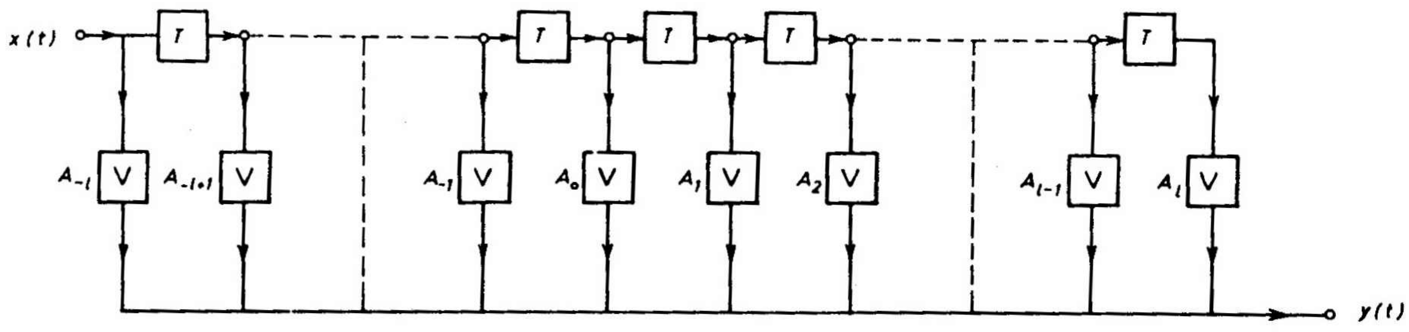
- Otvor oka govori kolika je ISI
- Na osnovu širine otvora oka se može procijeniti trajanje intervala u kome je moguće izabrati trenutak odabiranja
- Podrhtavanje položaja nule
- Debljina osjenčenih tragova
- Marža na šum
- M-arni signali (M-1 oblik)



Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Problem korekcije i transferzalni filtar

- Funkcija prenosa treba da zadovolji NK kako bi se izbjegla ISI
- NK nikada idealno ne mogu da se ostvare
- Neophodno je vršiti korekciju funkcije prenosa
- Korekcija se obavlja pomoću transferzalnog filtra
- Transferzalni filtar se sastoji od kaskadne veze četvoropola označenih sa T koji predstavljaju liniju za kašnjenje.



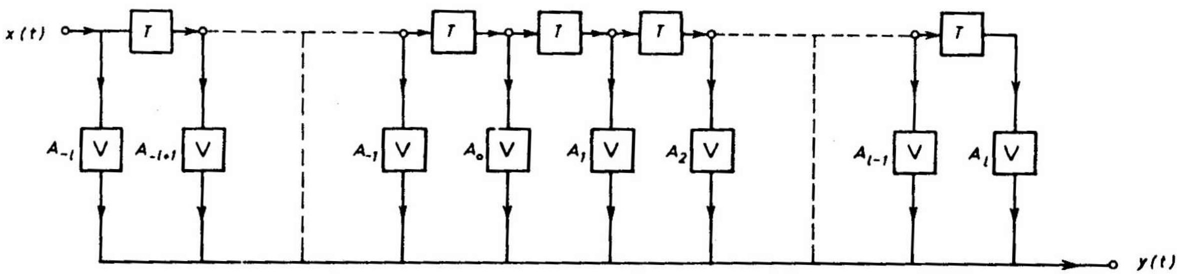
Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Problem korekcije i transferzalni filtar

- Signal uzet sa svakog izvoda prolazi kroz njemu odgovarajući pojačavač.
- Pojačanja pojačavača A_{-l}, A_{-l+1}, ..., A_{-1}, A_0, A_1, A_2, ..., A_l mogu da se podešavaju.
- Izlazni signali iz svih pojačavača se sabiraju i tako daju rezultantni izlazni signal.

$$y(t) = A_{-l}x(t) + A_{-l+1}x(t-T) + \cdots + A_0 x(t-lT) + \cdots + A_l x(t-2lT) =$$

$$= \sum_{k=-l}^{l} A_k x[t-(k+l)T]$$



Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Problem korekcije i transferzalni filtar

- Funkcija prenosa transferzalnog filtra je

$$H_K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = e^{-jlT\omega} \sum_{k=-l}^{l} A_k e^{-jkT\omega} = e^{-jlT\omega} H_k(j\omega)$$

- Prvi faktor $e^{-jlT\omega}$ opisuje komponentu fazne funkcije koja linearno zavisi od učestanosti. Njom se unosi konstantno kašnjenje lT.
- Drugi faktor predstavlja periodičnu funkciju po ω čija je perioda $2\pi/T$.

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Problem korekcije i transferzalni filtar

- Ako sistem prenosa ima funkciju prenosa $H_s(j\omega)$, a prema Nyquistovom kriterijumu je potrebno da ona bude $H(j\omega)$, onda se kaskadnim vezivanjem transverzalnog filtra i sistema prenosa dolazi do relacije:

$$H_s(j\omega)H_K(j\omega) \cong e^{-jlT\omega}H(j\omega)$$

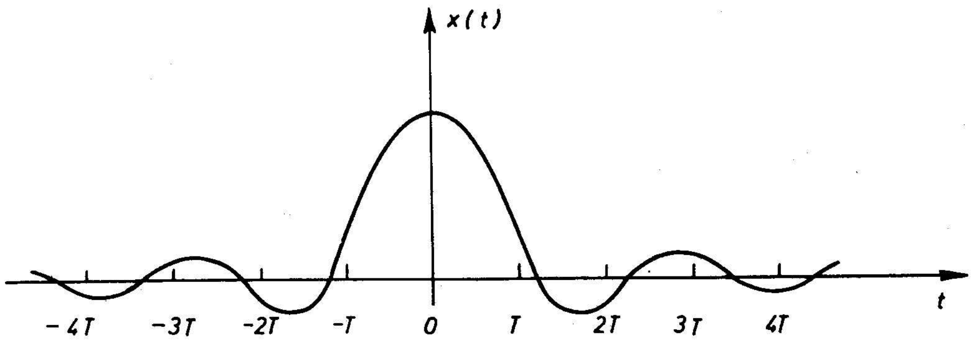
$$H_k(j\omega) = \sum_{k=-l}^{l} A_k e^{-jkT\omega} \cong \frac{H(j\omega)}{H_s(j\omega)} = F(j\omega)$$

- U gornjim relacijama stavljen je znak približnosti jer se radi o aproksimaciji. U stvari od funkcije $F(j\omega)$ se uzima dio koji se nalazi u intervalu $|\omega| \leq \pi/T$, od koga se pravi periodična funkcija.

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Problem korekcije i transferzalni filtar

Ilustracija



$$y(t) = A_{-l}x(t) + A_{-l+1}x(t-T) + \cdots + A_0 x(t-lT) + \cdots + A_l x(t-2lT) =$$

$$= \sum_{k=-l}^{l} A_k x[t-(k+l)T]$$

Prenos digitalnog signala u osnovnom opsegu

Problem korekcije i transferzalni filtar

- Prvi Nyquistov kriterijum će biti zadovoljen ako y(t) zadovoljava uslov da je:

$$y[(m+l)T] = \begin{cases} y_0, & \mathrm{m} = 0 \\ 0, & \mathrm{m} = \pm 1, \pm 2, \pm \cdots \end{cases}$$

- Medutim, ovaj uslov upotrebom transverzalnog filtra ne može da se zadovolji u svim tačkama mT, već samo u onoliko tačaka koliko grana ima filtar.

$$y[(k+l)T] = \begin{cases} y_0, & \mathrm{k} = 0 \\ 0, & \mathrm{k} = \pm 1, \pm 2, \pm \cdots \pm l \end{cases}$$

- Ako se, sada, ovaj uslov uvrsti u opšti izraz za odziv sistema i za zadato x(t) napiše za svako k, dobiće se (2l+1) simultanih linearnih jednačina iz kojih se mogu pronaći svi koeficijenti A_k. Na taj način je osigurano da u 2l tačaka odabiranja odziv y(t) ima vrijednost nula.