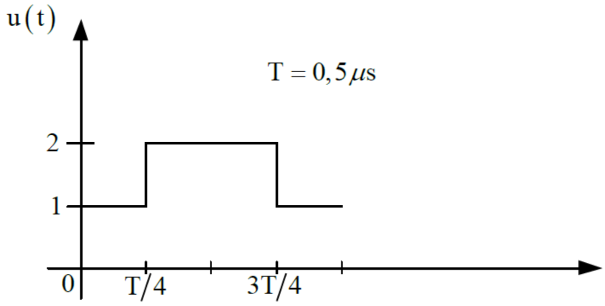
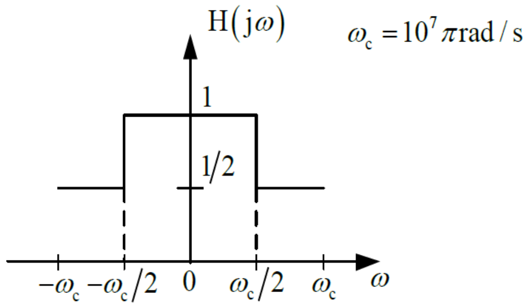
Prenos signala kroz linearne sisteme

1. Na slici 1 je prikazan periodičan signal u(t) na intervalu jedne periode.

   a) Odrediti i nacrtati amplitudski spektar signala u(t).
   b) Signal u(t) se dovodi na ulaz sklopa čija je funkcija prenosa prikazana na slici 2. Odrediti vremenski oblika signala na izlazu iz sklopa.



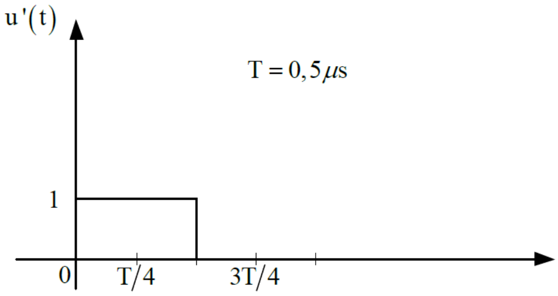
Sl.1



Sl.2

Rešenje:

a) Umjesto signala iz postavke analizirajmo sledeći signal:



Signal u(t) možemo predstaviti preko u'(t) na sledeci način:

$$u(t) = u'\left(t - \frac{T}{4}\right) + 1V$$

$$\mathrm{U_n} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{u'(t)e^{-jn\omega_0 t}dt} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T/2}} \mathrm{e^{-jn\omega_0 t}dt} = -\frac{1}{\mathrm{Tjn}\,\omega_0}\left(\mathrm{e^{-jn\omega_0 t}}\Big|_0^{\mathrm{T/2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{Tjn}\,\omega_0}\left(\mathrm{e^{-jn\omega_0\frac{T}{2}}} - 1\right) = \mathrm{e^{-jn\omega_0\frac{T}{4}}}\left(\mathrm{e^{jn\omega_0\frac{T}{4}}} - \mathrm{e^{-jn\omega_0\frac{T}{4}}}\right)\frac{1}{\mathrm{Tjn\omega_0}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{n\omega_0 T}{4}\right)}{\frac{n\omega_0 T}{4}}e^{-jn\omega_0\frac{T}{4}}$$

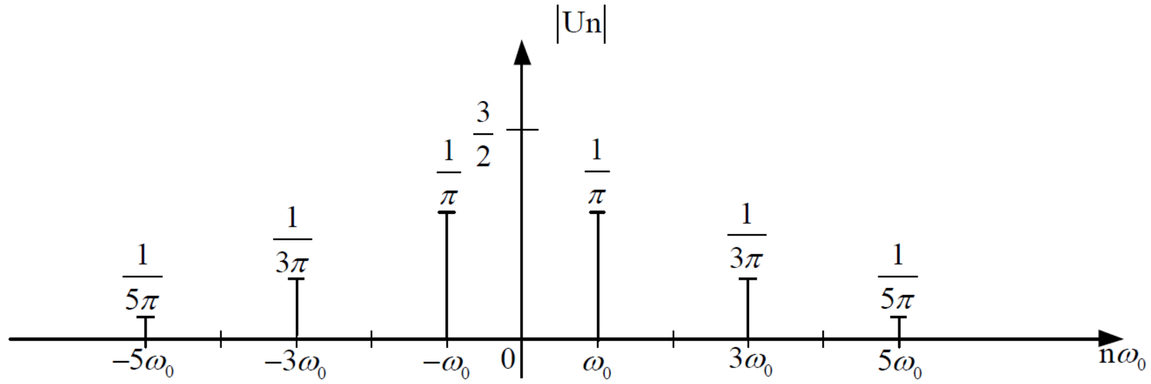
$$\mathrm{U_0}' = \mathrm{U'_n}(\mathrm{n} \to 0) = \frac{1}{2}$$

Anvelopa signala je:

$$\alpha(\omega)=\frac{1}{2}\left|\frac{\sin\left(\omega\frac{T}{4}\right)}{\omega\frac{T}{4}}\right|,\alpha(\omega)=0\Leftrightarrow\omega\frac{T}{4}=k\pi\Rightarrow\omega=2\omega_0 k,\qquad k=\pm1,\pm2,\ldots$$

Amplitudski spektar originalnog signala je:

$$U_n=\begin{cases}\frac{3}{2},n=0\\ \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{n\omega_0 T}{4}\right)}{\frac{n\omega_0 T}{4}}e^{-jn\omega_0\frac{T}{4}},n\neq0\end{cases}$$



b) Učestanosti prvog i trećeg harmonika su:

$$f_0=\frac{1}{T}=\frac{1}{0{,}5\cdot10^{-6}}=2\cdot10^6\text{Hz}$$
$$3f_0=6\text{MHz}$$

Ako uzmemo u obzir granične učestanosti filtra:

$$f_c=\frac{\omega_c}{2\pi}=5\text{MHz}$$
$$\frac{f_c}{2}=\frac{\omega_c}{4\pi}=2.5\text{MHz}$$

Vidimo da će kroz filtar proči jednosmjerna komponenta signala kao i prvi harmonik jer su ostali harmonici na većim učestanostima od f_c.

Kako signal u(t) možemo zapisati:

$$u(t)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\left(\frac{n\omega_0 T}{4}\right)}{\frac{n\omega_0 T}{4}}\right|\cos(n\omega_0 t+\theta_n)$$

Na izlazu iz filtra imamo:

$$u_f(t) = \frac{3}{2} + \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega_0 T}{4}\right)}{\frac{\omega_0 T}{4}} \right| \cos(\omega_0 t + \theta)$$

2. Pronaći odziv idealnog filtra propusnika opsega učestanosti na pobudu u vidu:
   a) Dirakovog impulsa
   b) Hevisajdove funkcije,

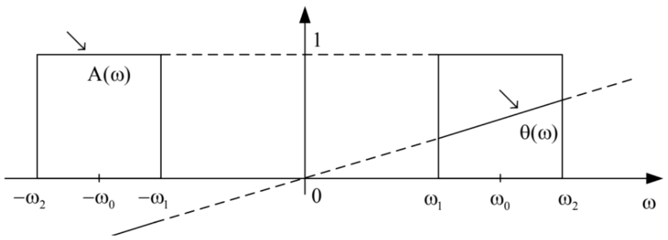
pod uslovom da između graničnih učestanosti ω_1 i ω_2 i srednje učestanosti ω_o propusnog opsega važi relacija:

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_o >> \omega_2 - \omega_1$$

<u>Rešenje</u>:

Funkcija prenosa svakog sistema se može zapisati u obliku: $H(j\omega) = A(\omega)e^{j\Theta(\omega)}$

Za idealni filtar važi: $A(\omega) = const$, $\Theta(\omega) = -\omega t_o$.



Slika 3. Primjer amplitudske i fazne karakteristike idealnog filtra propusnika opsega učestanosti.

Odziv tražimo primjenom inverzne Furijeove transformacije:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

gdje je $X(j\omega)$ Furijeova transformacija ulaznog signala $x(t)$.

Ako je filtar idealan, možemo uzeti da je: $A(\omega) = 1 = const$, $\Theta(\omega) = -\omega t_o$, tj. $H(j\omega) = e^{-j\omega t_o}$.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{-j\omega t_o}e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} X(j\omega)e^{j\omega(t-t_o)}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} X(j\omega)e^{j\omega(t-t_o)}d\omega$$

a) Kada je ulazni signal Dirakov impuls:

$$x(t) = \delta(t)$$
$$X(j\omega) = 1$$

Na izlazu se dobija signal:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} 1\cdot e^{j\omega(t-t_o)}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} 1\cdot e^{j\omega(t-t_o)}d\omega$$

S obzirom da važi: $e^{j\omega(t-t_o)} = \cos(\omega(t-t_o)) + j\sin(\omega(t-t_o))$, prethodni izraz je identičan sledećem:

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos\omega(t-t_o)d\omega = \frac{1}{\pi(t-t_o)}(\sin\omega_2(t-t_o) - \sin\omega_1(t-t_o))$$

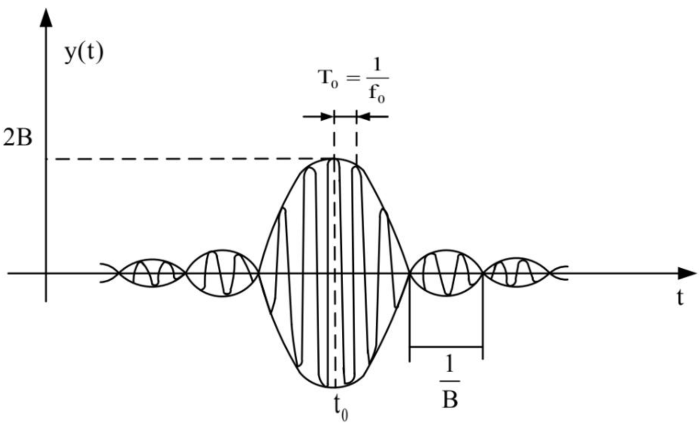
Iskoristićemo trigonometrijsku formulu: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

$$y(t) = \frac{2}{\pi(t-t_o)}\cos((\omega_2+\omega_1)(t-t_o)/2)\sin((\omega_2-\omega_1)(t-t_o)/2)$$, ili:

$$y(t) = \frac{2}{\pi(t-t_o)}\cos(2\pi(f_2+f_1)(t-t_o)/2)\sin(2\pi(f_2-f_1)(t-t_o)/2)$$

Ako sa $B = f_2 - f_1$ označimo propusni opseg filtra, izraz se može svesti na:

$$y(t) = 2B\frac{\sin\pi B(t-t_o)}{\pi B(t-t_o)}\cos\omega_o(t-t_o)$$



Slika 4. Odziv u vremenskom domenu.

b) Kada je pobuda u vidu Hevisajdove funkcije:

$$X(j\omega) = \begin{cases} \pi\delta(\omega), & za \quad \omega = 0 \\ \dfrac{1}{j\omega}, & za \quad \omega \neq 0 \end{cases}$$

Signal na izlazu iz filtra je:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{-\omega_1}\frac{1}{j\omega}e^{j\omega(t-t_o)}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{1}{j\omega}e^{j\omega(t-t_o)}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{1}{\omega}\sin\omega(t-t_o)d\omega$$

S obzirom da je $\omega_o >> \omega_2 - \omega_1$, prethodni izraz je približno jednak:

$$y(t)=\frac{1}{\pi\omega_o}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\sin\omega(t-t_o)d\omega=\frac{2B}{\omega_o}\frac{\sin\pi B(t-t_o)}{\pi B(t-t_o)}\cos\left[\omega_o(t-t_o)-\frac{\pi}{2}\right]$$

Zaključuje se da se odzivi razlikuju samo u faktoru $\frac{1}{\omega_o}$ po amplitudi i za $-\pi/2$ u fazi.

Dakle, kada je propusni opseg filtra mali u odnosu na centralnu učestanost ω_o odzivi filtara propusnika opsega učestanosti na pobudu Dirakovim impulsom i Hevisajdovom funkcijom su sličnog vremenskog oblika.