

1. Pronaći odziv idealnog filtra propusnika opsega učestanosti na pobudu u vidu:

- a) Dirakovog impulsa
- b) Hevisajdove funkcije,

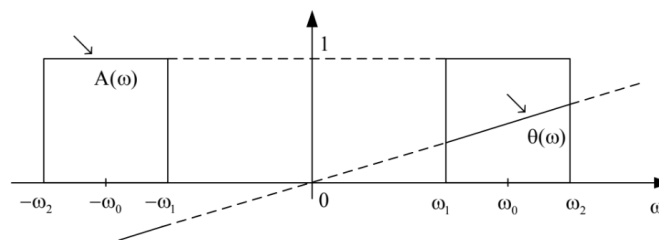
pod uslovom da između graničnih učestanosti ω_1 i ω_2 i srednje učestanosti ω_o propusnog opsega važi relacija:

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_o \gg \omega_2 - \omega_1$$

Rešenje:

Funkcija prenosa svakog sistema se može zapisati u obliku: $H(j\omega) = A(\omega)e^{j\Theta(\omega)}$

Za idealni filtar važi: $A(\omega) = const$, $\Theta(\omega) = -\omega t_o$.



Slika 1. Primjer amplitudske i faze karakteristike idealnog filtra propusnika opsega učestanosti.

Odziv tražimo primjenom inverzne Furijeove transformacije:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega) X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} H(j\omega) X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} H(j\omega) X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

gdje je $X(j\omega)$ Furijeova transformacija ulaznog signala $x(t)$.

Ako je filtar idealan, možemo uzeti da je: $A(\omega) = 1 = const$, $\Theta(\omega) = -\omega t_o$, tj. $H(j\omega) = e^{-j\omega t_o}$.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{-j\omega t_o} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_o)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_o)} d\omega$$

- a) Kada je ulazni signal Dirakov impuls:

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(j\omega) = 1$$

Na izlazu se dobija signal:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} 1 \cdot e^{j\omega(t-t_o)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} 1 \cdot e^{j\omega(t-t_o)} d\omega$$

S obzirom da važi: $e^{j\omega(t-t_o)} = \cos(\omega(t-t_o)) + j \sin(\omega(t-t_o))$, prethodni izraz je identičan sledećem:

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \omega(t-t_o) d\omega = \frac{1}{\pi(t-t_o)} (\sin \omega_2(t-t_o) - \sin \omega_1(t-t_o))$$

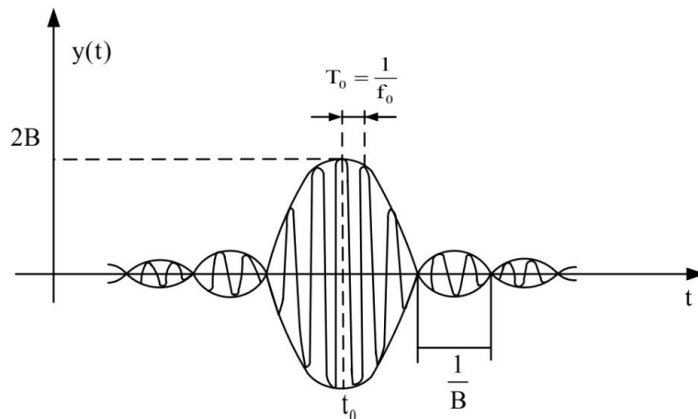
Iskoristićemo trigonometrijsku formulu: $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

$$y(t) = \frac{2}{\pi(t-t_o)} \cos((\omega_2 + \omega_1)(t-t_o)/2) \sin((\omega_2 - \omega_1)(t-t_o)/2), \text{ ili:}$$

$$y(t) = \frac{2}{\pi(t-t_o)} \cos(2\pi(f_2 + f_1)(t-t_o)/2) \sin(2\pi(f_2 - f_1)(t-t_o)/2)$$

Ako sa $B = f_2 - f_1$ označimo propusni opseg filtra, izraz se može svesti na:

$$y(t) = 2B \frac{\sin \pi B(t-t_o)}{\pi B(t-t_o)} \cos \omega_o(t-t_o)$$



Slika 2. Odziv u vremenskom domenu.

b) Kada je pobuda u vidu Hevisajdove funkcije:

$$X(j\omega) = \begin{cases} \pi\delta(\omega), & \text{za } \omega = 0 \\ \frac{1}{j\omega}, & \text{za } \omega \neq 0 \end{cases}$$

Signal na izlazu iz filtra je:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega(t-t_o)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega(t-t_o)} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-t_o) d\omega$$

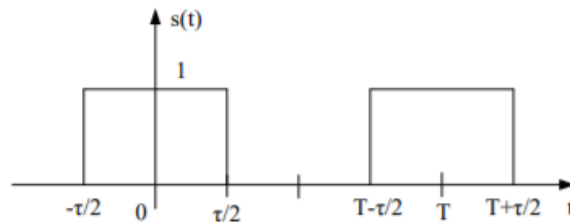
S obzirom da je $\omega_o \gg \omega_2 - \omega_1$, prethodni izraz je približno jednak:

$$y(t) = \frac{1}{\pi\omega_o} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin \omega(t-t_o) d\omega = \frac{2B}{\omega_o} \frac{\sin \pi B(t-t_o)}{\pi B(t-t_o)} \cos \left[\omega_o(t-t_o) - \frac{\pi}{2} \right]$$

Zaključuje se da se odzivi razlikuju samo u faktoru $\frac{1}{\omega_o}$ po amplitudi i za $-\pi/2$ u fazi.

Dakle, kada je propusni opseg filtra mali u odnosu na centralnu učestanost ω_o , odzivi filtera propusnika opsega učestanosti na pobudu Dirakovim impulsom i Hevisajdovom funkcijom su sličnog vremenskog oblika.

2. Spektar $F(j\omega)$ signala $f(t)$ ograničen je i zauzima opseg $|\omega| \leq \omega_m$. Pronaći spektar $X(j\omega)$ signala $x(t)=f(t)s(t)$, ako $s(t)$ predstavlja periodičnu povorku pravougaonih impulsa prikazanih na Slici3.



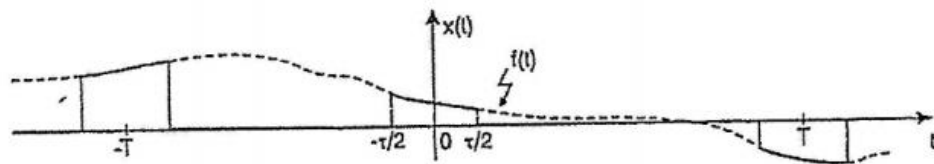
Slika 3. Povorka pravougaonih impulsa.

Signal $x(t)$ se dovodi na idealan filter propusnik niskih učestanosti koji ima funkciju prenosa:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1; & |\omega| \leq \omega_m \\ 0; & |\omega| > \omega_m \end{cases}$$

Pokazati da se na izlazu iz filtera dobija neizobličen signal $f(t)$, ako je $T \leq 1/(2f_m)$.

Rešenje:



Slika 4. Primjer diskretizacije signala $x(t)$ množenjem sa pravougaonom povorkom $s(t)$.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{jn\omega_o t}$$

$$S_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jn\omega_o t} dt = \dots = \frac{\tau}{T} \frac{\sin n\omega_o \tau / 2}{n\omega_o \tau / 2} \Rightarrow s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{T} \frac{\sin n\omega_o \tau / 2}{n\omega_o \tau / 2} e^{jn\omega_o t}$$

$$x(t) = f(t)s(t)$$

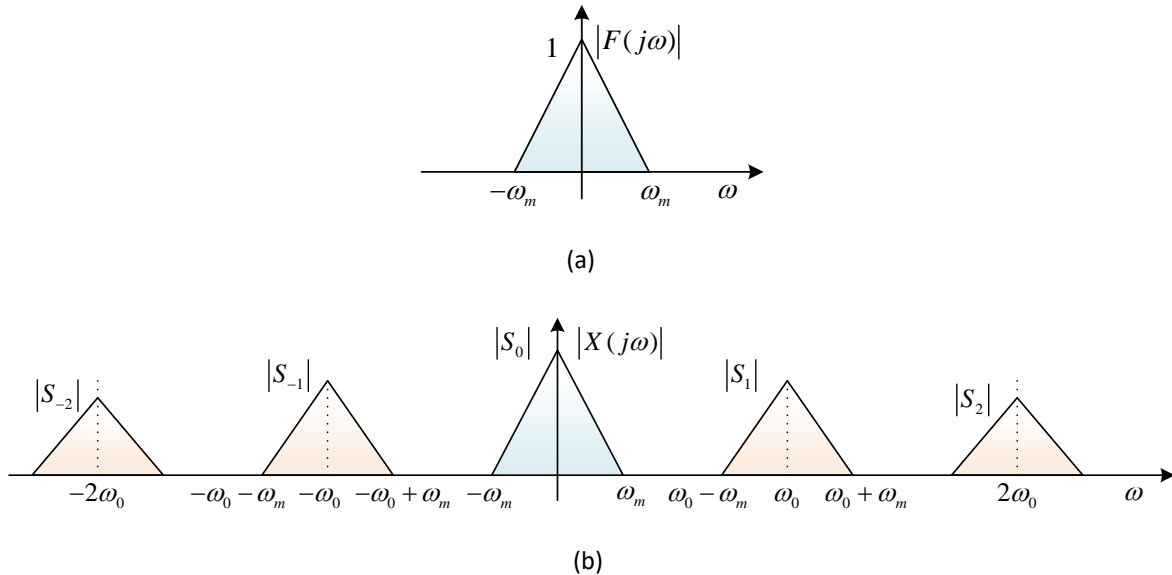
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)s(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{T} \frac{\sin n\omega_o \tau / 2}{n\omega_o \tau / 2} e^{jn\omega_o t} e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \frac{\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin n\omega_0\tau/2}{n\omega_0\tau/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega-n\omega_0)t} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega-n\omega_0)t} dt = F[j(\omega-n\omega_0)]$$

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n F[j(\omega-n\omega_0)]$$



Slika 4. Spekar signala $f(t)$ prije (a) i nakon odabiranja (b).

Ako se na ulaz idealnog filtra propusnika niskih učestanosti dovede signal $x(t)$, spekar signala na njegovom izlazu biće jednak onom dijelu spektra $X(j\omega)$ koji zauzima opseg $|\omega| \leq \omega_m$. Iz datog dijela spektra se može rekonstruisati signal $f(t)$ bez izobličenja ako je učestanost ω_0 tako izabrana da nema preklapanja spektra $S_0 F[j(\omega)]$ sa najbližim transponovanim spektrima $S_{\pm 1} F[j(\omega - \omega_0)]$. Do preklapanja neće doći ukoliko je:

$$\omega_0 - \omega_m \geq \omega_m \quad \text{tj.} \quad \omega_0 \geq 2\omega_m$$

3. Dvije prostoperiodične komponente čije su učestanosti $f_1=100\text{Hz}$ i $f_2=600\text{Hz}$ obrazuju signal $f(t) = U_1 \cos(2\pi f_1 t) + U_2 \cos(2\pi f_2 t)$. Signal $f(t)$ diskretizovan je po vremenu, tako da je $x(t)=f(t)s(t)$, gdje je $s(t)$ signal oblika sa Slike 3. Ako učestanost odabiranja $f_0=1/T$ iznosi:

- $f_0=1000$ Hz, pronaći spekar $X(j\omega)$ signala $x(t)$ i pokazati da se pomoću idealnog filtra propusnika niskih učestanosti ne može izdvojiti signal $f(t)$ iz $x(t)$.
- $f_0=1300$ Hz, pokazati da se pomoću istog filtra u ovom slučaju može izdvojiti signal $f(t)$ iz $x(t)$.

Rešenje:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{jn\omega_o t}$$

$$S_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jn\omega_o t} dt = \dots = \frac{\tau}{T} \frac{\sin n\omega_o \tau / 2}{n\omega_o \tau / 2}$$

$$s(t) = S_o + \sum_{n=1}^{+\infty} 2S_n \cos n\omega_o t$$

$$x(t) = f(t) \cdot s(t) = S_o f(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} 2S_n f(t) \cos n\omega_o t$$

$$x(t) = S_o U_1 \cos \omega_1 t + S_o U_2 \cos \omega_2 t + \sum_{n=1}^{+\infty} 2S_n [U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t] \cos n\omega_o t$$

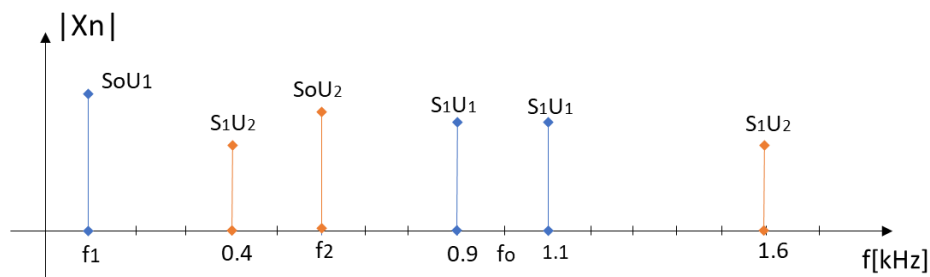
$$x(t) = S_o U_1 \cos \omega_1 t + S_o U_2 \cos \omega_2 t + \sum_{n=1}^{+\infty} 2S_n U_1 \cos \omega_1 t \cos n\omega_o t + \sum_{n=1}^{+\infty} 2S_n U_2 \cos \omega_2 t \cos n\omega_o t$$

Ako iskorisimo trigonometrijsku formulu za proizvod dva kosinusa:

$$x(t) = S_o U_1 \cos \omega_1 t + S_o U_2 \cos \omega_2 t + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n [U_1 \cos(n\omega_o + \omega_1)t + U_1 \cos(n\omega_o - \omega_1)t] + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n [U_2 \cos(n\omega_o + \omega_2)t + U_1 \cos(n\omega_o - \omega_2)t]$$

Sada možemo skicirati spektralizlaznog signala:

a)



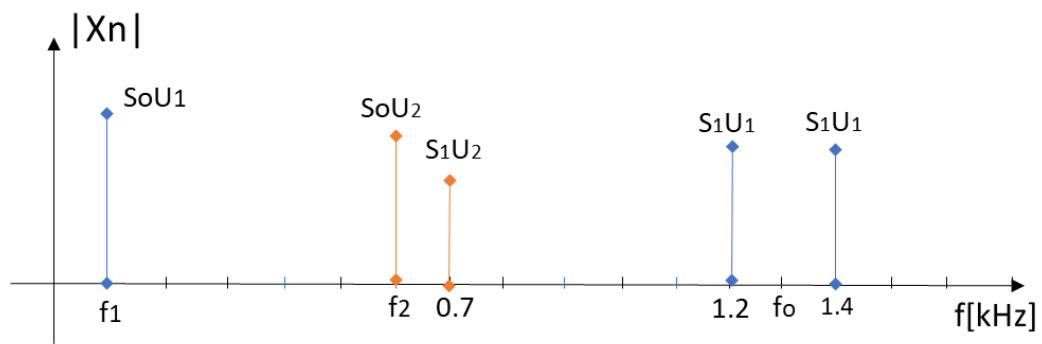
Slika 5. Dio amplitudskog spektra signal x(t).

Propuštanjem signala x(t) kroz idealni filter propusnik niskih učestanosti dobija se signal:

$$y(t) = S_o f(t) + S_1 U_2 \cos(\omega_o - \omega_2)t$$

Dakle, pored skaliranog originalnog signala f(t) imamo i signal izobličenja. Ovo je očekivano jer nije ispunjen uslov teoreme o odabiranju.

b)



Slika 6. Dio amplitudskog spektra signal $x(t)$.

Ispunjen je uslov teoreme o odabiranju pa na izlazu idealnog niskopropusnog filtra dobijamo:

$$y(t) = S_o f(t)$$