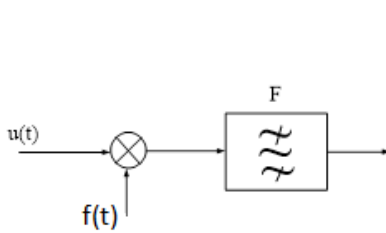


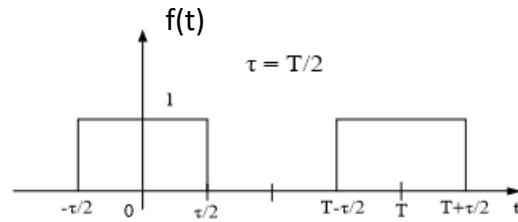
MODULACIJE

1. Spektar $U(j\omega)$ signala $u(t)$ je ograničen i nalazi se u opsegu učestanosti $|f| \leq f_m$. Ovaj signal se množi periodičnom povorkom impulsa $s(t)$ i propušta kroz idealan filter F , propusnik opsega učestanosti, kako je to prikazano na slici 1. Za signal $s(t)$ prikazan na slici 2 i propusni opseg filtra F od $14 f_m$ do $16 f_m$ pronaći spektar signala na izlazu iz filtra i reći kako je modulisan ovaj signal, ako je:

- a) $T=1/(4f_m)$; b) $T=1/(7f_m)$; c) $T=1/(5f_m)$.



Slika 1.



Slika 2.

Rešenje:

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|F_n| \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$F_n = |F_n| e^{j\theta_n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

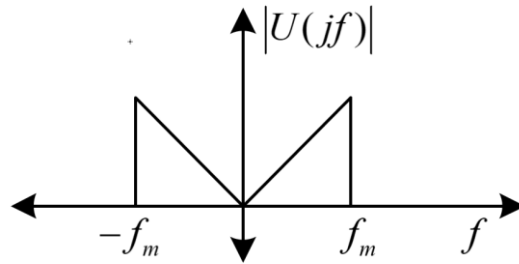
$$F_n = \frac{1}{2} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \right| \cos(n\omega_0 t)$$

Na ulazu u filter imamo signal:

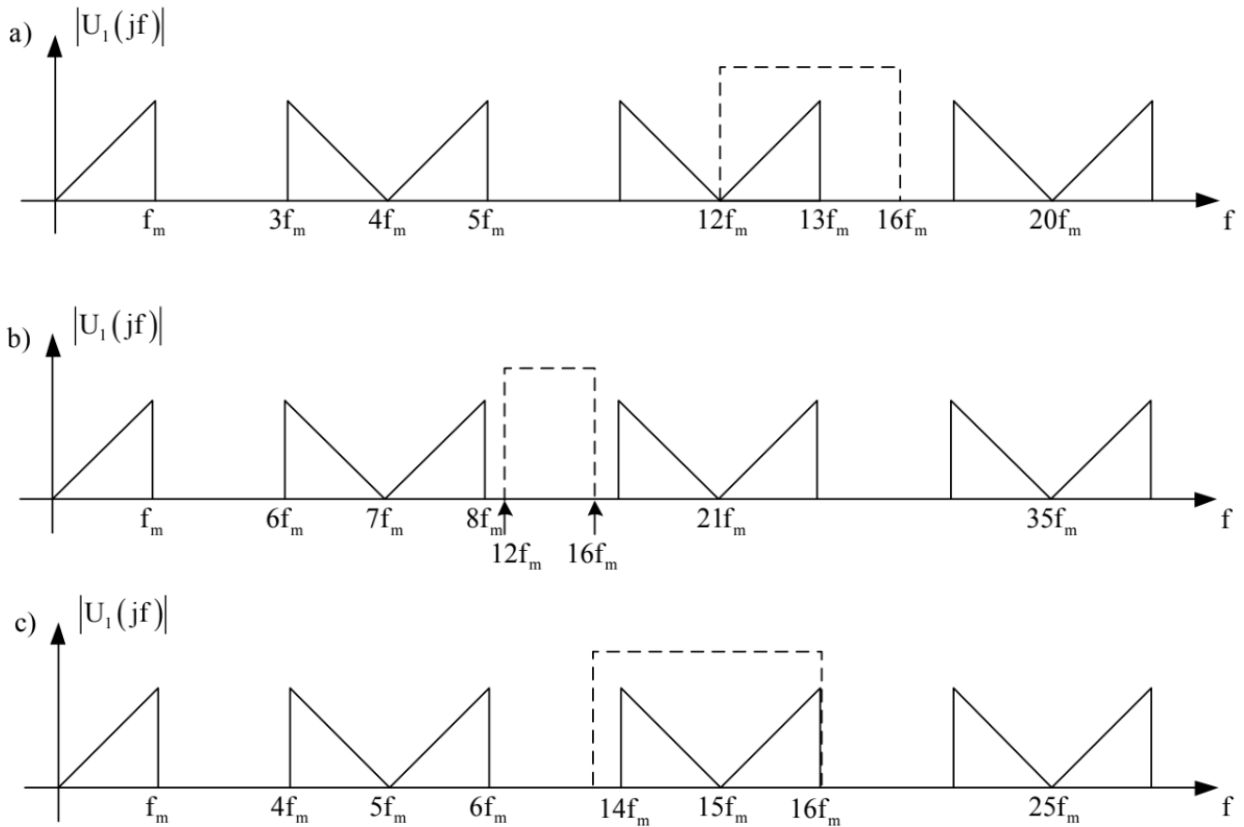
$$u_1(t) = k_p u(t) f(t) = k_p \frac{1}{2} u(t) + k_p u(t) \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \right| \cos(n\omega_0 t)$$

Signal $u_1(t)$ sastoji se od originalnog signala $u(t)$, skalirnog sa konstantom $k_p \frac{1}{2}$, i beskonačnog broja komponenti nastalih modulisanjem harmonika signala $f(t)$ sa signalom $u(t)$. Uočimo da su amplitude parnih harmonika signala $f(t)$ jednaki nuli.

Ukoliko pretpostavimo da spektar signala $u(t)$ ima oblik prikazan na Slici 3, signalu na ulazu u filter odgovara spektar sa Slike 4 (**napomena:** faktori skaliranja različitih komponenti nisu uzeti u obzir prilikom ilustracije).



Slika 3. Spektar signala $u(t)$.



Slika 5. Signali na ulazu (puna linija) i izlazu filtra (ovičeni isprekidanom linijom) za postavke zadatka pod a), b) i c).

$$a) T = \frac{1}{4f_m} \Rightarrow f_o = 4f_m$$

Na izlazu iz filtra imamo AM-1BO signal sa gornjim bočnim opsegom.

$$b) T = \frac{1}{7f_m} \Rightarrow f_o = 7f_m$$

Na izlazu iz filtra nema signala.

$$c) T = \frac{1}{5f_m} \Rightarrow f_o = 5f_m$$

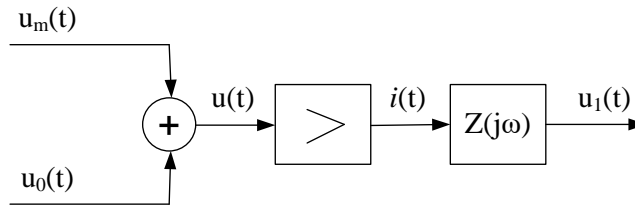
Na izlazu iz filtra imamo AM-2BO signal.

2. Signali $u_m(t)=U_m\cos\omega_m t$ i $u_0(t)=U_0\cos\omega_0 t$ predstavljaju modulišući signal i nosilac. Njihove amplitude imaju vrijednosti $U_m=2V$ i $U_0=5V$, a učestanosti $f_m=1kHz$ i $f_0=1MHz$. Oba signala se dovode na ulaz nelinearnog pojačavača, kako je to prikazano na slici 3. Između struje na izlazu pojačavača $i(t)$ i napona na njegovom ulazu, postoji relacija:

$$i(t) = a_1 u(t) + a_2 u^2(t),$$

u kojoj je $a_1 = 2mA/V$ i $a_2 = 0,1mA/V^2$.

- a) Izračunati učestanosti svih prostoperiodičnih komponenti struje $i(t)$,
 b) Pronaći stepen modulacije i nacrtati približno vremenski oblik onog dijela struje $i(t)$, koji predstavlja amplitudski modulisan signal.



Slika 4.

Rešenje:

Prema blok šemi na Slici 4, napon na ulazu pojačavača je:

$$u(t) = U_m \sin \omega_m t + U_o \sin \omega_o t$$

Na izlazu iz pojačavača imamo signal:

$$i(t) = a_1 [U_m \sin \omega_m t + U_o \sin \omega_o t] + a_2 [U_m \sin \omega_m t + U_o \sin \omega_o t]^2$$

$$i(t) = a_1 U_m \sin \omega_m t + a_1 U_o \sin \omega_o t + a_2 U_m^2 \sin^2 \omega_m t + 2a_2 U_m U_o \sin \omega_m t \sin \omega_o t + a_2 U_o^2 \sin^2 \omega_o t$$

$$i(t) = a_1 U_m \sin \omega_m t + a_1 U_o \sin \omega_o t + a_2 U_m^2 \left(\frac{1 - \cos 2\omega_m t}{2} \right) + 2a_2 U_m U_o \left[\frac{1}{2} \cos(\omega_o - \omega_m)t - \frac{1}{2} \cos(\omega_o + \omega_m)t \right] + a_2 U_o^2 \left(\frac{1 - \cos 2\omega_o t}{2} \right)$$

$$i(t) = \frac{a_2}{2} (U_m^2 + U_o^2) + a_1 U_m \sin \omega_m t - \frac{a_2}{2} U_m^2 \cos 2\omega_m t + a_2 U_m U_o \cos(\omega_o - \omega_m)t + a_1 U_o \sin \omega_o t - a_2 U_m U_o \cos(\omega_o + \omega_m)t - \frac{a_2}{2} U_o^2 \cos 2\omega_o t$$

Na osnovu podataka iz teksta zadatka izračunate su amplitude i učestanosti spektralnih komponenti iz u prethodnog izlaza. Rezultatati su prikazani u Tabeli 1.

Tabela 1.

f	0	f_m	$2f_m$	$f_0 - f_m$	f_0	$f_0 + f_m$	$2f_0$
f[kHz]	0	1	2	999	1000	1001	2000
I[mA]	1,45	4	0,2	1	10	1	1,25

Komponente na učestanostima $f_o - f_m$, f_o i $f_o + f_m$ obrazuju KAM signal oblika:

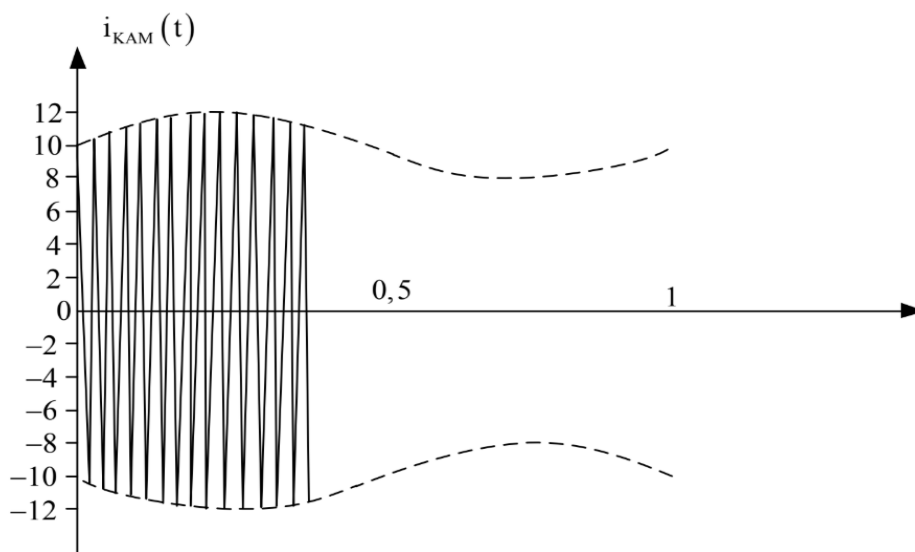
$$i_{KAM}(t) = a_2 U_m U_o \cos(\omega_o - \omega_m)t + a_1 U_o \sin \omega_o t - a_2 U_m U_o \cos(\omega_o + \omega_m)t$$

$$i_{KAM}(t) = a_1 U_o \left(1 + 2 \frac{a_2}{a_1} \sin \omega_m t \right) \sin \omega_o t$$

Stepen modulacije u ovom slučaju iznosi:

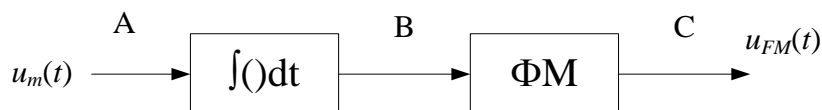
$$m = 2 \frac{a_2}{a_1} U_m = 0.2$$

Vremenski oblik struje $i_{KAM}(t)$ prikazan je na Slici 5 punom linijom, a anvelopa isprekidanom.



Slika 5. KAM signal (amplituda nosioca je $a_1 U_o = 10mA$, a indeks modulacije 0.2).

3. U jednom od postupaka za dobijanje FM signala koristi se integrator i fazni modulator kao što je prikazano na slici.



Slika 5

Na ulaz u integrator dovodi se test signal $u_m(t) = U_m \cos \omega_m t$ pri čemu učestanost ovog signala može da ima bilo koju vrijednost između 0,3kHz do 3,4kHz. Karakteristika integratora je takva da pri učestanosti $f_m = 1\text{kHz}$ i amplitudi $U_m = 1\text{V}$ signal na njegovom izlazu ima amplitudu $U_B = 0,06\text{V}$. Amplituda prostoperiodičnog napona U_B na ulazu u ΦM i devijacija faze na njegovom izlazu $\Delta\Phi_0$ direktno su srazmjerne sve do vrijednosti $U_B = 0,3\text{V}$, kada je $\Delta\Phi_0 = 50\text{rad}$. Za vrijednosti $U_B > 0,3\text{V}$ devijacija faze više nije direktno srazmjerna amplitudi U_B . Izračunati:

- Najveću vrijednost amplitude test signala U_m pri kojoj je frekventijski modulator još uvijek linearan,
- Devijaciju učestanosti FM signala u tački C,
- Opseg učestanosti u kome se nalaze značajne komponente spektra FM signala

Rešenje:

Signal u tački B, koji je proporcionalan integralu modulišućeg signala $u_m(t)$ da je izrazom:

$$u_B(t) = k_i \int_{-\infty}^{\infty} u_m(\tau) d\tau = \frac{k_i U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t$$

gdje je k_i konstanta integratora.

Vrijednost konstante integratora može se odrediti na osnovu podatka da pri učestanosti $f_m=1\text{kHz}$ i amplitudi $U_m=1\text{V}$ signal na njegovom izlazu integratora ima amplitudu $U_B=0,06\text{V}$.

$$k_i = \frac{\omega_m U_B}{U_m} = \frac{2\pi f_m U_B}{U_m} = \frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 0,06}{1} = 120\pi \text{ rad / s}$$

- Linearnost frekventijskog modulatora određena je linearnošću faznog modulatora. Kako je fazni modulator linearan sve dok je:

$$U_B = \frac{k_i U_m}{\omega_m} \leq 0,3\text{V}$$

najveća dozvoljena vrijednost amplitude test signala je:

$$(U_m)_{\max} = \frac{0,3(\omega_m)_{\min}}{k_i} = 1,5\text{V}$$

pri čemu je $(\omega_m)_{\min} = 2\pi \cdot 300 \text{ rad / s}$.

- Frekventijski modulisan signal na izlazu iz faznog modulatora ima oblik:

$$u_{FM}(t) = U_o \cos[\omega_o t + k_\phi u_B(t)]$$

gdje su U_o i ω_o amplituda i kružna učestanost nosioca, a k_ϕ je konstanta proporcionalnosti faznog modulatora. Vrijednost konstante k_ϕ dobijamo iz uslova da je $\Delta\Phi_o = k_\phi U_B$.

$$k_\phi = \frac{\Delta\Phi_o}{U_B} = \frac{50}{0,3} = 166,7 \text{ rad / V}$$

Trenutna devijacija učestanosti frekventijski modulisanog signala $u_{FM}(t)$ u tački C je:

$$\delta f_i = \frac{k_\phi}{2\pi} \frac{du_B(t)}{dt} = \frac{k_\phi k_i}{2\pi} U_m \cos \omega_m t$$

Odakle slijedi da je maksimalna devijacija učestanosti jednaka:

$$\Delta f_o = \frac{k_\phi k_i}{2\pi} (U_m)_{\max} = 15 \text{kHz}$$

- c) Opseg učestanosti u kom se nalaze sve značajne komponente spektra frekvencijski modulisanog signala $u_{FM}(t)$ određuje se prema Karsonovom obrascu:

$$B = 2(m+1)f_m = 2(\Delta f_o + f_m)$$

Pri tome se mora uzeti najviša učestanost u spektru test signala, tako da je traženi opseg učestanosti:

$$B = 2(15 + 3.4) \text{kHz} = 36.8 \text{kHz}$$

4. U opsegu B prenosi se N radio signala $u_i(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \Delta \omega_0 \int m_i(\tau) d\tau)$, gdje je $i=1, \dots, N$. Najviša učestanost u spektru signala $m_i(t)$ je f_m , pri čemu je $|m_i(t)| \leq 1$, a $\Delta f_0 = 5f_m \ll B$.
- Odrediti maksimalan broj radio signala koji mogu da se prenesu u datom opsegu B ,
 - Za koliko treba smanjiti devijaciju učestanosti Δf_0 da bi u datom opsegu moglo da se prenese $2N$ signala?

Rešenje:

- a) Prema Karsonovom obrascu potrebna širina opsega frekvencijski modulisanog signala je:

$$B_i = 2f_m(m+1) = 2f_m \left(\frac{\Delta f_o}{f_m} + 1 \right) = 2(\Delta f_o + f_m)$$

S obzirom da je $\Delta f_0 = 5f_m$, dobijamo $B_i = 12f_m$. Stoga, maksimalan broj signala koji se može prenijeti u opsegu širine B je:

$$N = \frac{B}{B_i} = \frac{B}{12f_m}$$

- b) Sada je:

$$N^i = 2N = \frac{B}{B_i}$$

$$B_i^i = 2f_m(m^i + 1) = 2f_m \left(\frac{\Delta f_o^i}{f_m} + 1 \right) = 2(\Delta f_o^i + f_m)$$

$$2N = \frac{B}{2(\Delta f_o^i + f_m)}$$

Ako uvrstimo N dobijeno pod a), dobijamo:

$$\frac{B}{2(\Delta f_o^i + f_m)} = \frac{B}{6f_m} \Rightarrow \Delta f_o^i = 2f_m$$