UNIVERZITET CRNE GORE

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Osnove telekomunikacija

Doc. dr Enis Kočan (enisk@ucg.ac.me)

Saradnici: Dr Uglješa Urošević (ugljesa@ucg.ac.me)

MSc Slavica Tomović (slavicat@ucg.ac.me)

SADRŽAJ KURSA

1. Uvod. Opšti model telekomunikacionog sistema. Vrste prenosa signala.
2. Medijumi za prenos. Pojam modulacije.
3. Multipleksiranje. Referentni model za povezivanje otvorenih sistema (OSI i TCP/IP)
4. Harmonijska analiza periodičnih signala
5. **Analiza aperiodičnih signala i slučajnih signala**
6. Prenos signala kroz linearne sisteme. Izobličenja pri prenosu signala
7. Ampllitudske modulacije
8. Demodulacija AM signala. Realizacija multipleksa sa frekvencijskom raspodjelom kanala
9. Ugaona modulacija. Spektar UM signala
10. FM modulatori. Demodulacija FM signala
11. Slučajni šum. Karakteristike uskopojasnog šuma
12. Uticaj šuma na prenos amplitudski modulisanih signala
13. Uticaj šuma na prenos ugaono modulisanih signala

Termin 5 - Sadržaj

- **Fourierov integral**
- Korelacija aperiodičnih signala
- Konvolucija aperiodičnih signala
- Analiza slučajnih signala
- Uloga i značaj harmonijske analize determinističkih signala

Fourrierov integral

- Aperiodični deterministički signali mogu se opisati funkcijama koje su aperiodične u vremenskom domenu, tj. funkcijama za koje ne važi ***f*(t)=*f*(t+T)**.
- Periodična funkcija izražena Fourrierovim redom može se smatrati aperiodičnom ako njena perioda teži beskonačnosti. Dakle:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\mu) e^{-jn\omega_0 \mu} d\mu$$

Kada T$\rightarrow\infty$: $\omega_0 \rightarrow d\omega$, $n\omega_0 \rightarrow \omega$ i $\sum \rightarrow \int$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) e^{-j\omega\mu} d\mu$$

Ovaj izraz predstavlja ***Fourrierov integral za aperiodičnu funkciju***, pri čemu je uslov za njegovu egzistenciju:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad \text{ili} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt < \infty$$

Spektralna gustina amplituda i faza

- Analogno predstavljanju periodične funkcije u obliku Fourrierovog reda, dobija se ***Fourrierov transformacioni par za aperiodičnu funkciju*** *f*(t)***:***

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

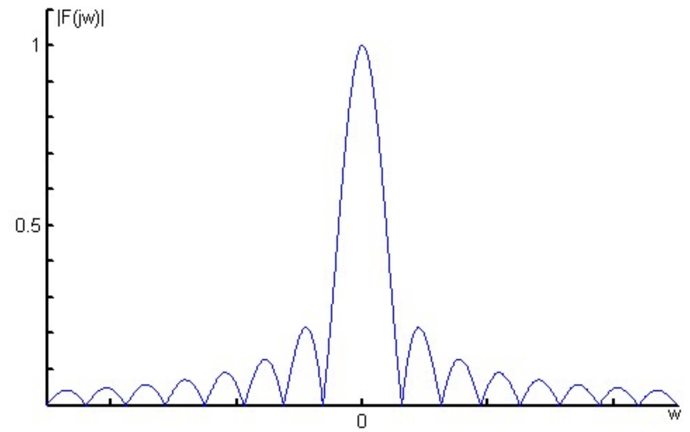
$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

F(jω) je ***Fourrierova transformacija aperiodične funkcije*** *f*(t), i ona je kontinualna funkcija učestanosti ω. Funkcija *f*(t), je ***inverzna Fourrierova transformacija funkcije*** F(jω).

$$F(j\omega)=|F(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

|F(jω)| - **spektralna gustina amplituda** aperiodičnog signala *f*(t) (uvijek parna funkcija)

θ(ω) - **spektralna gustina faza** aperiodičnog signala *f*(t), (uvijek neparna funkcija).



Ove dvije veličine za aperiodične funkcije su ***kontinualne***.

Termin 5 - Sadržaj

- Fourierov integral
- **Korelacija aperiodičnih signala**
- Konvolucija aperiodičnih signala
- Analiza slučajnih signala
- Uloga i značaj harmonijske analize determinističkih signala

Korelacija aperiodičnih signala

- Za dvije aperiodične funkcije $f_1(t)$ i $f_2(t)$ izraz:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t+\tau) dt$$

se naziva ***korelacionom funkcijom*** aperiodičnih signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$.
Korelacija dva signala podrazumijeva tri koraka:

1. Pomjeranje jedne funkcije u vremenu za τ
2. Množenje te pomjerene funkcije drugom funkcijom
3. Izračunavanje integrala proizvoda takve dvije funkcije

Neka funkcije $f_1(t)$ i $f_2(t)$ imaju Fourrierove transformacije $F_1(j\omega)$ i $F_2(j\omega)$.
Prema definiciji, njihova korelacija je:

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega) e^{j\omega(t+\tau)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{j\omega t} dt$$

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1^*(j\omega) F_2(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Teorema o korelaciji aperiodičnih funkcija: Korelaciona funkcija $R_{12}(\tau)$ i proizvod $F_1^*(j\omega)F_2(j\omega)$ predstavljaju Fourrierov transformacioni par.

- Specijalni slučaj korelacije kada je $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$: ***autokorelaciona funkcija*** aperiodične funkcije $f(t)$:

$$R_{11}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega)F(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$R_{11}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|F(j\omega)\right|^2 e^{j\omega\tau}d\omega$$

Kako je $\mathbf{|F(j\omega)|^2 = S_{11}(\omega)}$ ***spektralna gustina energije*** aperiodičnog signala $f(t)$, to je:

$$R_{11}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$S_{11}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

Teorema o autokorelaciji aperiodičnih funkcija:
Spektralna gustina energije aperiodičnog signala $f(t)$ i autokorelaciona funkcija $R_{11}(\tau)$ obrazuju Fourrierov transformacioni par.

Kada je ***τ*=0**:

$$R_{11}(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(j\omega)\right|^2 d\omega$$

$$R_{11}(0)=\left[f_{eff}(t)\right]^2$$

čime se definiše ***Parsevalova teorema za aperiodične signale***.

Pri tome je autokorelaciona funkcija parna:

$$R_{11}(\tau)=R_{11}(-\tau)$$

• Da bi se istakla razlika između autokorelacione funkcije i korelacije dvije različite funkcije, uvodi se pojam ***unakrsne korelacione funkcije***, a veličina:

$$S_{12}(\omega)=F_1^*(j\omega)F_2(j\omega)$$

se naziva ***spektralna gustina unakrsne energije***, ili ***spektar funkcije*** $R_{12}(\tau)$.

Pri tome, važe relacije:

$$R_{21}(\tau)=R_{12}(-\tau)$$

$$S_{21}(\omega)=F_1(j\omega)F_2^*(j\omega)=S_{12}^*(\omega)$$

Termin 5 - Sadržaj

- Fourierov integral
- Korelacija aperiodičnih signala
- **Konvolucija aperiodičnih signala**
- Analiza slučajnih signala
- Uloga i značaj harmonijske analize determinističkih signala

Konvolucija aperiodičnih signala

- Izraz čiji je oblik:

$$\rho_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(\tau-t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)F_2(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

naziva se ***konvolucijom aperiodičnih funkcija*** f_1(t) i f_2(t) ili ***konvolucionim integralom***. Konvolucija podrazumijeva sledeća tri koraka:

1. jedna od funkcija se pomjera u vremenu za τ i prelazi u lik simetričan u odnosu na ordinatnu osu
2. tako dobijena funkcija množi se drugom funkcijom
3. računa se integral njihovog proizvoda u neograničenom intervalu

$$\rho_{12}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)F_2(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$F_1(j\omega)F_2(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_{12}(\tau)e^{-j\omega\tau}dt$$

Teorema o konvoluciji aperiodičnih funkcija:

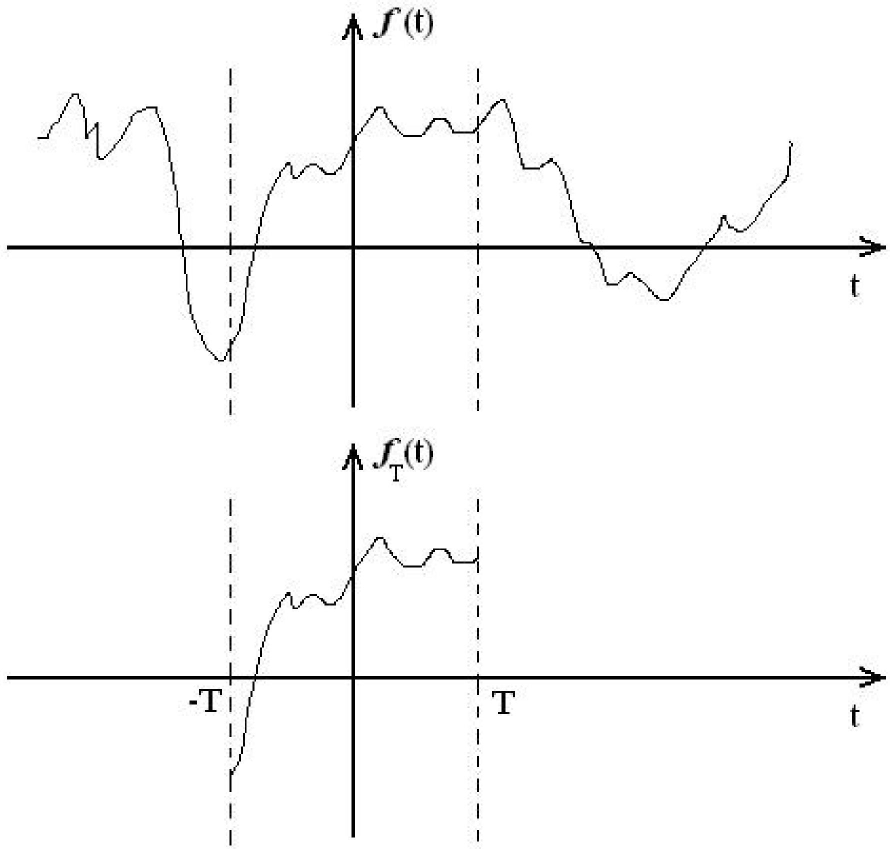
Konvolucija dvije aperiodične funkcije $\rho_{12}(\tau)$ i proizvod $F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega)$ obrazuju Fourrierov transformacioni par.

Termin 5 - Sadržaj

- Fourierov integral
- Korelacija aperiodičnih signala
- Konvolucija aperiodičnih signala
- **Analiza slučajnih signala**
- Uloga i značaj harmonijske analize determinističkih signala

Analiza slučajnih signala

- Slučajne signale nije moguće opisati preciznim analitičkim izrazom u vremenu, pa nije moguće koristiti Fourrierovu analizu. Opisivanje ovakvih signala se vrši metodama teorije statistike.



Da bi izveli potrebne zaključke, posmatrajmo samo jedan dio koji se nalazi u intervalu (-T, T) jednog slučajnog signala:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & t < |T| \\ 0 & t > |T| \end{cases}$$

Ovako dobijena funkcija je aperiodična, ograničena, pa je njena Fourrierova transformacija:

$$F_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F_T(j\omega) = \int_{-T}^{T} f_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

Srednja snaga slučajnog signala služi kao parametar za njegovo opisivanje. Definiše se na sledeći način:

- Za ograničenu funkciju f_T(t) snaga se definiše kao:

$$P_{srT}=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T^2(t)dt$$

Kako je f(t)=f_T(t) kada T→∞, to je:

$$P_{sr}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T^2(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_T(j\omega)F_T^*(j\omega)d\omega$$

$$P_{sr}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|F_T(j\omega)\right|^2}{2T}d\omega$$

Shodno prethodnim razmatranjima, ako označimo veličinu:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\left|F_T(j\omega)\right|^2}{2T}=S_{11}(\omega)$$

što predstavlja **spektralnu gustinu srednje snage slučajnog signala** f(t), dobija se:

$$P_{sr}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(\omega)d\omega$$

Autokorelaciona funkcija slučajnog signala:

$$R_{T11}(\tau)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T(t) f_T(t+\tau)dt=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F_T(j\omega)\right|^2 e^{j\omega\tau}d\omega$$

Za granični slučaj kada T→∞:

$$R_{11}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_T(t) f_T(t+\tau)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|F_T(j\omega)\right|^2}{2T}e^{j\omega\tau}d\omega$$

Uz uvedenu oznaku za spektralnu gustinu srednje snage slučajnog signala *f*(t), važi:

$$R_{11}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$S_{11}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

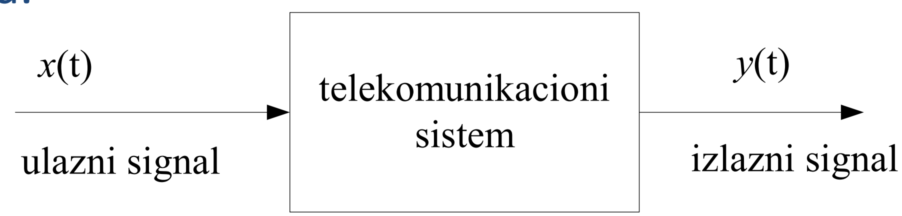
što predstavlja **Wiener-Hinchin**-ovu teoremu za slučajne signale: Autokorelaciona funkcija slučajnog signala i njena spektralna gustina srednje snage predstavljaju Fourrierov transformacioni par.

Termin 5 - Sadržaj

- Fourierov integral
- Korelacija aperiodičnih signala
- Konvolucija aperiodičnih signala
- Analiza slučajnih signala
- **Uloga i značaj harmonijske analize determinističkih signala**

Uloga i značaj harmonijske analize determinističkih signala

- Osnovna uloga harmonijske analize je da se vremenska funkcija, koja opisuje signal, predstavi u domenu učestanosti podesno izabranim parametrima kako bi se omogućilo analitičko praćenje prenosa signala telekomunikacionim sistemima.
    - Na taj način se stvaraju uslovi za utvrdjivanje nivoa tačnosti u prenosu signala, odnosno kvaliteta sa kojim se odredjenim sistemom prenose informacije.
- Eventualne promjene u signalu tokom njegovog prenosa se utvrdjuju na osnovu uporedjivanja signala na ulazu u sistem (pobuda) sa signalom na izlazu iz sistema (odziv).
    - Upravo primjena harmonijske analize omogućava ovo uporedjenje na relativno jednostavan način, odnosno nalaženje medjusobnog odnosa odziva i pobude sistema.



Veliki broj sklopova telekomunikacionih sistema su po svom opštem karakteru ***linearne mreže sa konstantnim parametrima***:

- ***mreže sa konstantnim parametrima*** **-** mreže koje imaju osobinu da ako pobudnom signalu *x*(t) odgovara izlazni signal *y*(t), onda pobudnom signalu *x*(t+τ) odgovara izlazni signal *y*(t+τ). (Ove mreže se nazivaju i ***vremenski invarijantne mreže***).

- ***linearne mreže*** - mreže koje imaju osobinu da, ako se za pobudni signal x_i(t) dobija izlazni signal y_i(t), onda ulazni signal oblika:

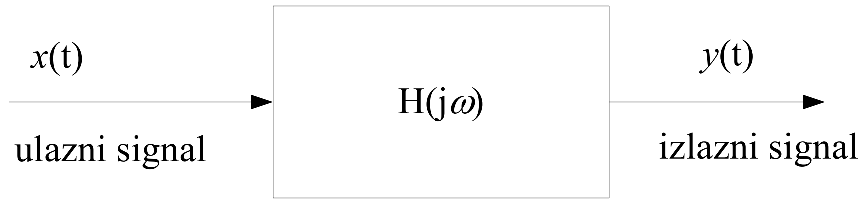
$$x(t)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i(t)=a_1 x_1(t)+a_2 x_2(t)+\ldots+a_n x_n(t)$$

dovodi do izlaznog signala oblika:

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n} a_i y_i(t)=a_1 y_1(t)+a_2 y_2(t)+\ldots+a_n y_n(t)$$

Osnovna osobina linearnih mreža sa konstantnim parametrima je da se u njima **ne generišu novi harmonici signala tokom prenosa**, tj. sve promjene na prenošenom signalu se dešavaju na nivou njegovih amplituda i faza, ali ne i na nivou njegovih učestanosti.

Prenosna (transfer) funkcija linearnih mreža sa konstantnim parametrima:



$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\chi(\omega)}$$

gdje se sa:

- $|H(j\omega)|$ **modeluju promjene amplitude signala**
- $\chi(\omega)$ **modeluju promjene faze signala**
- <u>Odziv sistema (signal na njegovom izlazu) može naći u</u>:

1. domenu učestanosti ili
2. domenu vremena

s tim što se u oba slučaja primjenjuje harmonijska analiza.

Nalaženje odziva sistema u domenu učestanosti

1. Ako je ulazni signal x(t) opisan nekom periodičnom vremenskom funkcijom složenog talasnog oblika, onda se Fourrierovom analizom može predstaviti Fourrierovim redom kao suma harmonika (prosto periodičnih funkcija-sinusoida):

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Pošto za linearne mreže sa konstantnim parametrima važi zakon superpozicije, to se uticaj mreže na svaku sinusoidalnu komponentu može zasebno posmatrati. Drugim riječima, poznavanje funkcije prenosa H(jω), za sve odgovarajuće vrijednosti ω, omogućava da se pronađu spektralne komponente (harmonici) izlaznog signala

$$Y_n = H(j\omega)X_n = H(jn\omega_0)X_n$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n e^{jn\omega_0 t}$$

2. Ako je ulazni signal opisan nekom aperiodičnom vremenskom funkcijom x(t), i Fourrierova transformacija ove funkcije je *X*(jω). Tada se signal *x*(t) može izraziti inverznom transformacijom svog kompleksnog spektra *X*(jω):

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Izlazni signal u domenu učestanosti, odnosno njegov kompleksni spektar, se nalazi kao:

$$Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)$$

Na osnovu prethodnog, i poznavanja prenosne funkcije sistema, analitički izraz za izlazni signal u domenu vremena se dobija kao:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

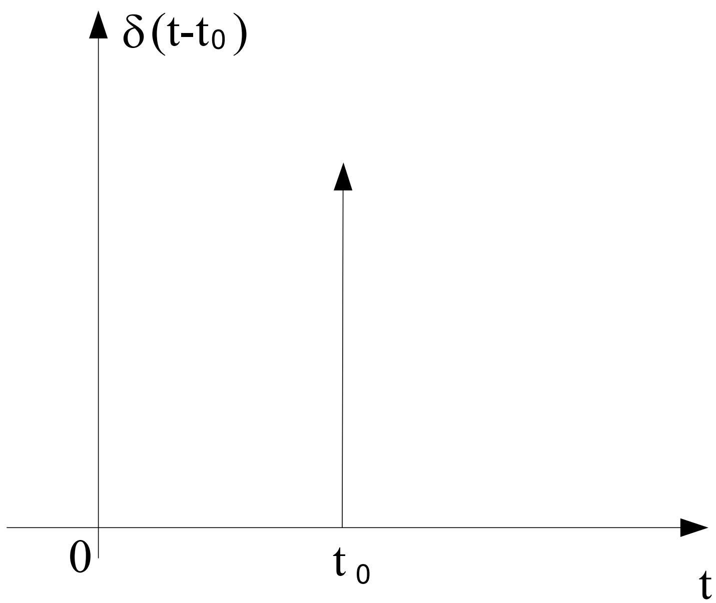
Zaključak: ako je poznat odziv linearne mreže sa konstantnim parametrima čitavom skupu sinusoidalnih pobuda svih mogućih učestanosti, tada se odziv te iste mreže na bilo koji drugi pobudni signal može jednoznačno odrediti.
Za obje klase determinističkih signala, periodične i aperiodične, zahvaljujući harmonijskoj analizi, proučavanje njihovog prenosa svodi se u suštini na poznavanje odziva mreže sinusoidalnoj pobudi, odnosno na poznavanje karakteristika mreže u stacionarnom režimu.

- **Odziv sistema u domenu učestanosti se nalazi na sledeći način:**

1. **Definiše se pobuda u domenu učestanosti: X_n ili $X(j\omega)$**
2. **Odredi se proizvod funkcije prenosa sistema i spektra pobude ($H(j\omega)X_n$ ili $H(j\omega)X(j\omega)$) čime se dobija odziv u domenu učestanosti :Y_n ili $Y(j\omega)$**
3. **Inverznom Fourrierovom transformacijom određuje se analitički oblik izlaznog signala (odziva) u domenu vremena**

Nalaženje odziva sistema u domenu vremena

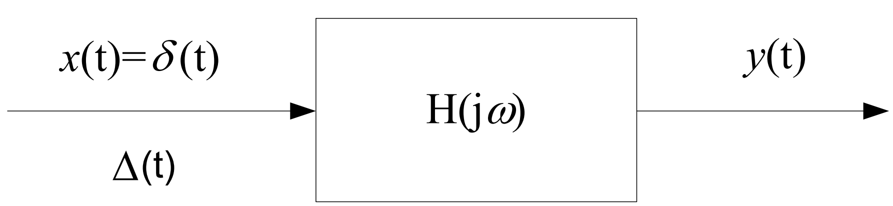
- **Transfer (prenosna) funkcija sistema *H(jω)*** može da se definiše kao odziv sistema na pobudu u vidu Dirakovog (delta) impulsa.



$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$$

$$\Delta(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$$



$$Y(j\omega)=H(j\omega)\Delta(j\omega)=H(j\omega)$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$y(t)=h(t)$$

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$$

Zaključak: odziv linearne mreže *h*(t) impulsnoj aperiodičnoj pobudi u vidu delta funkcije i funkcija prenosa mreže H(jω) obrazuju Fourrierov transformacioni par.

h(t) se naziva ***impulsni odziv sistema***. Ukoliko je on poznat može se naći odziv mreže *y*(t) na bilo koju pobudu *x*(t).

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\mu)e^{-j\omega\mu}d\mu d\omega$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\mu)d\mu\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega(t-\mu)}d\omega$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\mu)x(t-\mu)d\mu=\int_{-\infty}^{\infty}x(\mu)h(t-\mu)d\mu$$

Izlazni signal je ***konvolucija*** ulaznog signala i impulsnog odziva sistema!!!

Osnovne karakteristike signala koji predstavljaju realne poruke

1. SIGNAL GOVORA
   - Opseg učestanosti od 300Hz do 3400Hz usvojen je od strane CCITT-a (ITU) za standardnu širinu kanala za prenos govora.
   - Opsezi (300-2400)Hz i (300-2700)Hz primjenjuju se u vezama redukovanog kvaliteta.

2. SIGNAL MUZIKE
   - Propisana potrebna širina opsega za prenos muzičkog signala je 30-15000Hz.
   - Postoje sistemi čija je širina opsega 50Hz-10 000Hz, ali je u njima kvalitet prenosa nešto lošiji.

3. SIGNALI PODATAKA I TELEGRAFSKI SIGNALI
   - Spektar je povezan sa brzinom signaliziranja

4. TELEVIZIJSKI SIGNAL (SIGNAL POKRETNE SLIKE)
   - Opseg koji zauzima video signal je od 10Hz do 5MHz