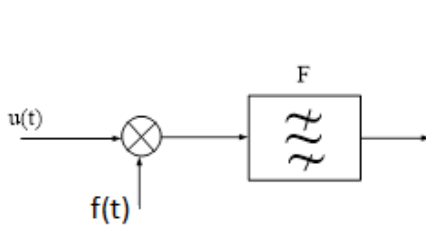


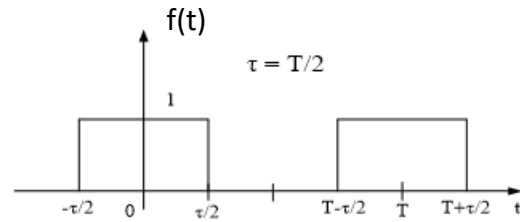
## MODULACIJE

1. Spektar  $U(j\omega)$  signala  $u(t)$  je ograničen i nalazi se u opsegu učestanosti  $|f| \leq f_m$ . Ovaj signal se množi periodičnom povorkom impulsa  $f(t)$  i propušta kroz idealan filter  $F$ , propusnik opsega učestanosti, kako je to prikazano na slici 1. Za signal  $f(t)$  prikazan na slici 2 i propusni opseg filtra  $F$  od  $14 f_m$  do  $16 f_m$  pronađi spektar signala na izlazu iz filtra i reći kako je modulisan ovaj signal, ako je:

- a)  $T=1/(4f_m)$ ;                      b)  $T=1/(7f_m)$ ;                      c)  $T=1/(5f_m)$ .



Slika 1.



Slika 2.

Rešenje:

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|F_n| \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$F_n = |F_n| e^{j\theta_n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

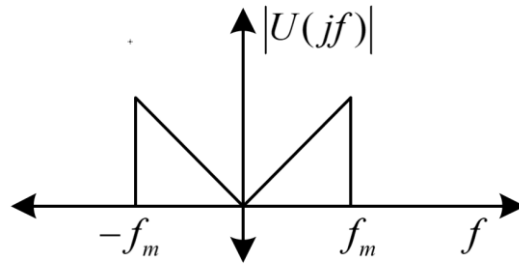
$$F_n = \frac{1}{2} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \right| \cos(n\omega_0 t)$$

Na ulazu u filter imamo signal:

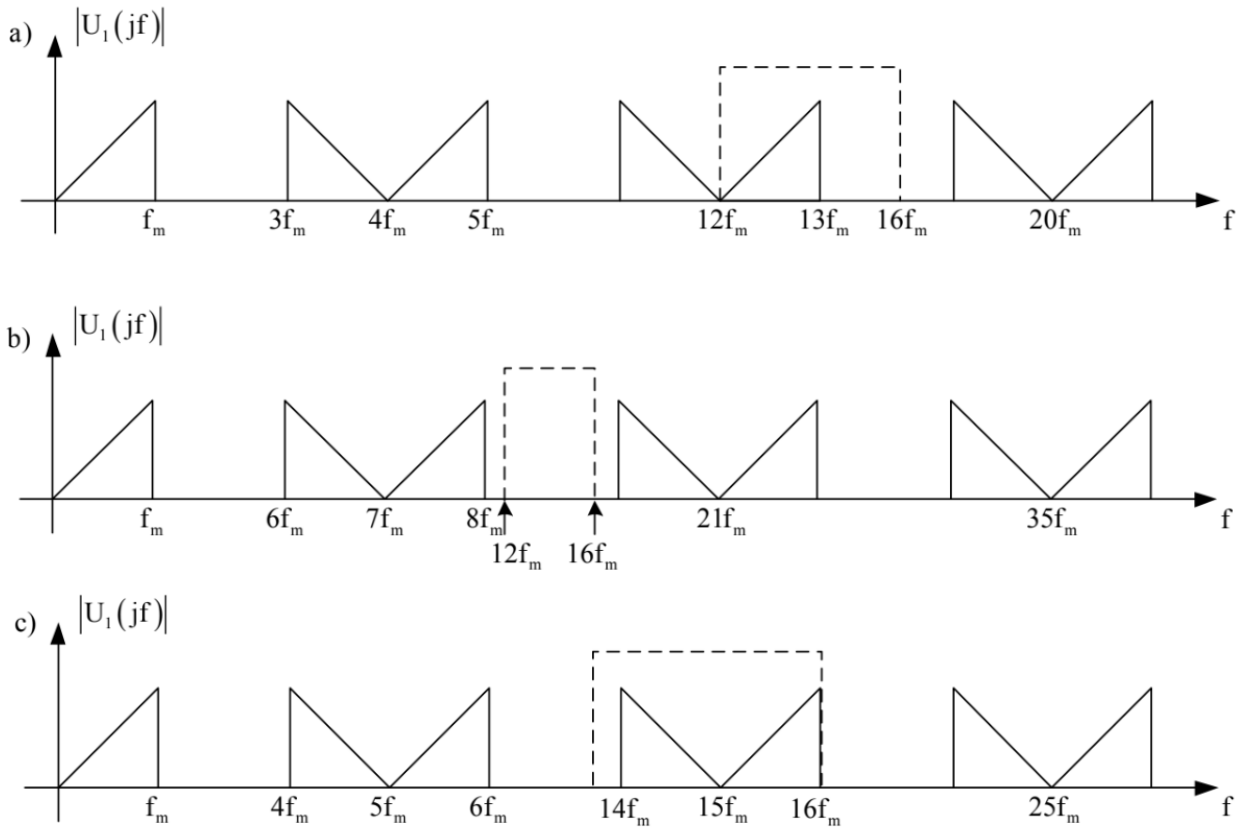
$$u_1(t) = k_p u(t) f(t) = k_p \frac{1}{2} u(t) + k_p u(t) \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \right| \cos(n\omega_0 t)$$

Signal  $u_1(t)$  sastoji se od originalnog signala  $u(t)$ , skalirnog sa konstantom  $k_p \frac{1}{2}$ , i beskonačnog broja komponenti nastalih modulisanjem harmonika signala  $f(t)$  sa signalom  $u(t)$ . Uočimo da su amplitude parnih harmonika signala  $f(t)$  jednaki nuli.

Ukoliko pretpostavimo da spektar signala  $u(t)$  ima oblik prikazan na Slici 3, signalu na ulazu u filter odgovara spektar sa Slike 4 (**napomena:** faktori skaliranja različitih komponenti nisu uzeti u obzir prilikom ilustracije).



Slika 3. Spektar signala  $u(t)$ .



Slika 5. Signali na ulazu (puna linija) i izlazu filtra (ovičeni isprekidanom linijom) za postavke zadatka pod a), b) i c).

$$a) T = \frac{1}{4f_m} \Rightarrow f_o = 4f_m$$

Na izlazu iz filtra imamo AM-1BO signal sa gornjim bočnim opsegom.

$$b) T = \frac{1}{7f_m} \Rightarrow f_o = 7f_m$$

Na izlazu iz filtra nema signala.

$$c) T = \frac{1}{5f_m} \Rightarrow f_o = 5f_m$$

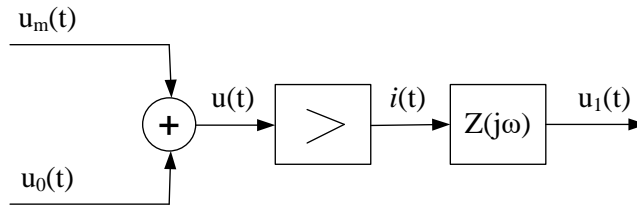
Na izlazu iz filtra imamo AM-2BO signal.

2. Signali  $u_m(t)=U_m\cos\omega_m t$  i  $u_0(t)=U_0\cos\omega_0 t$  predstavljaju modulišući signal i nosilac. Njihove amplitude imaju vrijednosti  $U_m=2V$  i  $U_0=5V$ , a učestanosti  $f_m=1kHz$  i  $f_0=1MHz$ . Oba signala se dovode na ulaz nelinearnog pojačavača, kako je to prikazano na slici 4. Između struje na izlazu pojačavača  $i(t)$  i napona na njegovom ulazu, postoji relacija:

$$i(t) = a_1 u(t) + a_2 u^2(t),$$

u kojoj je  $a_1 = 2mA/V$  i  $a_2 = 0,1mA/V^2$ .

- a) Izračunati učestanosti svih prostoperiodičnih komponenti struje  $i(t)$ ,  
 b) Pronaći stepen modulacije i nacrtati približno vremenski oblik onog dijela struje  $i(t)$ , koji predstavlja amplitudski modulisan signal.



Slika 4.

Rešenje:

Prema blok šemi na Slici 4, napon na ulazu pojačavača je:

$$u(t) = U_m \sin \omega_m t + U_o \sin \omega_o t$$

Na izlazu iz pojačavača imamo signal:

$$i(t) = a_1 [U_m \sin \omega_m t + U_o \sin \omega_o t] + a_2 [U_m \sin \omega_m t + U_o \sin \omega_o t]^2$$

$$i(t) = a_1 U_m \sin \omega_m t + a_1 U_o \sin \omega_o t + a_2 U_m^2 \sin^2 \omega_m t + 2a_2 U_m U_o \sin \omega_m t \sin \omega_o t + a_2 U_o^2 \sin^2 \omega_o t$$

$$i(t) = a_1 U_m \sin \omega_m t + a_1 U_o \sin \omega_o t + a_2 U_m^2 \left( \frac{1 - \cos 2\omega_m t}{2} \right) + 2a_2 U_m U_o \left[ \frac{1}{2} \cos(\omega_o - \omega_m)t - \frac{1}{2} \cos(\omega_o + \omega_m)t \right] + a_2 U_o^2 \left( \frac{1 - \cos 2\omega_o t}{2} \right)$$

$$i(t) = \frac{a_2}{2} (U_m^2 + U_o^2) + a_1 U_m \sin \omega_m t - \frac{a_2}{2} U_m^2 \cos 2\omega_m t + a_2 U_m U_o \cos(\omega_o - \omega_m)t + a_1 U_o \sin \omega_o t - a_2 U_m U_o \cos(\omega_o + \omega_m)t - \frac{a_2}{2} U_o^2 \cos 2\omega_o t$$

Na osnovu podataka iz teksta zadatka izračunate su amplitude i učestanosti spektralnih komponenti iz u prethodnog izlaza. Rezultatati su prikazani u Tabeli 1.

Tabela 1.

f	0	$f_m$	$2f_m$	$f_0 - f_m$	$f_0$	$f_0 + f_m$	$2f_0$
f[kHz]	0	1	2	999	1000	1001	2000
I[mA]	1,45	4	0,2	1	10	1	1,25

Komponente na učestanostima  $f_o - f_m$ ,  $f_o$  i  $f_o + f_m$  obrazuju KAM signal oblika:

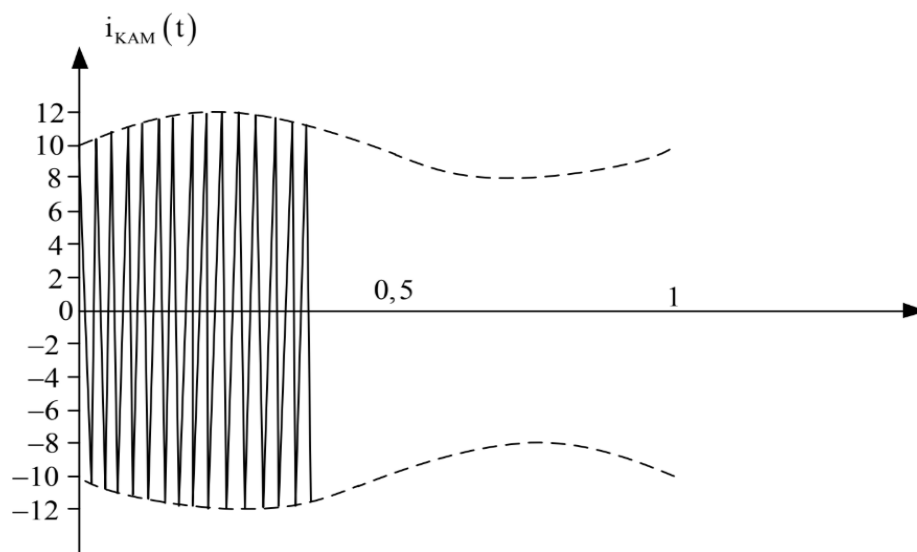
$$i_{KAM}(t) = a_2 U_m U_o \cos(\omega_o - \omega_m)t + a_1 U_o \sin \omega_o t - a_2 U_m U_o \cos(\omega_o + \omega_m)t$$

$$i_{KAM}(t) = a_1 U_o \left( 1 + 2 \frac{a_2}{a_1} \sin \omega_m t \right) \sin \omega_o t$$

Stepen modulacije u ovom slučaju iznosi:

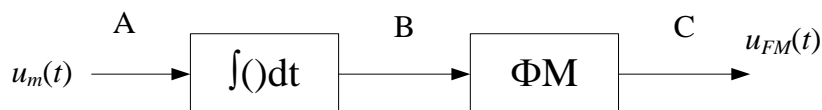
$$m = 2 \frac{a_2}{a_1} U_m = 0.2$$

Vremenski oblik struje  $i_{KAM}(t)$  prikazan je na Slici 5 punom linijom, a anvelopa isprekidanom.



Slika 5. KAM signal (amplituda nosioca je  $a_1 U_o = 10mA$ , a indeks modulacije 0.2).

3. U jednom od postupaka za dobijanje FM signala koristi se integrator i fazni modulator kao što je prikazano na slici.



Slika 5

Na ulaz u integrator dovodi se test signal  $u_m(t) = U_m \cos \omega_m t$  pri čemu učestanost ovog signala može da ima bilo koju vrijednost između 0,3kHz do 3,4kHz. Karakteristika integratora je takva da pri učestanosti  $f_m = 1kHz$  i amplitudi  $U_m = 1V$  signal na njegovom izlazu ima amplitudu  $U_B = 0,06V$ . Amplituda prostoperiodičnog napona  $U_B$  na ulazu u  $\Phi M$  i devijacija faze na njegovom izlazu  $\Delta\Phi_0$  direktno su srazmjerne sve do vrijednosti  $U_B = 0,3V$ , kada je  $\Delta\Phi_0 = 50rad$ . Za vrijednosti  $U_B > 0,3V$  devijacija faze više nije direktno srazmjerna amplitudi  $U_B$ . Izračunati:

- a) Najveću vrijednost amplitude test signala  $U_m$  pri kojoj je frekventijski modulator još uvijek linearan,
- b) Devijaciju učestanosti FM signala u tački C,
- c) Opseg učestanosti u kome se nalaze značajne komponente spektra FM signala

Rešenje:

Signal u tački B, koji je proporcionalan integralu modulišućeg signala  $u_m(t)$  da je izrazom:

$$u_B(t) = k_i \int_{-\infty}^{\infty} u_m(\tau) d\tau = \frac{k_i U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t$$

gdje je  $k_i$  konstanta integratora.

Vrijednost konstante integratora može se odrediti na osnovu podatka da pri učestanosti  $f_m=1\text{kHz}$  i amplitudi  $U_m=1\text{V}$  signal na njegovom izlazu integratora ima amplitudu  $U_B=0,06\text{V}$ .

$$k_i = \frac{\omega_m U_B}{U_m} = \frac{2\pi f_m U_B}{U_m} = \frac{2\pi \cdot 10^3 \cdot 0,06}{1} = 120\pi \text{ rad / s}$$

- a) Linearost frekventijskog modulatora određena je linearnošću faznog modulatora. Kako je fazni modulator linearan sve dok je:

$$U_B = \frac{k_i U_m}{\omega_m} \leq 0,3\text{V}$$

najveća dozvoljena vrijednost amplitude test signala je:

$$(U_m)_{\max} = \frac{0,3(\omega_m)_{\min}}{k_i} = 1,5\text{V}$$

pri čemu je  $(\omega_m)_{\min} = 2\pi \cdot 300 \text{ rad / s}$ .

- b) Frekventijski modulisan signal na izlazu iz faznog modulatora ima oblik:

$$u_{FM}(t) = U_o \cos(\omega_o t + k_\phi u_B(t))$$

gdje su  $U_o$  i  $\omega_o$  amplituda i kružna učestanost nosioca, a  $k_\phi$  je konstanta proporcionalnosti faznog modulatora. Vrijednost konstante  $k_\phi$  dobijamo iz uslova da je  $\Delta\Phi_o = k_\phi U_B$ .

$$k_\phi = \frac{\Delta\Phi_o}{U_B} = \frac{50}{0,3} = 166,7 \text{ rad / V}$$

Trenutna devijacija učestanosti frekventijski modulisanog signala  $u_{FM}(t)$  u tački C je:

$$\delta f_i = \frac{k_\phi}{2\pi} \frac{du_B(t)}{dt} = \frac{k_\phi k_i}{2\pi} U_m \cos \omega_m t$$

Odakle slijedi da je maksimalna devijacija učestanosti jednaka:

$$\Delta f_o = \frac{k_\phi k_i}{2\pi} (U_m)_{\max} = 15 \text{kHz}$$

- c) Opseg učestanosti u kom se nalaze sve značajne komponente spektra frekvencijski modulisanog signala  $u_{FM}(t)$  određuje se prema Karsonovom obrascu:

$$B = 2(m+1)f_m = 2(\Delta f_o + f_m)$$

Pri tome se mora uzeti najviša učestanost u spektru test signala, tako da je traženi opseg učestanosti:

$$B = 2(15 + 3.4) \text{kHz} = 36.8 \text{kHz}$$

4. U opsegu  $B$  prenosi se  $N$  radio signala  $u_i(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \Delta \omega_0 \int m_i(\tau) d\tau)$ , gdje je  $i=1, \dots, N$ . Najviša učestanost u spektru signala  $m_i(t)$  je  $f_m$ , pri čemu je  $|m_i(t)| \leq 1$ , a  $\Delta f_0 = 5f_m \ll B$ .
- Odrediti maksimalan broj radio signala koji mogu da se prenesu u datom opsegu  $B$ ,
  - Za koliko treba smanjiti maksimalnu devijaciju učestanosti  $\Delta f_0$  da bi u datom opsegu moglo da se prenese  $2N$  signala?

Rešenje:

- a) Prema Karsonovom obrascu potrebna širina opsega frekvencijski modulisanog signala je:

$$B_i = 2f_m(m+1) = 2f_m \left( \frac{\Delta f_o}{f_m} + 1 \right) = 2(\Delta f_o + f_m)$$

S obzirom da je  $\Delta f_0 = 5f_m$ , dobijamo  $B_i = 12f_m$ . Stoga, maksimalan broj signala koji se može prenijeti u opsegu širine  $B$  je:

$$N = \frac{B}{B_i} = \frac{B}{12f_m}$$

- b) Sada je:

$$N' = 2N = \frac{B}{B_i}$$

$$B_i' = 2f_m(m' + 1) = 2f_m \left( \frac{\Delta f_o'}{f_m} + 1 \right) = 2(\Delta f_o' + f_m)$$

$$2N = \frac{B}{2(\Delta f_o' + f_m)}$$

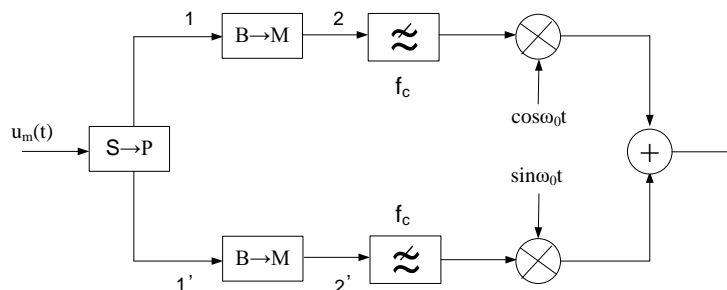
Ako uvrstimo  $N$  dobijeno pod a), dobijamo:

$$\frac{B}{2(\Delta f_o' + f_m)} = \frac{B}{6f_m} \Rightarrow \Delta f_o' = 2f_m$$

5. Na slici je prikazan predajnik digitalnih signala. Sa  $S \rightarrow P$  označen je konvertor serije u paralelu, a sa  $B \rightarrow M$  pretvarač binarnih signala u  $M$ -arne. Na izlazu iz pretvarača dobijaju se impulsi veoma kratkog trajanja, sa jednom od  $M=2^n$  različitih amplituda. Filtri  $F$  su idealni propusnici niskih učestanosti sa graničnom učestanošću  $f_c$ .

Ako je binarni protok signala  $u_m(t)$   $V_B=9600$  b/s, odrediti:

- Binarni protok u tačkama 1 i 1',
- Digitalni protok u tačkama 2 i 2',
- $f_c$  tako da nema ISI i opseg  $B$  koji zazima modulisani signal,
- broj  $n$  kada je  $B=2400$  Hz.



Rešenje:

a)

$$T_1 = T_{1'} = 2T$$

$$V_{b1} = V_{b1'} = V_b / 2 = 4800 \text{ b/s}$$

b)

$$M = 2^n$$

$$T_M = nT_{b1} = T_{b1} \log_2 M$$

$$V_{D2} = V_{D2'} = \frac{1}{T_M} = \frac{1}{nT_{b1}} = \frac{V_{b1}}{n} = \frac{V_b}{2n} = \frac{4800}{n} [\text{b/s}]$$

c)

$$f_c = \frac{1}{2T_M} = \frac{V_{D2}}{2} = \frac{4800}{2n}$$

$$B = 2f_c = \frac{4800}{n}$$

d)

$$B = 2400\text{Hz} = 2f_c$$

$$f_c = 1200\text{Hz}$$

$$f_c = \frac{V_D}{2} = \frac{4800}{2n} = 1200 \Rightarrow n = 2$$

$$M = 2^2 = 4$$

6. Sistemom koji je predviđen za prenos jednog telefonskog signala i čiji je propusni opseg učestanosti u granicama od 300Hz do 3400Hz, treba da se prenosi binarni signal predstavljen polarnim impulsima amplitude  $\pm U$  i trajanja  $T$ . Ovakav binarni signal ne može da se prenosi u osnovnom opsegu učestanosti pa je potrebno primijeniti neki od postupaka modulacije.

Koji postupci amplitudske i fazne modulacije se mogu primijeniti, ako binarni protok iznosi:

a)  $V=4800\text{b/s}$ ,

b)  $V=7200\text{b/s}$ .

Rešenje:

Opeg koji stoji na raspolaganju je:

$$B = 3400 - 300 = 3100\text{Hz}$$

Različiti modulacioni postupci imaju različite zahtjeve u pogledu propusnog opsega:

a)  $f_c = \frac{V_b}{2} = 2400\text{Hz}$

*ASK - 2BO*:  $B = 2f_c = 4800\text{Hz}$

*ASK - 1BO*:  $B = f_c = 2400\text{Hz}$

*ASK - NBO*:  $B = 1.25f_c = 3000\text{Hz}$

*MPSK*:  $B = \frac{V_b}{\log_2 M}$

*BPSK*:  $B = \frac{V_b}{\log_2 2} = 4800\text{Hz}$

*QPSK*:  $B = \frac{V_b}{\log_2 4} = 2400\text{Hz}$

b) Za domaći