1.1 Uticaj nehomogenosti sfernog oblika na raspored polja u homogenom dielektriku

Praktično nije moguće napraviti idealno homogeni dielektrik. Uvijek se u dobrom homogenom dielektriku mogu pojaviti nehomogenosti. Porijeklo ovih nehomogenosti može biti različito. Ipak ono najčešće dolazi kao posledica tehnološke obrade bilo dielektrika bilo uređaja u kome se dielektrik nalazi.

Tipičan primjer je transformator snage u kome je dielektrik najčešće dielektričko ulje (mineralna ulja). U unutrašnjosti ovakvog dielektrika uvijek se može pojaviti kapljica vode ili vazdušni mjehurić ili pak, neka druga čestica (opiljci metala). S druge strane, kod tehnološke obrade ovog uređaja, na primjer njegovih namotaja, može se desiti da neka sitna čestica metala ostane unutar dielektrika.

Čemu služi proučavanje ovakvih nehomogenosti?

Odmah da naglasimo da ove nehomogenosti mogu veoma nepovoljno da utiču na distribuciju električnog polja unutar dielektrika! To ćemo dokazati u narednom izlaganju.

Ali, prije toga treba istaći dvije pretpostavke na kojima se bazira čitava daljna analiza ovog problema. A to su:

1. Nehomogenosti su sfernog oblika, i
2. Polje neposredno oko ovih nehomogenosti je homogeno, tj konstantno.

Obje ove pretpostavke proizilaze iz prirode realnih problema. Naime, u stvarnosti, niti su ove čestice pravilnog oblika niti je polje oko njih homogeno. Međutim, kako se po pravilu radi o česticama malih dimenzija onda se one mogu smatrati sfernim oblikom, a polje oko zapremine koju zauzimaju – homogenim poljem!

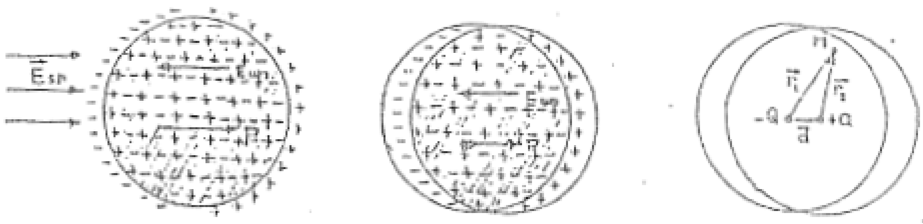
Za dalju analizu prvo nam je potrebno da izučimo polje homogene dielektrične sfere, bolje reći lopte (kugle).

1.2 A. Polje homogene dielektrične sfere

Neka nam na raspolaganju stoji komad neograničenog homogenog dielektrika koji je izložen dejstvu homogenog električnog polja. Poznato nam je da će doći do polarizacije dielektrika i to, u ovom slučaju, do homogene polarizacije. Takođe nam je poznato da se polarizovani dielektrik može ekvivalentirati sistemom električnih dipola u vakuumu. Znajući ove dvije činjenice izdvojimo (misaono) iz posmatranog komada dielektrika jedan sferni domen poluprečnika „a“, i analizirajmo električno polje unutar i oko njega.

Prije svega, pošto je lopta homogeno polarizovana doći će do potpune kompenzacije dipola svuda po njenoj unutrašnjosti. Jedino nekompenzovano naelektrisanje ostaje ono po površini lopte i to, s jedne strane pozitivno („izlazna“ strana), a sa druge negativno („ulazna“ strana). Ove dvije količine vezanih naelektrisanja su jednake po apsolutnoj vrijednosti.

Ovakvu loptu možemo u mislima zamijeniti sa dvije lopte naelektrisane $+Q$ i $-Q$, istog poluprečnika „a“, čiji su centri pomjereni među sobom za vektor $\vec{d}$ koji predstavlja krak momenta elementarnog dipola. (U suštini to je rastojanje između jezgra i elektrona odnosno elektronskog plašta.)



Dakle, prvobitno polarizovanu (homogeno) loptu zamijenili smo, na bazi gornjeg rasuđivanja, sa dvije naelektrisane sfere čiji su centri „smaknuti“ za dužinu $\left|\vec{d}\right|$.

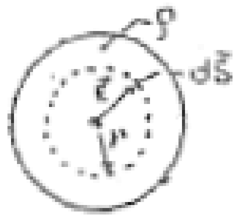
<u>Za prvobitni sistem</u> – homogeno polarizovanu dielektričnu loptu možemo kazati sledeće: njeno električno stanje možemo okarakterisati vektorom polarizacije $\vec{P} = N'\vec{p}$ ($p = qd$, gdje je „ p “ moment polarizacije elementarnog dipola, a N' njihova jedinična zapreminska gustina). Za ekvivalentni sistem, (njen) dipolni moment iznosi

$$Q\vec{d} = \vec{P}\frac{4}{3}a^3\pi \tag{1}$$

Za ekvivalentni sistem – dvije „smaknute“ sfere – možemo, dalje, kazati sledeće: polje u nekoj tački, koja pripada unutrašnjosti i jedne i druge sfere biće

$$E_{un} = \frac{\rho\vec{r}_2}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho\vec{r}_1}{3\varepsilon_0} \tag{2}$$

<u>Napomena:</u> izračunavanje polja naelektrisane lopte:



$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_{ob}}{\varepsilon_0} \tag{3}$$

$$\oint_S EdS = \frac{Q_{ob}}{\varepsilon_0} \tag{4}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{ob}}{\varepsilon_0} \tag{5}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \tag{6}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \text{ , ili} \tag{7}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0} \tag{8}$$

$$E_{un} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{9}$$

Sa gornje slike je

$$\vec{d} + \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 0 \tag{10}$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -\vec{d} \text{ , te je} \tag{11}$$

$$\vec{E}_{un} = -\frac{\rho \vec{d}}{3\varepsilon_0} \tag{12}$$

Kako je zapreminska gustina naelektrisanja ρ data kao:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}a^3\pi} \tag{13}$$

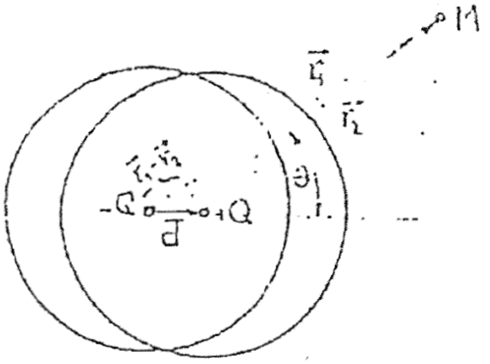
gdje je Q količina naelektrisanja jedne lopte i nepoznata je veličina. Uvrštavanjem u gornji izraz za polje unutar lopte dobijamo sledeći izraz:

$$\vec{E}_{un} = -\frac{\vec{d}}{3\varepsilon_0}\frac{Q}{\frac{4}{3}a^3\pi} = -\frac{Q\vec{d}}{4a^3\pi\varepsilon_0} \tag{14}$$

U brojiocu ovog izraza nalazi se proizvod $Q\vec{d}$. Šta on predstavlja? On predstavlja dipolni moment ekvivalentnog sistema, dakle, dipolni moment sistema od dvije lopte „smaknutih“ centara i ukupnih naelektrisanja (po zapremini) ($+Q$) i ($-Q$). S druge strane, za naš početni sistem (homogenizovanu loptu) kazali smo da proizvod $Q\vec{d}$ predstavlja dipolni moment ovog sistema (karakteriše električno stanje sistema). Kako su sistemi ekvivalentni to su im i dipolni momenti jednaki. Zato gornji izraz možemo napisati i ovako:

$$\vec{E}_{un} = -\frac{1}{4a^3\pi\varepsilon_0}\vec{P}\frac{4}{3}a^3\pi = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \tag{15}$$

Odavde vidimo da su vektori $\vec{E}_{un}$ i $\vec{P}$ istog pravca ali suprotnog smjera.
Odredimo sada polje van sfere. Opet posmatramo ekvivalentni sistem. A ovaj sistem predstavlja, kao što smo vidjeli u početku, sistem od dvije lopte ravnomjerno naelektrisane po zapremini istim ali suprotnim količinama naelektrisanja pri čemu su njihovi centri pomaknuti za vektor $\vec{d}$.



U tačkama izvan naelektrisane lopte polje se „osjeća“ kao da je svo njeno naelektrisanje smješteno u njenom centru. Eto i ideje kako da izračunamo polje (kao polje od dva tačkasta naelektrisanja!). No, kako je problem prostorne prirode polje $\vec{E}_{sp}$ će imati u pravouglom koordinatnom sistemu tri komponente. Ako problem posmatramo u sfernom koordinatnom sistemu, $\vec{E}_{sp}$ će imati samo dvije komponente. S druge strane jednostavnije je prvo naći potencijal u tački M od dva tačkasta naelektrisanja pa tek onda polje!
Naime, u konkretnom slučaju će biti

$$V_M = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \tag{16}$$

Pošto je „d“ veoma malo, mnogo manje od r_1 i r_2 (što se sa slike ne vidi tako uočljivo), možemo u imeniocu staviti da je $r_1 = r_2$, te je $r_1 r_2 = r^2$. Dok u brojiocu pišemo tačan odnos, tj $r_1 - r_2 = d\cos\theta$. Nakon uvrštavanja u izraz za potencijal dobijamo

$$V_M = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2} \tag{17}$$

A zatim, znajući da je $Q\vec{d} = P\frac{4}{3}a^3\pi$ dobijamo konačno

$$V_M = \frac{P\frac{4}{3}a^3\pi\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Pa^3}{3\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2} \tag{18}$$

Koristeći poznatu relaciju

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V \tag{19}$$

Dobijamo u sfernom koordinatnom sistemu

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{Pa^3\cos\theta}{3\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{2Pa^3\cos\theta}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^3} \tag{20}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = -\frac{1}{r}\frac{Pa^3}{3r^2\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta) = \frac{Pa^3}{3\varepsilon_0 r^3}\sin\theta \tag{21}$$

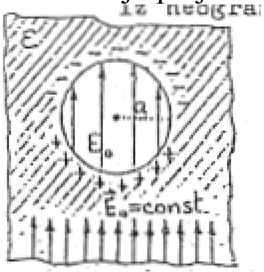
$$E_\varphi = 0 \tag{22}$$

jer je $V = const$ za ma kakvu promjenu ugla φ.

Izraz za jačinu polja $\vec{E}_{un}$, dobijen u ovom poglavlju, možemo iskoristiti kod analize sledećeg problema:

1.2.1 B: Uticaj sferne vazdušne šupljine na raspodjelu polja

Iz neograničenog homogenog dielektrika, izloženog dejstvu homogenog elektrostatičkog polja $\vec{E}_0$, izdvojimo, kao predmet našeg posmatranja, jedan njegov komad, unutar koga se nalazi (sferna) vazdušna šupljina. Ispitajmo posledice ovakve nehomogenosti dielektrika na distribuciju polja unutar njega.



Da nema vazdušne šupljine onda bi polje na tom mjestu, tj unutar sferne zapremine poluprečnika „a“ (ovo je poluprečnik šupljine) bilo dato sa $\vec{E}_{un} = -\vec{P}/3\varepsilon_0$. Međutim, kako dielektrika unutar šupljine nema, to znači, da će polje u šupljini (a koje stvara mnoštvo polarizovanih atoma po zidovima šupljine) biti jednako razlici polja $\vec{E}_0$ i $\vec{E}_{un}$. Dakle, polje u šupljini je

$$\vec{E}_s = \vec{E}_0 - \vec{E}_{un} \tag{23}$$

$$\vec{E}_s = \vec{E}_o - \left(-\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right) = \vec{E}_0 + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \tag{24}$$

Od ranije je poznato da je

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \text{ , odnosno} \tag{25}$$

$$\varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \text{ , odakle je} \tag{26}$$

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} \tag{27}$$

Uvrštavanje u gornji izraz daje

$$\vec{E}_š = \vec{E}_0 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{3\varepsilon_0}\vec{E}_0 = \frac{2\varepsilon_0 + \varepsilon}{3\varepsilon_0}\vec{E}_0 \tag{28}$$

Dijeljenjem da ε_0 daje konačno

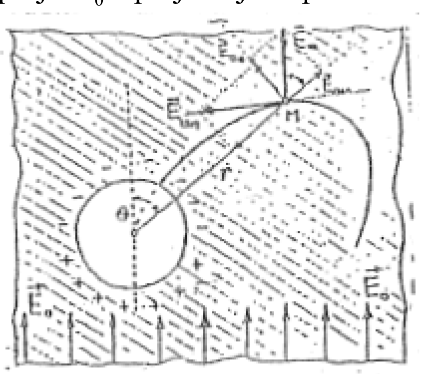
$$\vec{E}_š = \frac{2 + \varepsilon_r}{3}\vec{E}_0 \tag{29}$$

Prodiskutujmo sada ovaj rezultat. Pošto je uvijek $\varepsilon_r > 1$, to je očigledno da je uvijek $\vec{E}_š > \vec{E}_0$! Tako, na primjer, u jednom realnom slučaju kada je $\varepsilon_r = 4$, slijedi da je $\vec{E}_š = 2\vec{E}_0$. Ili još „drastičniji" slučaj dielektrika, kao što je destilovana voda, čiji je $\varepsilon_r = 81$! Za ovaj slučaj se dobija

$$\vec{E}_š = \frac{83}{3}\vec{E}_0 \approx 27\vec{E}_0 \tag{30}$$

Dakle, veoma opasna pojava! Iz ovog primjera jasno se zaključuje kakvu opasnost unosi vazdušni mjehurić (šupljina) u nekom dielektriku. (napomenimo još jedom da se ε_r iz prethodnog izraza za $\vec{E}_š$ odnosi na dielektrik u kome se šupljina nalazi.)

Pogledajmo sada da li postoji opasnost od vazdušne šupljine u tačkama dielektrika izvan šupljine. Drugim riječima, odredimo intenzitet polja u tačkama van sferne šupljine. Poslužićemo se sličnim rezonom kao u pri izračunavanju polja u tačkama unutar sfere. Naime, polje u proizvoljnoj tački van sferne vazdušne šupljine jednako je razlici spoljašnjeg polja $\vec{E}_0$ i polja koje bi poticalo od dielektrične lopte koja bi ispunjavala sfernu šupljinu.



Prema tome, da nema šupljine bilo bi u proizvoljnoj tački M (vidi sliku)

$$\vec{E}_{or} = \vec{E}_0 \cos\theta \tag{31}$$

$$\vec{E}_{oe} = -\vec{E}_0 \sin\theta \quad \text{(„-„ jer je u pravcu smanjenja } \theta \text{)} \tag{32}$$

Međutim, zbog postojanja šupljine rezultantno polje u tački M je

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{or} - \vec{E}_{unr} = \vec{E}_0 \cos\theta - \frac{2Pa^3 \cos\theta}{3\varepsilon_0 r^3} = \vec{E}_0 \cos\theta - \frac{2a^3 \cos\theta}{3\varepsilon_0 r^3}(\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_0 \tag{33}$$

$$\vec{E}_r = \left[1 - \frac{2a^3(\varepsilon - \varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 r^3}\right]\vec{E}_0 \cos\theta = \left[1 - \frac{2a^3(\varepsilon_r - 1)}{3r^3}\right]\vec{E}_0 \cos\theta \tag{34}$$

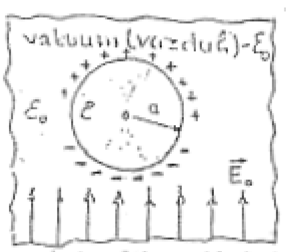
$$\vec{E}_\theta = \vec{E}_{o\theta} - \vec{E}_{un\theta} = -\vec{E}_0 \sin\theta - \frac{2Pa^3 \sin\theta}{3\varepsilon_0 r^3} = -\vec{E}_0 \sin\theta - \frac{2a^3 \sin\theta}{3\varepsilon_0 r^3}(\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_0 \tag{35}$$

$$\vec{E}_\theta = -\left[1 + \frac{a^3(\varepsilon - \varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 r^3}\right]\vec{E}_0 \sin\theta = -\left[1 + \frac{a^3(\varepsilon_r - 1)}{3r^3}\right]\vec{E}_0 \sin\theta \tag{36}$$

Napomena: Za vazdušnu šupljinu smo našli da je $\vec{E}_{un} = \frac{2+\varepsilon_r}{3}\vec{E}_0$. Iz same ove relacije je jasno da je uvijek $\vec{E}_{un} > \vec{E}_0$. Međutim, fizičko tumačenje ove zakonitosti je još očiglednije (vidi sliku). Sa slike je očigledno da se unutar šupljine spoljašnje polje $\vec{E}_0$ sabira (istog je smjera) sa poljem indukovanog naelektrisanja po zidovima šupljine!
Gornja činjenica je u skladu sa ranijim saznanjima. Naime, mi znamo da se električno polje najjače osjeća u vakuumu (odnosno vazduhu). To znači da je u ovim sredinama najjače. Na kraju, konstatujmo da iz dvije poslednje relacije slijedi: nema opasnosti od vazdušne šupljine u tačkama izvan ove šupljine (tačke M)

1.2.2 Dielektrična sfera u homogenom polju (u vakuumu)

Razmotrimo obrnut slučaj od prethodnog. Posmatrajmo kakva će biti distribucija polja ako sferni komad dielektrika unesemo u homogeno polje u vazduhu (odnosno vakuumu). Parče dielektrika je homogeno. (Ovakav slučaj bismo mogli dobiti ako bi sfernu šupljinu, iz prethodnog slučaja, ispunili nekim čvrstim dielektrikom, a ulje, koje je u prvom slučaju predstavljalo dielektrik, sada ga jednostavno iscrpimo.)



U nekoj tački unutar loptastog homogenog dielektrika rezultantno polje potiče od spoljašnjeg polja $\vec{E}_0$ i polja polarizovanih dipola. Kako je polje polarizovanih dipola $\vec{E}_{un} = -\vec{P}/3\varepsilon_0$, to je rezultantno polje dato sa

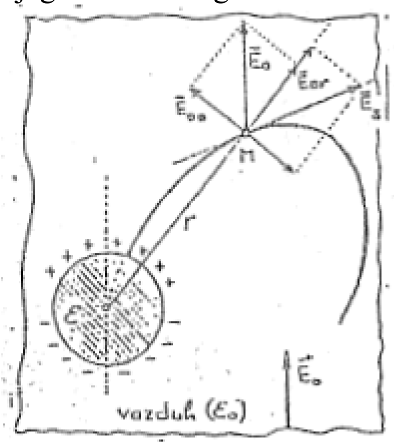
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{un} = \vec{E}_0 + \left(-\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \right) = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} = \vec{E}_0 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{3\varepsilon_0}\vec{E} \tag{37}$$

$$\vec{E} + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{3\varepsilon_0}\vec{E} = \vec{E}_0 \tag{38}$$

$$\vec{E}\,\frac{2\varepsilon_0 - \varepsilon}{3\varepsilon_0} = \vec{E}_0 \tag{39}$$

$$\vec{E}_0 = \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon}\vec{E}_0 = \frac{3}{2 + \varepsilon_r}\vec{E}_0 \tag{40}$$

Kako e uvijek $\varepsilon_r > 1$ to znači da je uvijek i $\left|\vec{E}\right| < \vec{E}_0$! Zaključak: oslabili smo polje na mjestu njegove nehomogenosti.



Utvrdimo sada kakve posledice su posledice ove nehomogenosti na tačke van dielektričke lopte. Opet ćemo problem posmatrati u sfernom koordinatnom sistemu. Polje u nekoj tački M biće

$$E_r = E_{or} + \frac{Pa^3 \cos\theta}{3\varepsilon_0 r^3} = \vec{E}_0 \cos\theta + \frac{2a^3 \cos\theta}{3\varepsilon_0 r^3}(\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} \tag{41}$$

gdje E ima vrijednost prema gornjoj formuli, pa je

$$\vec{E}_r = \vec{E}_0 \cos\theta + \frac{2a^3 \cos\theta}{3\varepsilon_0 r^3}(\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon}\vec{E}_0 \tag{42}$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_0 \left[1 + \frac{2a^3(\varepsilon - \varepsilon_0)}{r^3(2\varepsilon_0 + \varepsilon)} \right] \cos\theta \tag{43}$$

$$\vec{E}_\theta = -\vec{E}_0 \sin\theta + \frac{a^3 \sin\theta}{3\varepsilon_0 r_3}(\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon}\vec{E}_0 \tag{44}$$

$$\vec{E}_\theta = \vec{E}_0 \left[\frac{a^3}{r^3}\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} - 1 \right] \sin\theta \tag{45}$$

Ako je umjesto vazduha neki drugi dielektrik – dielektrinke konstante ε_2 - vrlo prosto ćemo dobiti izraze za polje unutar i van sfere. Umjesto ε_0 stavimo ε_2, a umjesto ε stavimo ε_1, pa je

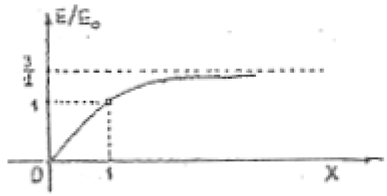
$$\vec{E} = \frac{2\varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\vec{E}_0 \text{ , za } r < a \text{ , dok je za } r > a \tag{46}$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_0\left[1 + 2\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\frac{a^3}{r^3}\right]\cos\theta \tag{47}$$

$$\vec{E}_\theta = \vec{E}_0\left[-1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\frac{a^3}{r^3}\right]\sin\theta \tag{48}$$

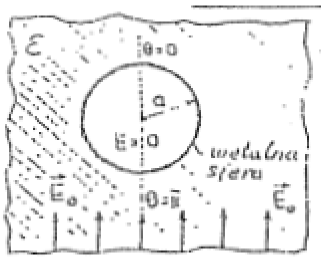
Sada je zaista očigledno da jačina polja bitno zavisi od vrste dielektrika. Uvedimo odnos $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = x$. Tada je

$$E = \frac{3x}{2x+1}E_0 \tag{49}$$



I. slučaj: $x < 1 \Rightarrow \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \Rightarrow E < E_0$;
II. slučaj: $x > 1 \Rightarrow \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow E > E_0$;
III. slučaj: $x = 1 \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow E = E_0$.
Koji je najgori slučaj?
Posmatrajući relaciju za E nije teško konstatovati:
$\lim_{x\to\infty} E = \frac{3}{2}E_0$. Taj slučaj nastupa kada je $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$.
Dakle, u ovom najnepovoljnijem slučaju kada je $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ polje u unutrašnjosti dielektrične lopte ne može preći vrijednost od $1{,}5 \cdot E_0$! Međutim, ovo nije toliko opasno kao kad je sferna zapremina ispunjena vazduhom!
Napomena: Svi ovi, a i raniji zaključci, u skladu su sa našim ranijim saznanjima. Naime, od ranije smo znali da je elektrostatičko polje najjače u vakuumu (odnosno vazduhu), a da je utoliko slabije ukoliko dielektrik ima veću dielektričnu konstantu, tj ukoliko se dielektrik bolje polarizovao. Ukoliko se dielektrik jače polarizuje to će se i jačim poljem suprotstaviti spoljašnjem polju, pa će se u njemu to polje i slabije osjećati.

1.2.3 Uticaj provodne sfere na raspodjelu polja



Pretpostavimo ovakav slučaj: u unutrašnjosti homogenog dielektrika, dielektrične konstante $\varepsilon_2 = \varepsilon$, postavljena je metalna sfera poluprečnika a. Dielektrik se nalazi u homogenom elektrostatičkom polju $\vec{E}_0$.
Unaprijed možemo da tvrdimo da je polje unutar sfere jednako nuli. Tada je $E = \frac{3\varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} = 0$. Odavde slijedi $\varepsilon_1 \to \infty$! sa ovom konstatacijom uđimo u izraze za E_r i E_θ, iz prethodnog izlaganja, te dobijamo

$$E_r = E_0(1+2\frac{a^3}{r^3})\cos\theta \tag{50}$$

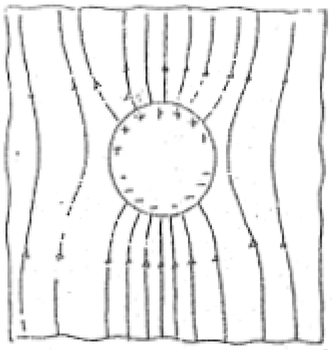
$$E_\theta = E_0(-1+\frac{a^3}{r^3})\sin\theta \tag{51}$$

Za $r = a$ slijedi $E_\theta = 0$ (što je i logično, jer je polje normalno na površinu sfere, a komponenta polja E_θ je normalna na svaki poteg iz centra sfere kroz ma koju tačku na njenoj površini), dok je

$$E_r = 3E_0 \cos\theta \tag{52}$$

Za: $\theta = 0 \quad E_r = 3E_0$, i

$\theta = \pi \quad E_r = -3E_0$



Dakle, intenzitet polja na površini metalne sfere iznosi

$$E_r = 3E_0 \tag{53}$$

Ova vrijednost polja odnosi se na gornju i donju kalotu sfere. Na kraju možemo konstatovati, za ovaj slučaj, sledeće:

- Opasno je kada se metalne čestice, odnosno opiljci, nađu unutar homogenog dielektrika; bez obzira na <u>veličinu</u> čestice, polje je tri puta jače na mjestima diskontinuiteta dielektrika, što predstavlja veoma nepovoljnu okolnost!

Ako bismo napravili rezime izloženog u vezi sa preraspodjelom polja usled nehomogenosti dielektrika i pokušali da <u>rangiramo</u> te nehomogenosti prema <u>opasnosti od proboja</u> dielektrika, mogli bismo konstatovati sledeće:

1. Najnepovoljnija okolnost se javlja onda kada je nehomogenost u obliku vazdušne šupljine (mjehurića)

2. Sledeća nepovoljnost nastaje onda kada se nehomogenost pojavljuje u obliku metalnih opiljaka. ($E = E_{max} = 3E_0$)

3. Kada se unutar jedno dielektrika sa velim ε -om nađe drugi dielektrik sa manjim ε -om ($E = E_{max} = 1,5E_0$)

U svakom slučaju, pojava bilo kakve nehomogenosti unutar dielektrika, izloženog električnom polju, ima za posledicu <u>pojačanje</u> odnosno <u>povećanje</u> polja na mjestu nehomogenosti. Razumije se da to bitno povećava <u>mogućnost proboja</u> na tom mjestu, a otuda i mogućnost uništenja čitavog uređaja. Zato u elektrotehničkim uređajima, u kojima vladaju jaka polja u normalnim uslovima njihovog rada, treba <u>veoma brižljivo</u> obraditi dielektrik i <u>pažljivo</u> odstraniti sve čestice iz njega!

1.3 Energija sistema naelektrisanih provodnih tijela (energija elektrostatičkog sistema)

Razmatraćemo, sada, jedan elektrostatički sistem u svom najopštijem obliku. Naime, neka je dat sistem od n naelektrisanih metalnih tijela $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$, koja se nalaze na potencijalima $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Neka se, negdje između ovih tijela, nalazi slobodno nepromjenljivo prostorno naelektrisanje gustine ρ. Čitav ovaj sistem smješten je u nekoj linearnoj sredini, zapremajući neki volumen υ, koji ograničava neka zatvorena površ S_0.
Razrađujući Pointigovu teoremu kazali smo da je energija električne komponente elektromagnetnog polja, za slučaj linearne sredine, data u obliku:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{\upsilon} \varepsilon E^2 d\upsilon = \frac{1}{2}\int_{\upsilon} \vec{E}\vec{D} d\upsilon \tag{54}$$

Nema sumnje da se ovaj opšti izraz odnosi i na naš slučaj, tj na specijalan slučaj – elektrostatički sistem. Samo ćemo ga ovoga puta malo transformisati

$$\operatorname{div}(V\vec{D}) = V \operatorname{div}\vec{D} + \vec{D}\operatorname{grad} V = V\rho + \vec{D}\operatorname{grad} V = V\rho - \vec{E}\vec{D} \tag{55}$$

$$\vec{E}\vec{D} = V\rho - \operatorname{div}(V\vec{D}) \tag{56}$$

Uvrštavanje u opšti izraz daje

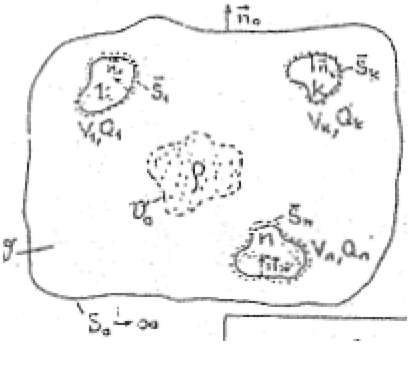
$$W_e = \frac{1}{2}\int_{\upsilon_o} V\rho d\upsilon - \frac{1}{2}\int_{\upsilon} \operatorname{div}(V\vec{D}) d\upsilon \tag{57}$$

Integracija po domenu υ isključuje unutrašnjost svih metalnih tijela u posmatranom sistemu (jer je unutar tijela $D = 0$).
Na drugi sabirak primijenimo teoremu Gausa-Ostrogradskog:

$$\frac{1}{2}\int_{\upsilon} \operatorname{div}(V\vec{D}) d\upsilon = \frac{1}{2}\oint_{S_0} V\vec{D}d\vec{S} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oint_{S_k} V_k \vec{D}d\vec{S} \tag{58}$$

Pošto se, teorijski, polje osjeća do ∞, to znači da $S_0 \to \infty$. S druge strane, za podintegralne veličine prvog površinskog integrala možemo kazati da je $V \sim \frac{1}{r}$, dok je $D \sim \frac{1}{r^2}$; a kako je $dS = r^2 d\Omega$, tj $dS \sim r^2$, to znači da je podintegralni izraz srazmjeran sa $\frac{1}{r}$; to opet znači da $\frac{1}{r} \to 0$ kad $r \to \infty$. Dakle, prvi površinski integral zanemarujemo! Sada je

$$\frac{1}{2}\int_{\upsilon} \operatorname{div}(V\vec{D}) d\upsilon = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k \oint_{S_k} \vec{D}d\vec{S} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k \oint_{S_k} D_n dS = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k \oint_{S_k} \eta dS = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k Q_k \tag{59}$$



Napomenimo da predznak minus je došao tuda što smo pretpostavili da su normale na površine provodnih tijela sistema orjentisane ka unutrašnjosti tijela, što nije bio slučaj kod opšteg razmatranja graničnih uslova kada smo naglasili da relacija $\eta = D_n$ je izvedena pod uslovom da je normala na graničnoj površini orjentisana prema „vani“.

Sada možemo napisati da je energija posmatranog elektrostatičkog sistema data sa

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{\upsilon_o} V\rho d\upsilon + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k Q_k \tag{60}$$

U slučaju kada je $\rho = 0$, tj kada nemamo prostorno raspoređenog naelektrisanja, izraz za energiju se uprošćava

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k Q_k \tag{61}$$

Za slučaj kondenzatora ($Q_1 = -Q_2 = Q$)

$$W_e = \frac{1}{2}(V_1Q_1 + V_2Q_2) = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)Q = \frac{1}{2}UQ = \frac{1}{2}CU^2 \tag{62}$$

Posmatrajući krajnji izraz za energiju razmatranog elektrostatičkog problema može se zaključiti da je energija tog sistema smještena u samim naelektrisanjima, odnosno u izvorima polja! S druge strane, posmatrajući opšti izraz za energiju elektrostatičkog polja $W = \frac{1}{2}\int_{\upsilon} \vec{E}\vec{D}d\upsilon$ slijedi da je energija sadržana u samom polju! Kako su ova dva izraza identična, a zaključci suprotni, prirodno je postaviti pitanje: Gdje je zapravo lokalizovana energija? Da li u izvoru ili samom polju?

Govoreći o opštem elektromagnetnom polju kao realnom fizičkom procesu kazali smo da taj proces nastaje kao posledica vremenski promjenljivih struja i da se širi velikom brzinom ($\upsilon = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, a u vakuumu brzinom svjetlosti c). U tom opštem slučaju kada je $q = q(t)$ pretpostavimo jedan kratak interval vremena u kome je izvor „ugašen“, dakle, za trenutak izvora nema. Činjenica je da se i tada elektromagnetni poremećaj (talas) egzistira, šireći se ka udaljenim tačkama prostora velikom ali konačnom brzinom! Ovaj elektromagnetni poremećaj (talas) sadrži u sebi izvjesnu energiju. To opet znači da, iako nema izvora, energija sistema postoji nezavisno od toga da li izvor više egzistira ili ne! Zato je, u odgovoru na prethodno pitanje, korektno ovako zaključiti: energiju sistema treba vezati za polje (električno ili magnetno) a ne za izvor, što i slijedi iz opšteg izraza, a što se ne vidi iz specijalnog izraza za slučaj elektrostatičkog polja.

1.4 Opšti izraz za elektrostatičku silu

Posmatrajmo opet sistem od n naelektrisanih metalnih tijela $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$. Na jedno, proizvoljno uočeno, tijelo iz sistema djeluju sva ostala tijela svojim elektrostatičkim silama. Pošto su dimenzije tijela uporedive sa njihovim međusobnim rastojanjem, rezultantna sila na uočeno tijelo ne može se odrediti direktnom primjenom Kulonovog zakona.

Zamislimo za trenutak da su sva tijela u sistemu, sem uočenog, kruto vezana (nepomična), a da je uočenom tijelu omogućen samo jedan stepen slobode (recimo, samo jedna translacija ili, pak, samo jedna rotacija). Neka, uz sve ovo, sva tijela u sistemu imaju nepromjenljiva naelektrisanja, tj $\forall Q_k = const$. (Drugim riječima, tijela smo naelektrisali a zatim ih odvojili od izvora.) Pošto na uočeno k-to tijelo djeluje neka rezultantna elektrostatička sila i pošto ono ima samo jedan stepen slobode, to će ova rezultantna sila izvršiti elementarni rad

$$dA_{es} = f_g dg \tag{63}$$

gdje je f_g takozvana generalisana sila na generalisanom putu d_g. Naime, ako je dozvoljena translacija u nekom pravcu l tada je $f_g dg = F_l dl$; ako je dozvoljena rotacija oko neke ose tada je $f_g dg = M_\alpha d\alpha$.

Na račun čega se obavlja rad ove elektrostatičke sile?

Naravno, na račun energije sistema, te je bilans energija:

Rad elektrostatičke sile + promjena energije elektrostatičkog sistema odnosno, u matematičkom obliku

$$dA_{es} + dW_e = 0 \tag{64}$$

$$f_g = -\frac{\partial W_e}{\partial g} \tag{65}$$

Razmotrimo sada drugi slučaj. Sve je isto, samo su tijela ostala vezana za izvor. Izvor je doveo tijela na njegov potencijal, tako da je $\forall V_k = const$. Sada će bilans energija imati ovakav oblik:

$$dA_{es} + dW_e = dA_{iz} \text{ , pri } V_k = const \tag{66}$$

Pri čemu je dA_{iz} elementarni rad izvršen u samom izvoru. Naime, elementarni pomjeraj k-tog tijela (sa jednim stepenom slobode) izazvao je promjenu parcijalnih kapacitivnosti među svim tijelima, pa pošto je $V_k = const$, to su se promijenila naelektrisanja na svim tijelima, naravno na račun izvora, te je u izvoru došlo do utroška rada.

Neka je, recimo, elementarni priraštaj količine naelektrisanja na k-tom tijelu dQ_k. Rad, da se ova količina elektriciteta dovede iz izvora na k-to tijelo, čiji je potencijal V_k, iznosi

$$dA_{iz} = \sum_{k=1}^{N} V_k dQ_k \tag{67}$$

S druge strane, energija sistema od N naelektrisanih tijela je

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} V_k dQ_k \text{ , odavde} \tag{68}$$

$$dW_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(dV_k Q_k + V_k dQ_k) \text{ ; } dV_k = 0 \text{ , jer je } V_k = const \tag{69}$$

$$dW_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} V_k dQ_k = \frac{1}{2} dA_{iz} \tag{70}$$

Iz uslova za bilans energija slijedi da je

$$dA_{es} = dA_{iz} - dW_e \tag{71}$$

$$dA_{es} = 2dW_e - dW_e \tag{72}$$

$$f_g dg = dW_e \text{ , a odavde} \tag{73}$$

$$f_g = \frac{\partial W_e}{\partial g} \tag{74}$$