

Stabilnost rješenja po Ljapunovu

$$x' = f(t, x)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$f, \frac{\partial f}{\partial x} \in C(D)$$

$$(t_0, x_0) \in D$$

$$x = x(t, t_0, x_0)$$

Def 1.

Rješenje $x = x(t), t \in (t_0, +\infty)$, naziva se stabilnim po Ljapunovu, kad $t \rightarrow \infty$ ako za $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ t.d. za svako drugo rješenje $x = \varphi(t)$ jednačine $x' = f(t, x)$, koje zadovoljava početni uslov da je $\varphi(t_0) = \varphi_0$, važi:

$$x_0 \text{ i } \varphi_0 - \text{bliski} \Rightarrow x(t) - \varphi(t) - \text{bliski, tj.}$$

$$\|x_0 - \varphi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in (t_0, +\infty)$$

Def 2

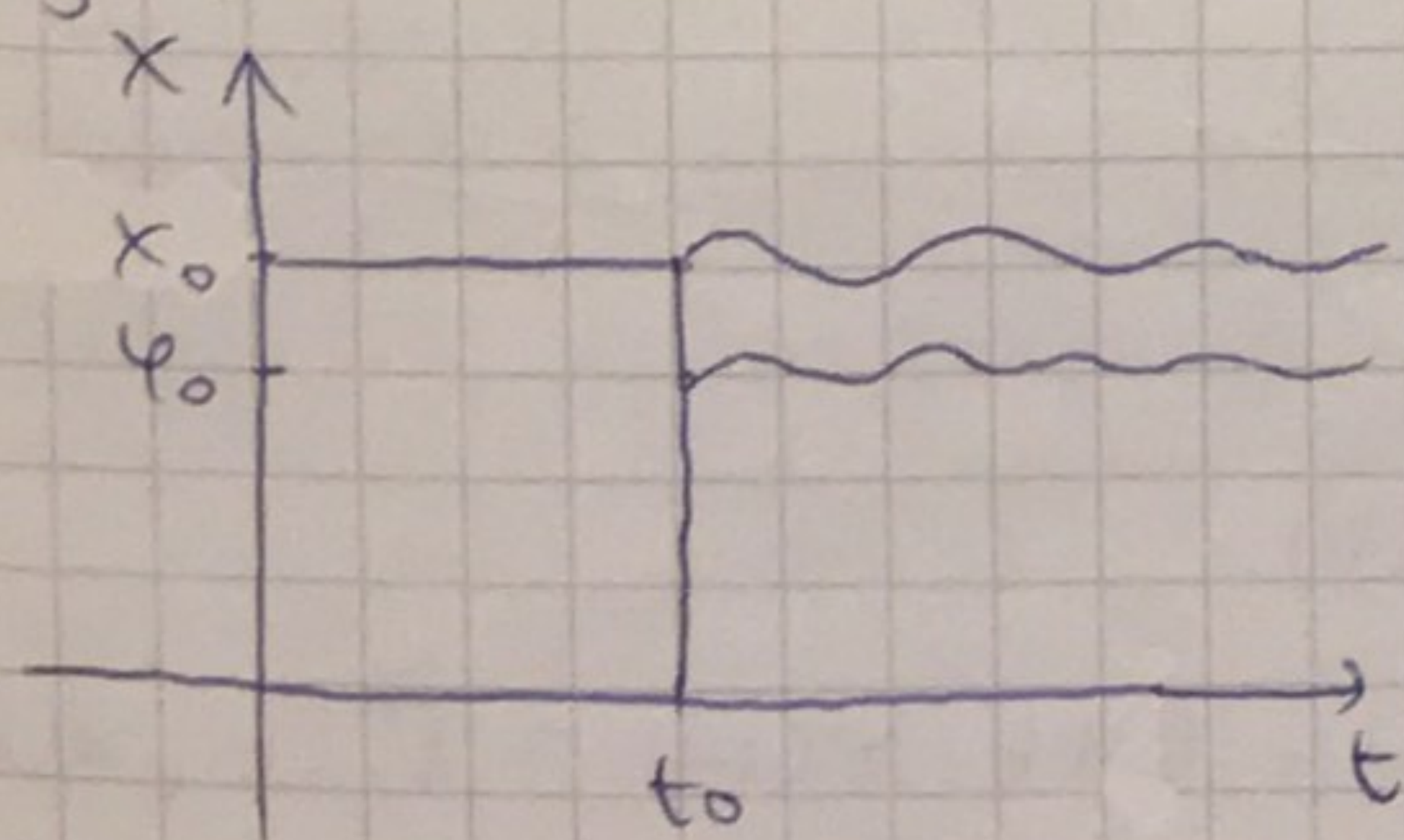
Rješenje $x = x(t), t \in (t_0, +\infty)$ je asimptotski stabilno po Ljapunovu ako je stabilno i ako je $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0$

Def 3.

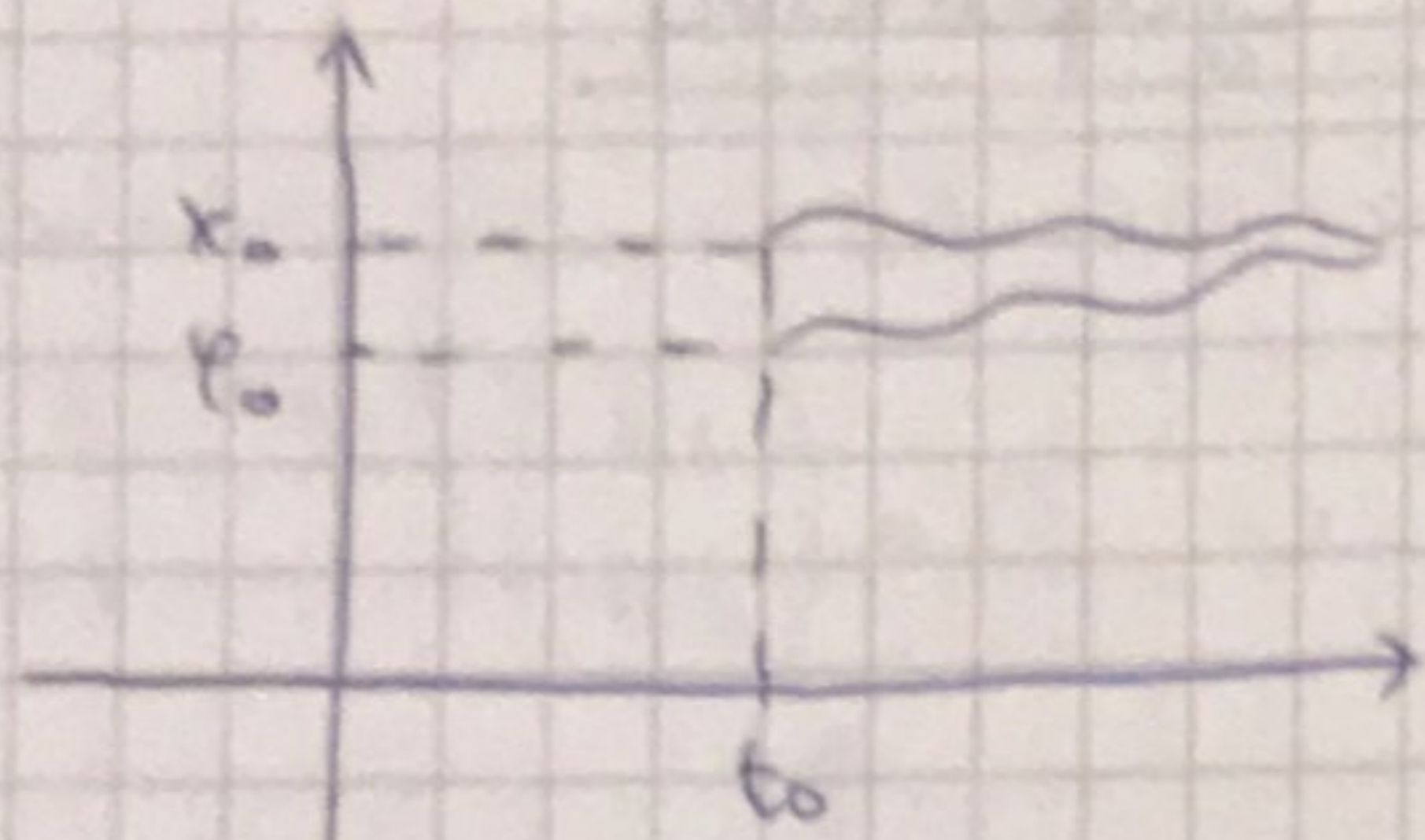
Rješenje koje nije stabilno po

Ljapunovu nazivamo nestabilnim.

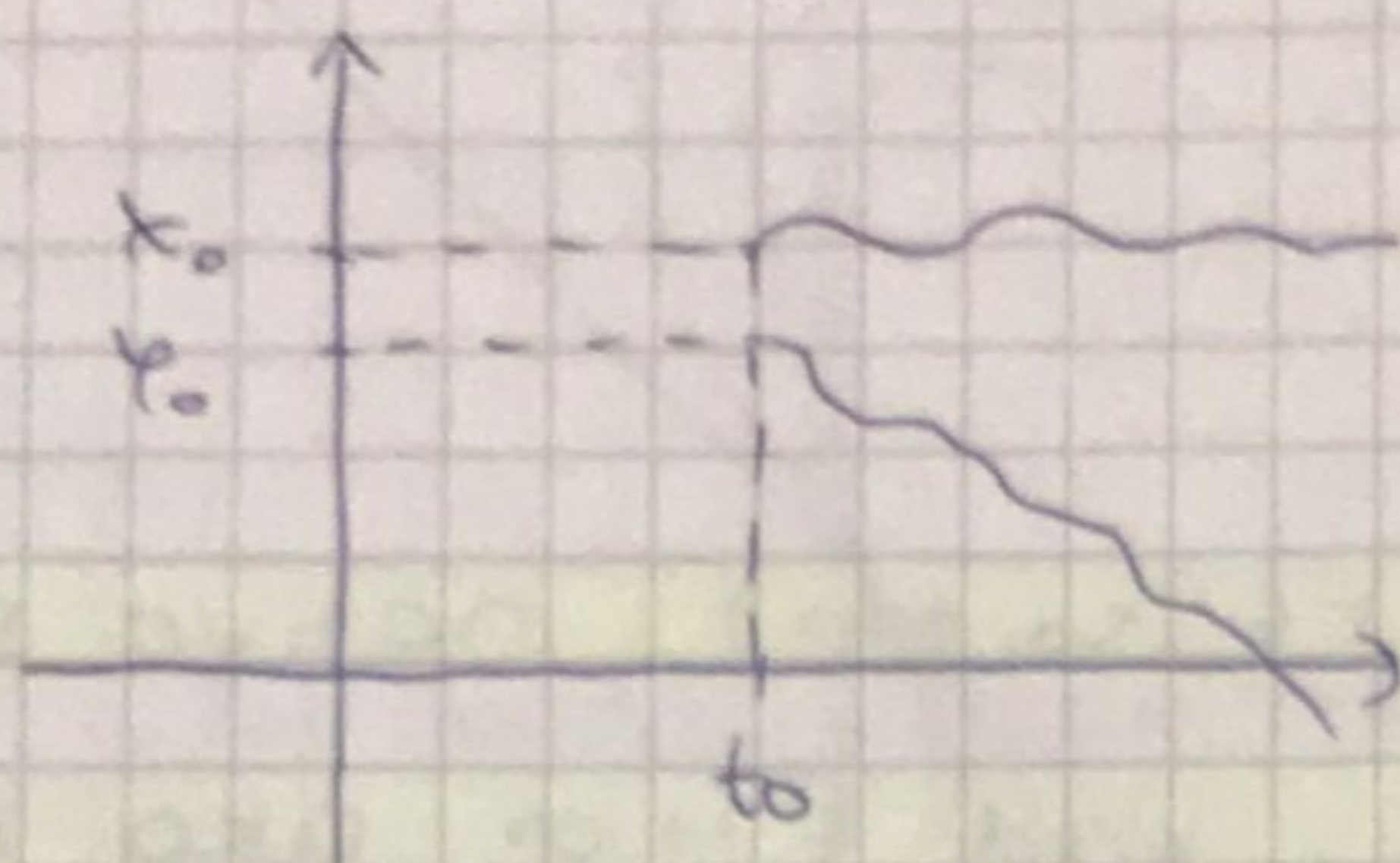
→ ako ne možemo sa konačnim intervalom produžiti do $+\infty$



- ne udaljava se puno od ovog (stabilno)



- približava se u ∞
(asimptotički stabilno)



- nestabilno rješenje

$$X' = F(t, X) \quad \text{— sistem j-ne}$$

$$X(t_0) = X_0$$

$$F, \frac{\partial F}{\partial X_i} \in C(D), \quad (t_0, X_0) \in D$$

Def:

$X = X(t), X(t_0) = X_0$ je stabilan po Ljapunovu, ako $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ t.d. za svako drugo rješenje

vector $\leftarrow X = \psi(t), \psi(t_0) = \psi_0$ vector ψ_0 važi:

$$\|X_0 - \psi_0\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - \psi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

Def:

Ako je rješenje stabilno, i ako je:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - \psi(t)\| = 0 \quad \dots ?$$

npr: $X' = F(t, X)$

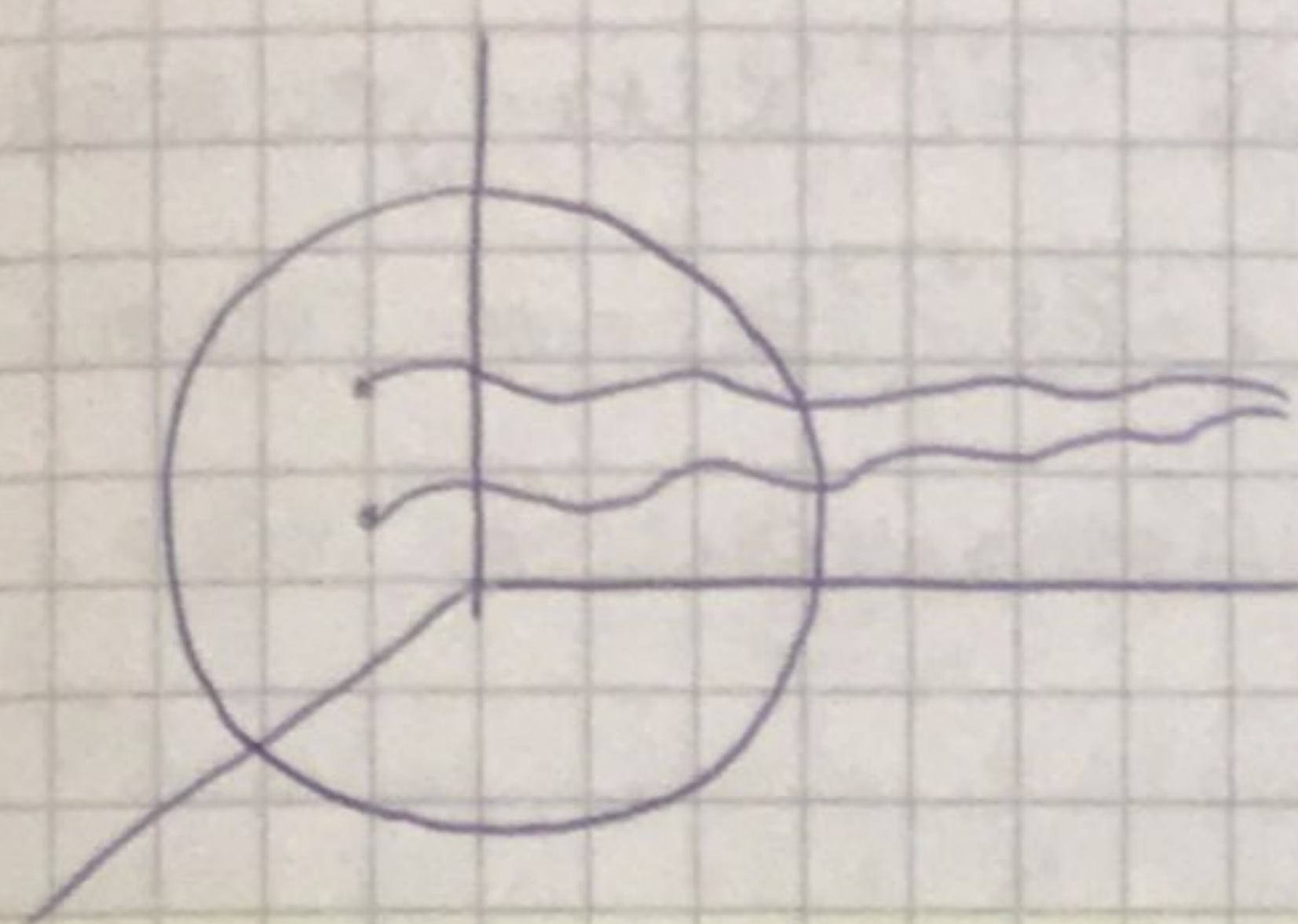
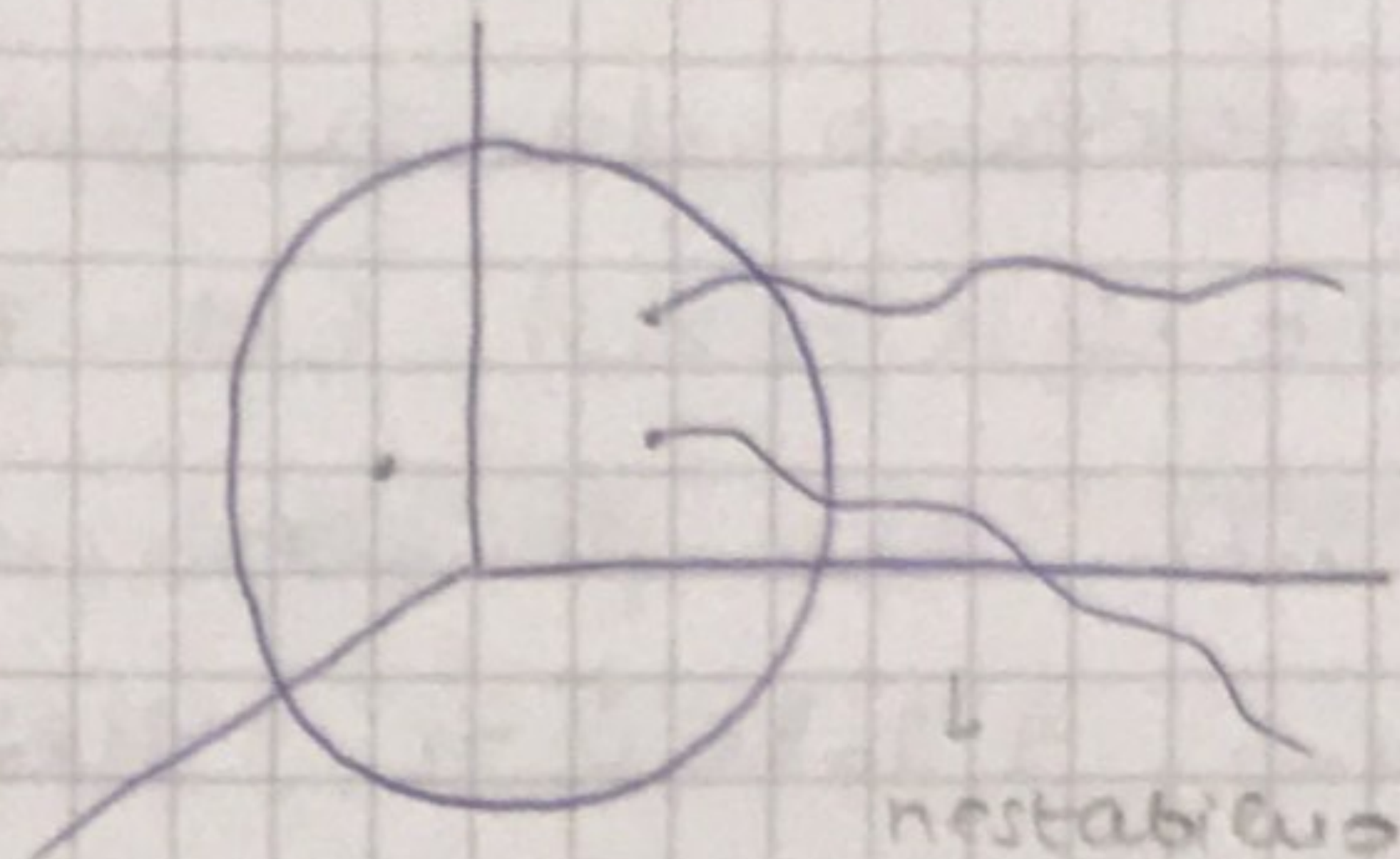
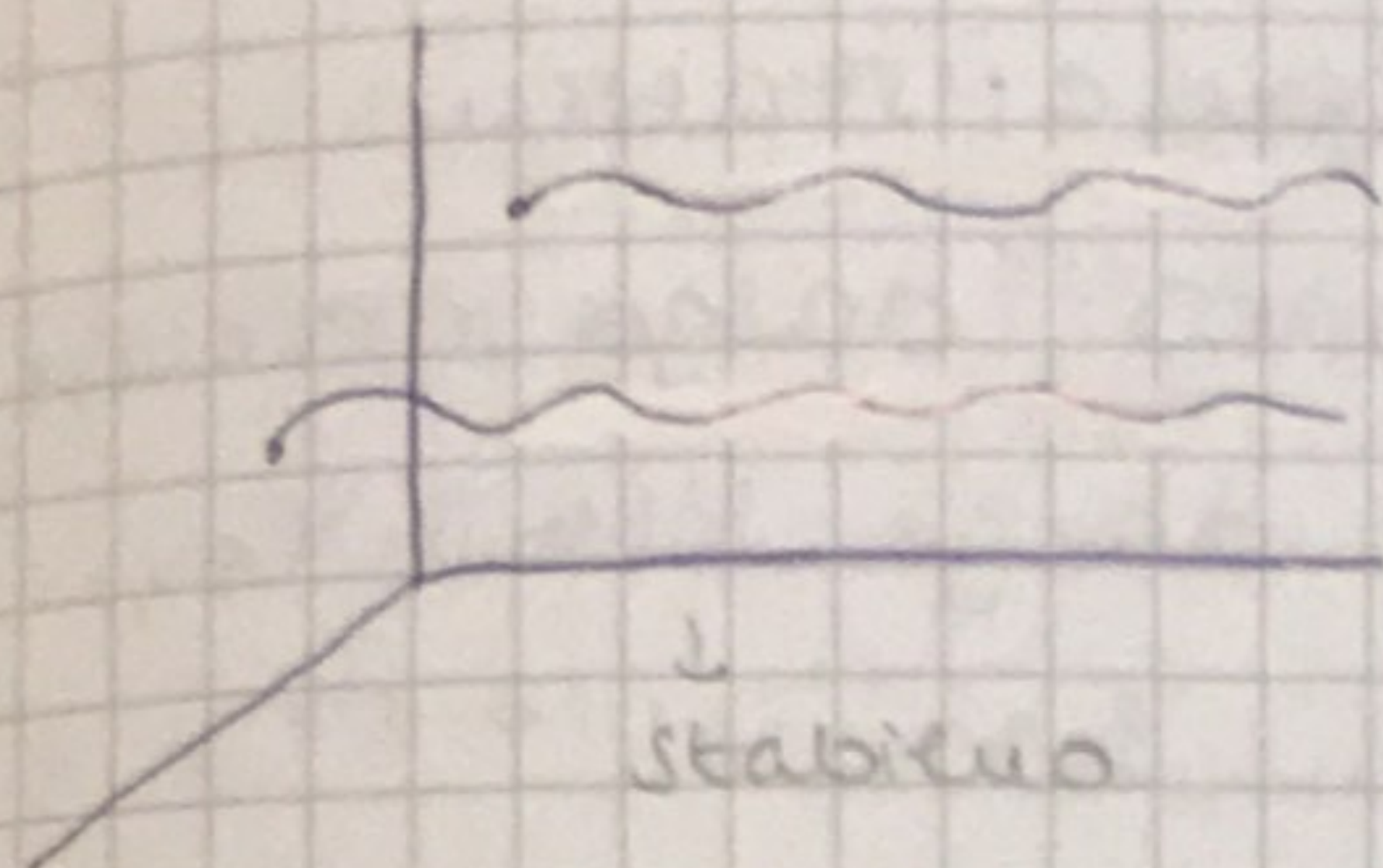
$X(t_0) = X_0$ — ispitujemo stabilnost rješenja $\psi(t)$

Ako uvedemo $Y = X(t) - \psi(t)$

$$\Rightarrow Y' = X'(t) - \psi'(t) = F(t, X(t)) - F(t, \psi(t)) = \tilde{F}(t, X(t) - \psi(t))$$

$$y' = \tilde{F}(t, y)$$

$$y(t_0) = 0, \quad y \equiv 0$$



Ako imamo linearni sistem dif. jednačina:

$$x' = A(t)x + B(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad G = I \times \mathbb{R}^n$$

$A, B \in C([t_0, \infty))$ - nećemo da bude konstanta mnogo nego kpr. (t_0, ∞)

Teorema:

Sva rješenja sistema linearnih dif. jednačina su istovremeno ili stabilna ili nestabilna.

Dokaz: Imamo sistem: $x' = A(t)x + B(t)$,

$x = \varphi(t)$ - neko rješenje

Svedimo sistem uvođeći supjenu: $y = x - \varphi(t)$

$$y' = x'(t) - \varphi'(t) = A(t)x(t) + B(t) - A(t)\varphi(t) - B(t) =$$

$$= A(t)(x(t) - \varphi(t)) = A(t)y$$

$$\Rightarrow y' = A(t)y$$

Pitanje je da li je $y \equiv 0$ stabilno ili nestabilno?

Pretpostavimo da je $y \equiv 0$ stabilno.

Pokazaćemo da su sva rješenja stabilna.

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ t.d. za svako drugo rješenje

$y = y(t)$, uz početni uslov da je $y(t_0) = y_0$,

važi: $\|y_0\| < \delta \Rightarrow \|y(t)\| < \varepsilon$.

$\|x_0 - y_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - y(t)\| < \varepsilon \Rightarrow y(t)$ je stabilno.

(Ova teorema ne važi za nelinearne sisteme)

- dinamički sistem (nema promjenjive t)

Def.

Položaj ravnoteže $x=0$ ovog sistema $x' = f(x)$

je stabilan po Lyapunovu, ako:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ t.d. za svaku trajektoriju $x = x(t)$

uz početni uslov $x(0) = x_0$, važi:

$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \in (0, +\infty)$.

Ako je još i $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$, tada je asimptotski stabilan.

1. Ispitati stabilnost rješenja Kosijevog tačka

$$x' = kx$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$\frac{dx}{x} = k dt \Rightarrow \ln x = kt + C_1$$

$$x = C e^{kt} \quad \text{- Opšte rješenje}$$

$$x(t_0) = x_0 \Rightarrow C e^{kt_0} = x_0 \Rightarrow C = x_0 e^{-kt_0}$$

$x = x_0 e^{k(t-t_0)}$ - rješenje k. zadatka

Pitamo se da li je stabilno ili nestabilno?

Neka je $y(t)$ neko drugo rješenje t.d. $y(t_0) = y_0$.

$$\Rightarrow y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}$$

$$|x_0 - y_0| < \delta \Rightarrow |x(t) - y(t)| = |x_0 e^{k(t-t_0)} - y_0 e^{k(t-t_0)}| =$$

$$= e^{k(t-t_0)} |x_0 - y_0|, \quad \forall t \geq t_0$$

nestab. nj

$$1^\circ \quad k > 0 \Rightarrow e^{k(t-t_0)} > 1 \Rightarrow |x(t) - y(t)| > |x_0 - y_0|$$

→ stabilno

$$2^\circ \quad k \leq 0 \Rightarrow e^{k(t-t_0)} \leq 1 \Rightarrow |x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0|$$

$$3^\circ \quad k < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{k(t-t_0)} |x_0 - y_0| = 0$$

za asympt. stab. rješenje
smeta nam kad je $k < 0$

↓
asympt. stab.