

Prvi domaći zadatak iz predmeta Linearna algebra 2

Preduslov: Pročitati sedmo poglavlje udžbenika)

1. Provjeriti da li sljedeća preslikavanja zadaju skalarni proizvod na $\mathbb{R}^4$:

a) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_4y_4$;

b) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4$;

c) $\langle x, y \rangle = x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1$.

2. Provjeriti da li sljedeća preslikavanja zadaju skalarni proizvod na $P_{\leq 3}$:

a) $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt, \quad \forall f, g \in P_{\leq 3}$;

b) $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f'(t)g(t)dt, \quad \forall f, g \in P_{\leq 3}$;

c) $\langle f, g \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, gdje je $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$, $g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3$.

3. Provjeriti da li sljedeća preslikavanja zadaju skalarni proizvod na prostoru matrica $M_{2 \times 2}$:

a) $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A + B)$;

b) $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T \cdot A)$;

c) $\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$, gdje su $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

4. Naći nenulti vektor $w \in \mathbb{R}^3$ koji je ortogonalan (u odnosu na standardni skalarni proizvod) vektorima $u = (1, 2, 1)$ i $v = (2, 5, -4)$.

5. Provjeriti da li sljedeće preslikavanje zadaje skalarni proizvod na $\mathbb{R}^2$:

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

6. Za koje vrijednosti parametra k sljedeće preslikavanje zadaje skalarni proizvod na $\mathbb{R}^2$:

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + kx_2y_2?$$

7. Dokazati da u svakom euklidskom prostoru važi tzv. Hilbertov identitet:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(|x + y|^2 - |x - y|^2), \quad \forall x, y \in E.$$

8. Neka za vektore $x, y \in E$ važi $\langle x, y \rangle^2 = \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$ (tj. nejednakost Švarca se za ove vektore pretvara u jednakost). Pokazati da su vektori x i y linearno zavisni.

9. Provjeriti da li su tačna sljedeća tvrdjenja:

a) Ako je $\langle x, y \rangle = 0$ za svaki vektor $y \in E$, tada je x nula vektor.

b) Ako su $x, y, z \in E$ vektori takvi da $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$, tada $y = z$.

10. Neka je $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza u E i $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Pokazati da $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$ za $i = 1, \dots, n$.

11. Neka je u prostoru $P_{\leq 2}$ zadato sljedeće preslikavanje:

$$\langle f, g \rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1).$$

- a) Pokazati da ovo preslikavanje zadaje skalarni proizvod u $P_{\leq 2}$.
- b) Naći jednu ortonormiranu bazu u $P_{\leq 2}$ za ovaj skalarni proizvod.

12. Da li preslikavanje iz prethodnog zadatka zadaje skalarni proizvod u prostoru $P_{\leq 3}$? Zašto?

13. Neka je $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3)$ linearni operator, takav da $\mathcal{B}v \perp v$ za svaki vektor $v \in \mathbb{R}^3$.

- a) Pokazati da operator $\mathcal{B}$ nije invertibilan.
- b) Da li isto važi u prostoru $\mathbb{R}^2$?

Napomena: Studentima se preporučuje da urade sve zadatke. Za domaći treba poslati zadatke 1a), 2a), 3a), 4, 5, 7, 9, 10.

Napomena: Zadaci 11, 12 i 13 su za nijensu teži od ostalih.