1. U prostoru $C^{2\times 2}$ matrica reda 2 sa kompleksnim koeficijentima je uvedena operacija: $\langle A, B\rangle = Tr(AB^*)$.

a) Pokazati da je ova operacija skalarni proizvod u $C^{2\times 2}$.

b) Dopuniti vektor $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ -1 & i \end{pmatrix}$ do ortonormirane bazu u $C^{2\times 2}$ u odnosu na ovaj skalarni proizvod.

c) Naći rastojanje od vektora A do potprostora L svih dijagonalnih matrica u $C^{2\times 2}$.

2. U prostoru R^3 je zadat simetrični operator $\mathcal{A}$ u standardnoj bazi matricom:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Odrediti svojstvene vrijednosti operatora $\mathcal{A}$.

b) Odrediti svojstvene vektore operatora $\mathcal{A}$.

c) Odrediti ortonormiranu bazu u R^3 u kojoj je matrica operatora $\mathcal{A}$ dijagonalna.

d) Odrediti ortogonalu matricu P tako da je P^TAP dijagonalna matrica.

3. Neka je operator $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(E \to E$ izometrija, tj. $|\mathcal{P}x| = |x|$ za $\forall x \in E$. Tada važi $\langle \mathcal{P}x, \mathcal{P}y\rangle = \langle x, y\rangle$ za $\forall x, y \in E$. Dokazati.

4. Sljedeću kvadratnu formu svesti na sumu kvadrata:

$$\mathcal{A}(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_2x_4 - 2x_4^2.$$

5. Neka je $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V \to V)$ unitarni operator na unitarnom prostoru V. Neka je $W \subseteq V$ invarijantan potprostor za operator $\mathcal{T}$. Tada je W invarijantan i za operator $\mathcal{T}^*$. Dokazati.