DRUGI KOLOKVIJUM IZ PREDMETA LINEARNA ALGEBRA II 8. maj 2017.

Zadaci:

1. Neka je na prostoru Π_n, prostoru polinoma stepena $\leq n$ sa kompleksnim koeficjentima, zadat unitarni proizvod $\langle p(z), q(z)\rangle = a_0\overline{b_0} + a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n}$, gdje su $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ i $q(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n$ proizvoljni polinomi. Na prostoru Π_n imamo u vidu operator

$$\mathcal{A}(p(z)) = zp'(z), \quad p(z) \in \Pi_n.$$

(a) Pokazati da je $\mathcal{A}$ linearan operator.
(b) Da li je operator $\mathcal{A}$ normalan?
(c) Da li je ermitski?
(d) Da li je unitaran za neki prirodan broj n?

2. Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E \to E)$ linearan operator u euklidskom prostoru E. Neka je $W \subseteq E$ invarijantan potprostor operatora $\mathcal{A}$. Da li možemo tvrditi da je tada i $W^\perp$ invarijantan potprostor operatora $\mathcal{A}$? Dokazati ili navesti kontraprimjer.

3. Pokazati da su svojstvene vrijednosti simetričnog operatora relane.

4. U prostoru $\mathbf{R}^3$ zadat je simetričan operator u standardnoj bazi narednom matricom:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Odrediti sve sopstvene vrijednosti operatora.
(b) Odrediti sve sopstvene potprostore.
(c) Odredtiti ortonormiranu bazu u $\mathbf{R}^3$ u kojoj je matrica operatora dijagonalna.
(d) Odrediti ortogonalnu matricu P tako da je $P^T AP$ dijagonalna matrica.