# DISKRETNA MATEMATIKA 2

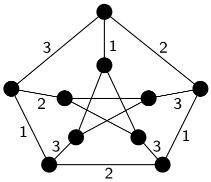
Dokazati da je

$$\gamma'(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ je paran broj} \\ 3, & n \text{ je neparan broj.} \end{cases}$$

Za vježbu.

Odrediti hromatsku klasu Petersenovog grafa.

*Rješenje.*
Na osnovu Vizingove teoreme hromatska klasa Petersenovog grafa je ili 3 ili 4.
Pretpostavimo da je $\gamma'(G) = 3$. To povlači da postoji pravilno $3-$bojenje grana Petersenovog grafa.
Za bojenje spoljašnje konture Petersenovog grafa potrebne su 3 boje.
Sada je bojenje grana koje spajaju čvorove spoljašnje konture sa čvorovima "zvijezde" jednoznačno određeno.



# 2. nastavak

Međutim tada postoje dvije susjedne grane "zvijezde" koje moraju biti obojene istom bojom. Kontradikcija. Slijedi $\gamma'(G) = 4$. $\square$

Ako je $G$ 3–regularan Hamiltonov graf, dokazati da je $\gamma'(G) = 3$.

*Rješenje.*
Neka je $C$ Hamiltonova kontura grafa $G$.
Kako su svi čvorovi grafa $G$ neparnog stepena, to graf $G$ mora imati paran broj čvorova.
Dakle, kontura $C$ je parne dužine, pa se njene grane mogu pravilno obojiti sa dvije boje.
Među granama grafa $G$ koje se ne nalaze na konturi $C$ nikoje dvije nijesu susjedne, jer je $G$ $3-$regularan. Njih možemo obojiti trećom bojom. Tako smo dobili pravilno bojenje grana grafa $G$ sa 3 boje, pa važi $\gamma'(G) \leqslant 3$.
Koristeći Vizingovu teoremu dobijamo $\gamma'(G) \geqslant 3$, pa je $\gamma'(G) = 3$
□

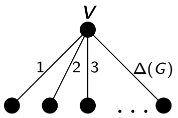
Ako je $G$ regularan graf sa neparnim brojem čvorova, dokazati da je $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$.

*Rješenje.*

Dovoljno je dokazati da $\gamma'(G) \neq \Delta(G)$.

Pretpostavimo da je $\gamma'(G) = \Delta(G)$ i posmatrajmo jedno pravilno bojenje grana grafa $G$ sa $\Delta(G)$ boja.

Kako je $G$ regularan graf, to za svaki čvor $v$ i za svaku boju $j \in \{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$ postoji grana incidentna čvoru $v$ i obojena bojom $j$. Drugim riječima, u svakom čvoru se "vidi" svaka boja.



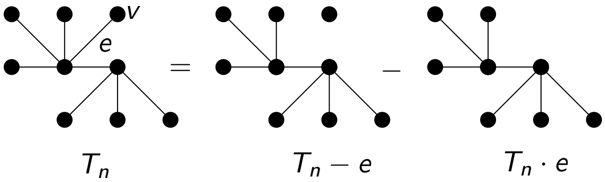
Grane obojene bojom 1 "pokrivaju" paran broj čvorova, a kako dati graf ima neparan broj čvorova, slijedi da bar jedan čvor grafa $G$ nije incidentan sa granom koja je obojena bojom 1. Kontradikcija. Dakle, $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$. $\square$

Dokazati da je $\gamma'(G) = \gamma(L(G))$.

*Rješenje.*
Po definiciji grafa $L(G)$, dvije grane su susjedne u $G$ akko su odgovarajući čvorovi susjedni u $L(G)$. Odatle slijedi da je svako pravilno bojenje grana grafa $G$ ujedno i pravilno bojenje čvorova grafa $L(G)$. $\square$

Odrediti hromatski polinom stabla $T_n$ sa $n$ čvorova.

*Rješenje.*
Neka je $v$ čvor stepena 1 u grafu $T_n$ i neka je $e$ njemu incidentna grana.



# 6. nastavak

$$\begin{aligned} P(T_n, t) &= P(T_n - e, t) - P(T_n \cdot e, t) \\ &= t \cdot P(T_n - v, t) - P(T_n - v, t) \\ &= (t-1)P(T_{n-1}, t) \\ &= \cdots = (t-1)^{n-2} P(T_2, t). \end{aligned}$$

Kako je $P(T_2, t) = t(t-1)$, to dobijamo

$$P(T_n, t) = t(t-1)^{n-1}. \qquad \square$$

Dokazati da za konturu $C_n$ važi

$$P(C_n, t) = (t-1)^n + (-1)^n(t-1).$$

*Rješenje.*
Neka je $e \in E(C_n)$. Tada važi

$$P(C_n, t) = P(C_n - e, t) - P(C_n \cdot e, t)$$

$$= P(P_n, t) - P(C_{n-1}, t)$$

Dokaz izvodimo indukcijom po $n$.
Za $n = 3$, $C_3 = K_3$, pa je

$$P(C_3, t) = t(t-1)(t-2)$$

$$= (t-1+1)(t-1)(t-1-1)$$

$$= (t-1)^3 + (-1)^3(t-1).$$

Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n = k - 1$ i dokažimo da važi za $n = k$.

$$
\begin{aligned}
P(C_k, t) &= P(P_k, t) - P(C_{k-1}, t) \\
&= t(t-1)^{k-1} - (t-1)^{k-1} - (-1)^{k-1}(t-1) \\
&= (t-1)^k + (-1)^k(t-1).
\end{aligned}
$$

$\square$

Ako je $G$ graf sa $\varepsilon \geqslant 1$ grana, dokazati da je zbir koeficijenata hromatskog polinoma $P(G, t)$ jednak nuli.

*Rješenje.*
Kako je $\varepsilon \geqslant 1$, to je $\gamma(G) \geqslant 2$, pa slijedi da ne možemo čvorove datog grafa pravilno obojiti sa jednom bojom.
Slijedi $P(G, 1) = 0$, a $P(G, 1)$ je zbir koeficijenata polinoma $P(G, t)$. □

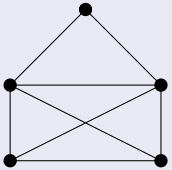
# 9.

Neka je $G$ graf sa podgrafovima $G_1$ i $G_2$ za koje važi: $G = G_1 \cup G_2$ i $G_1 \cap G_2 = K_n$ za neko $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da važi

$$P(G,t) = \frac{P(G_1,t) \cdot P(G_2,t)}{P(K_n,t)}.$$

Za vježbu.

Odrediti hromatski polinom grafa $G$ sa slike.



*Rješenje.*

Iskoristićemo prethodni zadatak.

Neka je $G_1 := G[\{v_1, v_2, v_3, v_4\}] = K_4$, $G_2 := G[\{v_3, v_4, v_5\}]$.

Uočimo da je

$$G_1 \cap G_2 = K_2,$$

pa na osnovu prethodnog zadatka važi

# 8. nastavak

$$
\begin{aligned}
P(G,t) &= \frac{P(G_1,t)\cdot P(G_2,t)}{P(K_2,t)} \\
&= \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)\cdot t(t-1)(t-2)}{t(t-1)} \\
&= t(t-1)(t-2)^2(t-3). \qquad \square
\end{aligned}
$$