DISKRETNA MATEMATIKA 2

Osobe $A_1, \ldots, A_5$ apliciraju za pet poslova $P_1, \ldots, P_5$. Poznato je sljedeće

(1) za posao P_1 aplicirala je osoba A_2,

(2) za posao P_2 aplicirali su svi kandidati osim A_4,

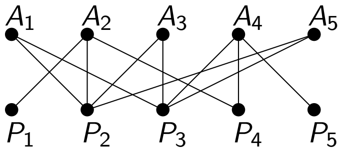
(3) za posao P_3 aplicirali su svi kandidati osim A_2,

(4) za posao P_4 aplicirali su A_2 i A_4,

(5) za posao P_5 aplicirala je osoba A_4.

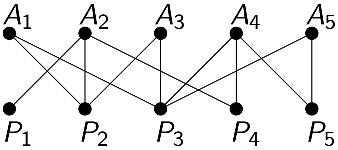
Da li je moguće dodijeliti svakoj osobi po jedan posao za koji je aplicirala (jedan posao može dobiti samo jedna osoba)? A ako osoba A_5 promijeni odluku i umjesto za posao P_2 aplicira za posao P_5?

Rješenje.
Modelirajmo dati problem bipartitnim grafom G sa biparticijom (X, Y), gdje je X skup čvorova koji odgovaraju osobama, a Y skup čvorova koji odgovaraju poslovima; čvor $A \in X$ je susjedan sa $P \in Y$ akko je osoba A konkurisala za posao P.



Ako bi bilo moguće svakoj osobi dodijeliti posao za koji je aplicirala (tako da sve osobe dobiju različiti posao) tada bi svih 5 poslova bili raspodijeljeni među 5 kandidata, pa bi posao P_1 morao biti dodijeljen osobi A_2, posao P_5 osobi A_4, ali tada P_4 ne bi mogao biti dodijeljen nikome. Kontradikcija.

U drugom slučaju imamo sljedeći graf.



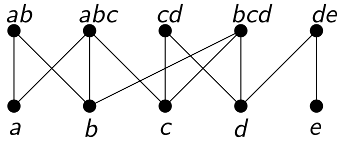
U ovom slučaju moguće je dodijeliti svakoj osobi po jedan posao za koji je aplicirala: P_1 osobi A_2, P_2 osobi A_1, P_3 osobi A_3, P_4 osobi A_4 i P_5 osobi A_5. $\square$

2.

Dat je skup kodova $X = \{ab, abc, cd, bcd, de\}$. Želimo proslijediti ove kodove kao poruku, ali umjesto slanja cijele riječi treba poslati jedno slovo koje je sadržano u toj riječi. Da li je moguće ostvariti slanje, tako da se svaka riječ na jedinstven način može odrediti na osnovu poslatog slova?

Rješenje.

Označimo sa S skup slova $\{a, b, c, d, e\}$. Konstruišimo bipartitan graf sa biparticijom (X, S) tako da je čvor $s \in S$ susjedan čvoru $x \in X$ akko je slovo s sadržano u kodu x.

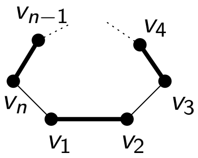


Sljedeće sparivanje daje potvrdan odgovor:

$$\{(ab, b), (abc, a), (cd, d), (bcd, c), (de, e)\}. \qquad \square$$

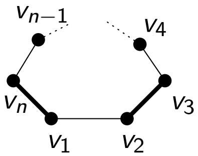
Odrediti broj savršenih sparivanja u konturi C_n, $n \geqslant 3$.

Rješenje.
Savršeno sparivanje konture C_n ima tačno $\frac{n}{2}$ grana, pa ako je n neparan broj, onda C_n nema savršenog sparivanja. Neka je n paran broj i neka je $C_n = v_1 v_2 \dots v_n v_1$. Označimo sa M savršeno sparivanje konture C_n. Ako $v_1 v_2 \in M$, onda $v_i v_{i+1} \in M$ za sve neparne indekse $3 \leqslant i \leqslant n-1$.



Ako $v_1 v_2 \notin M$, onda $v_i v_{i+1} \in M$ za sve parne indekse $2 \leqslant i \leqslant n-2$ i $v_n v_1 \in M$.

3. nastavak



Dakle, ako je n paran broj postoje tačno dva savršena sparivanja konture C_n. $\square$

4.

Za $n \geqslant 1$ odrediti broj savršenih sparivanja u grafu $K_{n,n}$.

Rješenje.
Neka je (X, Y) biparticija grafa $K_{n,n}$ i neka je $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Za čvor x_1 imamo n mogučnosti da izaberemo $y_1 \in Y$ tako da grana $x_1 y_1$ pripada savršenom sparivanju.
Za čvor x_2 imamo $n - 1$ mogućnosti da izaberemo $y_2 \in Y \setminus \{y_1\}$ tako da $x_2 y_2$ pripada savršenom sparivanju.
Itd.
Po principu proizvoda dobijamo

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

savršenih sparivanja za $K_{n,n}$. $\square$

Odrediti broj savršenih sparivanja u grafu K_n, $n \geqslant 3$.

Za vježbu. $\square$

Neka je G bipartitan graf sa biparticijom (X, Y). Za $S \subset X$ neka je E_1 skup grana grafa G incidentnih sa čvorovima iz S, i neka je E_2 skup grana grafa G incidentnih sa čvorovima iz $N(S)$. Da li je u opštem slučaju $E_1 \subset E_2$? Obrazložiti odgovor.

Rješenje.
Neka je $xy \in E_1$ $(x \in X,\ y \in Y)$.
Tada je $x \in S$ (po definiciji skupa E_1).
Po definiciji skupa $N(S)$ dobijamo da $y \in N(S)$, odnosno $xy \in E_2$, tj.

$$E_1 \subset E_2. \qquad \square$$

Teorema Halla

Teorema

Neka je G bipartitni graf sa biparticijom (X, Y). Tada G sadrži sparivanje koje zasićuje svaki čvor iz X ako i samo ako je

$$|N(S)| \geqslant |S|, \text{ za svako } S \subset X.$$

7.

Neka je G bipartitan graf sa biparticijom (X, Y) i neka postoji prirodan broj k tako da važi

$$d(y) \leqslant k \leqslant d(x), \text{ za svako } y \in Y \text{ i svako } x \in X.$$

Za $S \subset X$ označimo sa E_1 skup grana grafa G incidentnih sa čvorovima iz S, a sa E_2 skup grana grafa G incidentnih sa čvorovima iz $N(S)$.

(a) Dokazati da je

$$k|S| \leqslant |E_1| \leqslant |E_2| \leqslant k|N(S)|.$$

(b) Dokazati da G sadrži sparivanje koje zasićuje svaki čvor iz X.

(c) Dokazati da svaki k–regularni bipartitni graf, $k \geqslant 1$, ima savršeno sparivanje.

(a)
Kako je $d(x) \geqslant k$ za svako $x \in X$, to je

$$|E_1| = \sum_{x \in S} d(x) \geqslant \sum_{x \in S} k = k|S|. \tag{1}$$

Kako je $d(y) \leqslant k$ za svako $y \in Y$, to je

$$|E_2| = \sum_{y \in N(S)} d(y) \leqslant \sum_{y \in N(S)} k = k|N(S)|. \tag{2}$$

Na osnovu prethodnog zadatka dobijamo

$$|E_1| \leqslant |E_2|. \tag{3}$$

Iz (1), (2) i (3) najzad dobijamo

$$k|S| \leqslant |E_1| \leqslant |E_2| \leqslant k|N(S)|.$$

(b)
Iz (a) slijedi da je $|S| \leqslant |N(S)|$ za svako $S \subset X$, pa na osnovu teoreme Halla, G sadrži sparivanje koje zasićuje svaki čvor iz X.
(c)
Za bipartitan $k-$regularan graf, $k \geqslant 1$ važi

$$k|X| = \sum_{x \in X} d(x) = \sum_{y \in Y} d(y) = k|Y|,$$

tj. $|X| = |Y|$, pa na osnovu (b), postoji savršeno sparivanje u svakom k–regularnom, $k \geqslant 1$, bipartitnom grafu. $\square$

Neka je G bipartitan graf sa biparticijom (X, Y). Dokazati da G sadrži sparivanje koje zasićuje svaki čvor iz X akko

$$|X \setminus N(T)| \leqslant |Y \setminus T|,$$

za svako $T \subset Y$.

Rješenje.
$(\Rightarrow)$. Pretpostavimo da G sadrži sparivanje koje zasićuje svaki čvor u X. Tada je, na osnovu teoreme Halla, $|S| \leqslant |N(S)|$ za svako $S \subset X$.
Neka je $T \subset Y$ i $S = X \setminus N(T)$. Dokažimo da je $N(S) \subset Y \setminus T$.
Neka je $y \in N(S)$. Tada postoji $x \in S$ tako da $xy \in E(G)$. Ako bi važilo $y \in T$, to bi značilo da $x \in N(T)$ odnosno $x \notin S$.
Kontradikcija. Dakle, $y \notin T$ odnosno $y \in Y \setminus T$. Najzad,

$$|X \setminus N(T)| = |S| \leqslant |N(S)| \leqslant |Y \setminus T|.$$

($\Leftarrow$). Pretpostavimo da je $|X \diagdown N(T)| \leqslant |Y \diagdown T|$ za svako $T \subset Y$. Neka je $S \subset X$ i $T = Y \backslash N(S)$ tj. $Y \backslash T = N(S)$. Tada $N(T) \subset X \backslash S$, pa je $S \subset X \backslash N(T)$. Iz pretpostavke dobijamo

$$|S| \leqslant |X \backslash N(T)| \leqslant |Y \backslash T| = |N(S)|,$$

pa na osnovu teoreme Halla postoji sparivanje koje zasićuje svaki čvor iz X. $\square$

Neka je G bipartitan graf sa biparticijom (X, Y). Dokazati da G sadrži savršeno sparivanje akko je $|S| \leqslant |N(S)|$ za svako $S \subset V(G)$.

Rješenje.
$(\Rightarrow)$. Pretpostavimo da G sadrži savršeno sparivanje. Slijedi da G sadrži sparivanje koje zasićuje svaki čvor iz X, pa na osnovu teoreme Halla

$$|S| \leqslant |N(S)|, \ \forall S \subset X.$$

Slično,

$$|S| \leqslant |N(S)|, \ \forall S \subset Y.$$

Neka je $S \subset V(G)$, proizvoljno. Tada je $S = S_1 \cup S_2$, gdje je $S_1 \subset X$ i $S_2 \subset Y$ i važi

$$|S| = |S_1| + |S_2| \leqslant |N(S_1)| + |N(S_2)| = |N(S)|.$$

($\Leftarrow$). Pretpostavimo da je $|S| \leqslant |N(S)|$ za svako $S \subset V(G)$. Slijedi da je $|S| \leqslant |N(S)|$ za svako $S \subset X$ i $|S| \leqslant |N(S)|$ za svako $S \subset Y$. Sada, na osnovu teoreme Halla, dobijamo da G sadrži sparivanje koje zasićuje i X i Y, pa je $|X| = |Y|$ tj. G sadrži savršeno sparivanje. $\square$

Nastavnici A, B, C, D, E i F su članovi 5 komisija. Komisije su

$$\{A, B, C\},\ \{D, E, F\},\ \{A, D, E, F\},\ \{A, C, E, F\} \text{ i } \{A, B, F\}.$$

Plan rada za svaku komisiju sačinjava nastavnik koji nije njen član i za različite komisije to čini različiti nastavnik. Da li je to moguće realizovati? Obrazložiti odgovor.

Rješenje.
Neka je S_i skup nastavnika koji nijesu u $i-$toj komisiji.
Tada je
$S_1 = \{D, E, F\}$, $S_2 = \{A, B, C\}$, $S_3 = \{B, C\}$, $S_4 = \{B, D\}$ i $S_5 = \{C, D, E\}$.
$(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$ ima sistem različitih predstavnika (dokazati!).
(E, A, B, D, C) je takav sistem. $\square$

Na koledžu postoji 12 sportskih klubova. Svaki klub ima bar 3 člana i nijedan student nije član četiri ili više klubova. Dokazati da familija od 12 klubova ima sistem različitih predstavnika.

Rješenje.
Označimo sa $X = \{S_1, \ldots, S_{12}\}$ skup sportskih klubova, a sa Y skup studenata na koledžu. Modelirajmo datu situaciju bipartitnim grafom G sa biparticijom (X, Y):

$$S \in X \text{ je susjedan sa } y \in Y \text{ akko } y \in S.$$

Po uslovu zadatka je

$$d(y) \leqslant 3 \leqslant d(S_i),$$

za svako $y \in Y$ i svako $i \in \{1, \ldots, 12\}$. Na osnovu zadatka 7. slijedi da G sadrži sparivanje M koje zasićuje svaki čvor iz X:

$$M = \{S_1y_1, \ldots, S_{12}y_{12}\}.$$

Odatle je $(y_1, \dots, y_{12})$ sistem različitih predstavnika od $(S_1, \dots, S_{12})$. $\square$

Neka je G povezan bipartitan graf sa biparticijom (X, Y), gdje je $|X| \geqslant 2$, $|Y| \geqslant 2$. Dokazati da su sljedeći iskazi ekvivalentni.

(i) Svaka grana grafa G je sadržana u savršenom sparivanju od G.

(ii) $|X| = |Y|$ i $|S| < |N(S)|$ za svako $\varnothing \neq S \subset X$.

(iii) $G - \{x, y\}$ sadrži savršeno sparivanje za sve $x \in X$, $y \in Y$.