DISKRETNA MATEMATIKA 2

Neka je G Ojlerov graf sa 8 čvorova i 10 grana i neka je k maksimalna vrijednost za $\Delta(G)$. Odrediti k i konstruisati sve grafove sa $\Delta(G) = k$.

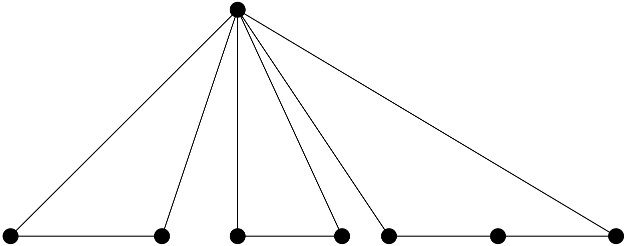
Rješenje.
Kako je G Ojlerov graf to je $\Delta(G)$ paran broj, pa je $\Delta(G) \leqslant 6$. Dokazaćemo da je $k = 6$. Neka su n_2, n_4, n_6 brojevi čvorova stepena $2, 4, 6$ redom. Dobijamo sistem od dvije jednačine sa 3 nepoznate

$$\begin{cases} n_2 + n_4 + n_6 = 8, \\ 2n_2 + 4n_4 + 6n_6 = 2 \cdot 10 \Longleftrightarrow n_2 + 2n_4 + 3n_6 = 10, \end{cases}$$

čiji je skup rješenja $\{(6 + n_6, 2 - 2n_6, n_6)\}$, pri čemu mora važiti $2 - 2n_6 \geqslant 0$, tj. $n_6 \leqslant 1$, pa je skup rješenja sistema

$$\{(6, 2, 0), (7, 0, 1)\}.$$

Dakle maksimalna vrijednost za k je 6 i svi takvi grafovi imaju 7 čvorova stepena 2 i 1 čvor stepena 6, tačnije samo je jedan takav graf (do na izomorfizam):



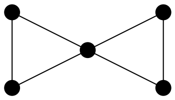
$\square$

Neka je G Ojlerov graf sa 8 čvorova i 10 grana i neka je $\Delta(G) = 4$. Odrediti broj čvorova stepena 4. Pretpostavimo dalje da nikoja dva čvora stepena 4 nijesu susjedna. Konstruisati sve takve grafove.

Za vježbu. $\square$

Dokazati da Ojlerov graf ne sadrži mostove. Da li to važi i za artikulacione čvorove?

Rješenje.
Graf je Ojlerov ako i samo ako je povezan i svi njegovi čvorovi su parnog stepena. Dokazali smo da graf kod koga su svi čvorovi parnog stepena ne sadrži most (2. zadatak, 4. čas), pa Ojlerov graf ne sadrži mostove.
Za artikulacione čvorove to ne važi, Ojlerov graf može sadržati artikulacioni čvor. Primjer:



□

Ako je G Ojlerov graf neparnog broja čvorova i graf $\overline{G}$ je povezan, tada je i $\overline{G}$ Ojlerov graf. Dokazati.

Rješenje.
Neka je $2r+1$, $r>0$, broj čvorova grafa G.
Kako je G Ojlerov graf to je svaki njegov čvor parnog stepena.
Ako je $d_G(v)=2k$, onda je $d_{\overline{G}}(v)=2r+1-2k-1=2r-2k$, odnosno svaki čvor grafa $\overline{G}$ je parnog stepena i $\overline{G}$ je povezan graf (uslov zadatka), pa je $\overline{G}$ Ojlerov graf. $\square$

Neka je G bipartitan graf sa biparticijom (X, Y). Ako je G Hamiltonov graf tada je $|X| = |Y|$.

Rješenje.

Pretpostavimo suprotno tj. pretpostavimo da je $|X| \neq |Y|$. Neka je npr. $|X| < |Y|$ (analogno se razmatra $|X| > |Y|$). Tada je $\omega(G - X) = |Y| > |X|$, pa G nije Hamiltonov graf. Kontradikcija. $\square$

Koristili smo tvrđenje:

Ako je G Hamiltonov graf, onda za svako $\varnothing \neq S \subset V(G)$ važi

$$\omega(G - S) \leqslant |S|.$$

Neka je G graf sa $\nu \geqslant 3$ čvorova i ε grana. Dokazati:

(a) Ako postoje dva nesusjedna čvora u i v takva da važi

$$d(u) + d(v) \leqslant \nu - 1,$$

tada je

$$\varepsilon \leqslant \binom{\nu - 1}{2} + 1.$$

(b) Ako je $\varepsilon \geqslant \binom{\nu - 1}{2} + 2$, tada je G Hamiltonov graf.

(c) Konstruisati graf sa $\nu \geqslant 3$ čvorova i $\varepsilon = \binom{\nu - 1}{2} + 1$ grana, koji nije Hamiltonov.

Rješenje.
(a)
Kako u i v nijesu susjedni čvorovi to slijedi

$$\varepsilon(G) = \varepsilon(G - \{u, v\}) + d(u) + d(v).$$

Koristeći uslov da je $d(u) + d(v) \leqslant \nu - 1$ i

$$\varepsilon(G - \{u, v\}) \leqslant \binom{\nu - 2}{2} = \frac{(\nu - 2)(\nu - 3)}{2}$$

dobijamo

$$\varepsilon(G) \leqslant \frac{(\nu - 2)(\nu - 3)}{2} + \nu - 1 = \frac{(\nu - 1)(\nu - 2)}{2} + 1 = \binom{\nu - 1}{2} + 1.$$

(b)
Kako je $\varepsilon \geqslant \binom{\nu-1}{2} + 2 > \binom{\nu-1}{2} + 1$, to na osnovu (a) za svaka dva nesusjedna čvora u i v važi

$$d(u) + d(v) > \nu - 1 \Longrightarrow d(u) + d(v) \geqslant \nu,$$

a po uslovu zadatka je $\nu \geqslant 3$, pa je G Hamiltonov graf na osnovu Oreove teoreme.
(c)
Ako proizvoljan čvor v grafa $K_{\nu-1}$ spojimo granom sa dodatnim čvorom $u \notin V(K_{\nu-1})$ dobijamo graf sa traženim brojem grana koji nije Hamiltonov. $\square$

Oreova teorema. *Neka je G graf sa ν, $\nu \geqslant 3$, čvorova takav da za svaka dva nesusjedna čvora u i v važi $d(u) + d(v) \geqslant \nu$. Tada je G Hamiltonov graf.*

Neka je G graf sa $\nu \geqslant 2$ čvorova, takav da $\delta(G) \geqslant \dfrac{\nu-1}{2}$.
Dokazati da G posjeduje Hamiltonov put.

Rješenje.
Uvedimo dodatni čvor w i spojimo novi čvor sa svim čvorovima grafa G. Neka je H novodobijeni graf. Važi $\nu(H) = \nu + 1 \geqslant 3$.
Neka je $x \in V(H)$ proizvoljan čvor.
Ako je $x = w$, onda je $d_H(x) = \nu > \dfrac{\nu+1}{2}$.
Ako je $x \neq w$, onda je $d_H(x) = d_G(x) + 1 \geqslant \dfrac{\nu-1}{2} + 1 = \dfrac{\nu+1}{2}$.
Dakle, za svako $x \in V(H)$ je $d_H(x) \geqslant \dfrac{\nu+1}{2}$, pa na osnovu Dirakove teoreme, H posjeduje Hamiltonovu konturu, označimo je sa C. Jasno $C - w$ je Hamiltonov put u G. $\square$

Dirakova teorema. *Ako je G graf sa $\nu, \nu \geqslant 3$, čvorova takav da je $d(v) \geqslant \frac{\nu}{2}$ za svako $v \in V(G)$, tada je G Hamiltonov graf.*

Dokazati da Hamiltonov graf ne sadrži ni artikulacione čvorove ni mostove.

Za vježbu. $\square$

Dokazati da je komplement regularnog nepovezanog grafa G sa $\nu \geqslant 3$ čvorova, Hamiltonov graf.

Rješenje.
Neka je H komponenta grafa G sa najmanjim brojem čvorova. Kako je $\nu(H) \leqslant \dfrac{\nu}{2}$, to za svako $v \in V(H)$ važi $d_G(v) \leqslant \dfrac{\nu}{2} - 1$. Sa druge strane, G je regularan graf, pa je za svako $v \in V(G)$ ispunjeno $d_G(v) \leqslant \dfrac{\nu}{2} - 1$ i

$d_{\overline{G}}(v) = \nu - 1 - d_G(v) \geqslant \nu - 1 - \dfrac{\nu}{2} + 1 = \dfrac{\nu}{2}$ za svako $v \in V(\overline{G})$.

Na osnovu Dirakove teoreme $\overline{G}$ je Hamiltonov graf. $\square$

10.

> Na dvoru kralja Artura okupilo se $2n$ vitezova ($n > 1$). Svaki od njih ima najviše $n-1$ neprijatelja. Dokazati da kraljev savjetnik može rasporediti vitezove oko okruglog stola, tako da nijedan vitez ne sjedi pored svojeg neprijatelja.

Rješenje.
Neka je G graf sa $2n$ čvorova koji su u "$1-1$" korespodenciji sa skupom vitezova; 2 čvora su povezana granom akko odgovarajući vitezovi nijesu neprijatelji.
Graf G ima $2n$ čvorova i svaki čvor je stepena $\geqslant n = \frac{2n}{2}$, pa na osnovu Dirakove teoreme graf G sadrži Hamiltonovu konturu. Ova kontura daje traženi raspored oko okruglog stola. $\square$

Ako graf G sadrži Hamiltonov put, tada za svaki podskup S skupa $V(G)$ važi
$$\omega(G-S) \leqslant |S|+1.$$

Rješenje.
Neka je H Hamiltonov put u grafu G i neka su u i v njegovi krajnji čvorovi. Ako su u i v susjedni, onda je G Hamiltonov graf, pa za svaki podskup S skupa $V(G)$ važi

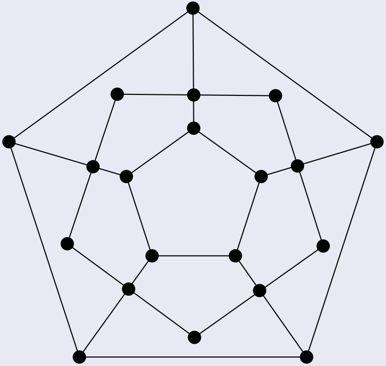
$$\omega(G-S) \leqslant |S| < |S|+1.$$

Ako uv nije grana grafa G, tada je $G' = G + uv$ Hamiltonov graf, pa je $\omega(G'-S) \leqslant |S|$. Kako je $\omega(G'-S) \geqslant \omega(G-S) - 1$, jer dodavanjem grane grafu smanjuje se broj komponenti tog grafa najviše za jedan, to je

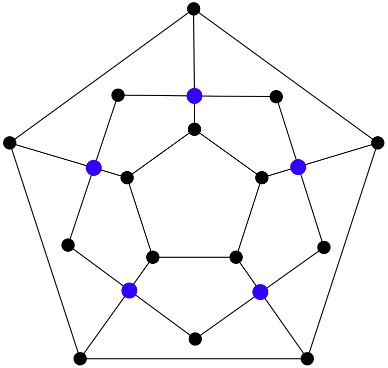
$$\omega(G-S) \leqslant \omega(G'-S) + 1 \leqslant |S|+1. \qquad \square$$

12.

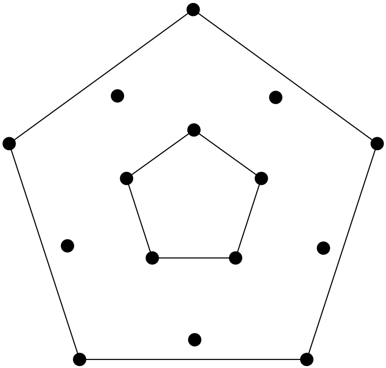
Dokazati da graf na slici ne sadrži Hamiltonov put.



Rješenje. Iskoristićemo prethodni zadatak.



Neka "plavi" čvorovi čine skup $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.
Udaljavanjem "plavih" čvorova (i njima incidentnih grana) iz datog grafa dobijamo graf:



Dakle, $\omega(G - S) = 1 + 1 + 5 = 7 > 6 = |S| + 1$, pa na osnovu prethodnog zadatka dati graf ne sadrži Hamiltonov put. $\square$

(a) Ako je G Hamiltonov graf, onda je $d(v) \geqslant 2$ za sve $v \in V(G)$. Dokazati.

(b) Neka je G graf takav da je $d(v) \geqslant 2$ za sve $v \in V(G)$. Da li je G obavezno Hamiltonov graf? Obrazložiti odgovor.

Za vježbu. $\square$

Ako je G k–regularan graf sa $\nu(G) \geqslant 2k+2$ čvorova, dokazati da je njegov komplement $\overline{G}$ Hamiltonov graf.

Rješenje.
Kako je $d_{\overline{G}}(v) = \nu - 1 - d_G(v) = \nu - (k+1) \geqslant \nu - \dfrac{\nu}{2} = \dfrac{\nu}{2}$ za svako $v \in V(\overline{G})$ i $\nu > 3$, to je $\overline{G}$ Hamiltonov graf na osnovu Dirakove teoreme. $\square$