DISKRETNA MATEMATIKA 2

(a) $\gamma(G) = 1$ ako i samo ako je $E(G) = \varnothing$;

(b) $\gamma(G) = 2$ ako i samo ako je G bipartitan graf (sa bar jednom granom);

(c) Neka je G povezan graf. Tada je $\gamma(G) = \Delta(G) + 1$ ako i samo ako je G kompletan graf ili neparna kontura.

Rješenje.
(1) Za vježbu.
(2) ($\Longrightarrow$).
Neka je $\gamma(G) = 2$. Tada graf G ima bar jednu granu. Uočimo jedno pravilno bojenje čvorova grafa G sa dvije boje. Ovo bojenje određuje particiju skupa $V(G) = V_1 \cup V_2$, gdje je V_1 skup čvorova obojenih bojom 1, a V_2 skup čvorova obojenih bojom 2 (čvorovi obojeni istom bojom nijesu susjedni). Dakle, G je bipartitan graf (sa bar jednom granom).

$(\Longleftarrow)$.
Neka je G bipartitan graf. Kako G ima bar jednu granu to je $\gamma(G) \geqslant 2$. Neka je (X, Y) biparticija grafa G. Definišimo $\theta : V(G) \longrightarrow \{1, 2\}$ sa

$$\theta(v) = \begin{cases} 1, & v \in X \\ 2, & v \in Y \end{cases} .$$

θ je pravilno $2-$bojenje čvorova grafa G. Na osnovu toga je $\gamma(G) \leqslant 2$. Dakle, $\gamma(G) = 2$.
(3) $(\Longrightarrow)$.
Neka je $\gamma(G) = \Delta(G) + 1$. Slijedi da je $\gamma(G) > \Delta(G)$, pa na osnovu Bruksove teoreme G je kompletan graf ili je neparna kontura.

$(\Longleftarrow)$.
Ako je G kompletan graf K_n, onda je $\gamma(G) = n$ (dokazati!), odnosno $\gamma(K_n) = \underbrace{\Delta(K_n)}_{=n-1} + 1$.
Ako je G neparna kontura C_{2r+1}, onda je $\gamma(G) = 3$ (ovo ćemo dokazati!), odnosno $\gamma(C_{2r+1}) = \underbrace{\Delta(C_{2r+1})}_{=2} + 1$.

Bruksova teorema. *Neka je G povezan jednostavan graf koji nije kompletan niti je neparna kontura. Tada je $\gamma(G) \leqslant \Delta(G)$.*
Komentar. Za svaki graf važi $\gamma(G) \leqslant \Delta(G) + 1$. (Dokazati!) $\square$

Dokazati da je za $n \geqslant 3$

$$\gamma(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{ako je } n \text{ paran broj} \\ 3, & \text{ako je } n \text{ neparan broj} \end{cases} .$$

Rješenje.
Kako je $\varepsilon(C_n) \geqslant 3$, to je $\gamma(C_n) \geqslant 2$.
Neka je $n = 2k$. Tada je na osnovu prethodnog zadataka $\gamma(C_n) = 2$, jer je C_{2k} bipartitan graf.
Neka je $n = 2k + 1$. C_{2k+1} nije bipartitan graf, pa je $\gamma(C_{2k+1}) > 2$.
Definišimo $\beta : V(C_{2k+1}) \to \{1, 2, 3\}$ sa

$$\beta(v_i) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = 1 \\ 2, & \text{ako je } i \text{ paran broj} \\ 3, & \text{ako je } i \neq 1 \text{ neparan broj} \end{cases}.$$

Očigledno, β je pravilno $3-$bojenje čvorova grafa C_{2k+1}, tj. $\gamma(C_{2k+1}) \leqslant 3$, odnosno $\gamma(C_{2k+1}) = 3$. $\square$

Dokazati da je $\gamma(G) \geqslant 3$ akko G sadrži konturu neparne dužine.

Rješenje.

$(\Longrightarrow)$

Neka je $\gamma(G) \geqslant 3$. Pretpostavimo suprotno tj. pretpostavimo da G ne sadrži konturu neparne dužine. Onda je G graf bez grana ili bipartitan graf sa bar jednom granom, pa je $\gamma(G) \leqslant 2$ – kontradikcija.

$(\Longleftarrow)$

Ako G sadrži konturu neparne dužine, onda G nije bipartitan graf, pa $\gamma(G) \notin \{1, 2\}$, odnosno $\gamma(G) \geqslant 3$. $\square$

Ako je H podgraf grafa G tada je $\gamma(H) \leqslant \gamma(G)$.

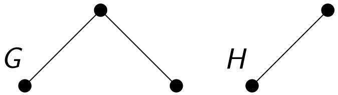
Rješenje.
Neka je $k = \gamma(G)$. Tada postoji pravilno k–bojenje čvorova grafa G, označimo ga sa θ.
Neka je $\alpha : V(H) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ preslikavanje tako da za svako $w \in V(H)$ važi $\alpha(w) = \theta(w)$.
Razmotrimo dva susjedna čvora u i v u grafu H. Ova dva čvora su susjedna i u grafu G, pa je $\theta(u) \neq \theta(v)$, a to implicira da je $\alpha(u) \neq \alpha(v)$.
Dakle, α je pravilno k–bojenje čvorova grafa H. Po definiciji je $\gamma(H) \leqslant k = \gamma(G)$. □

(a) Konstruisati dva grafa G i H takva da je H pravi podgraf od G ali da je $\gamma(H) = \gamma(G)$.

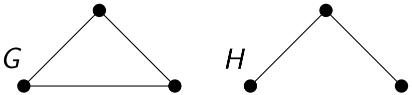
(b) Konstruisati dva povezana grafa G i H takva da je H razapinjući podgraf od G i da je $\gamma(H) = \gamma(G) - 1$.

Rješenje.

(a) Jedno moguće rješenje, za $\gamma(H) = \gamma(G) = 2$, je:



(b) Jedno moguće rješenje, za $\gamma(H) = 2 = \gamma(G) - 1$, je:



Neka je G nepovezan graf sa komponentama G_1 i G_2. Dokazati da je

$$\gamma(G) = \max\{\gamma(G_1), \gamma(G_2)\}.$$

Rješenje.
Neka je $m = \max\{\gamma(G_1), \gamma(G_2)\}$. Jasno, $\gamma(G) \geqslant m$.
Neka je

$$\alpha : V(G_1) \to \{1, 2, \ldots, m\},$$

pravilno m–bojenje čvorova komponente G_1 i neka je

$$\beta : V(G_2) \to \{1, 2, \ldots, m\},$$

pravilno m–bojenje čvorova komponente G_2. Definišimo
$\theta : V(G) \to \{1, 2, \ldots, m\}$ sa

$$\theta(v) = \begin{cases} \alpha(v), & v \in V(G_1) \\ \beta(v), & v \in V(G_2) \end{cases}.$$

Kako nijedan čvor iz $V(G_1)$ nije susjedan ni sa jednim čvorom iz $V(G_2)$, slijedi da je θ pravilno m–bojenje čvorova grafa G, pa je $\gamma(G) \leqslant m$.
Dakle, $\gamma(G) = m$. $\square$

Dokazati da je

(a) $\gamma(G) - 1 \leqslant \gamma(G - v) \leqslant \gamma(G)$ za svako $v \in V(G)$;

(b) $\gamma(G) - 1 \leqslant \gamma(G - e) \leqslant \gamma(G)$ za svako $e \in E(G)$.

Rješenje.
(a) Kako je $G - v$ podgraf grafa G, to je na osnovu zadatka 4, $\gamma(G - v) \leqslant \gamma(G)$ za svako $v \in V(G)$.
Dokazaćemo da je $\gamma(G) \leqslant \gamma(G - v) + 1$, za svako $v \in V(G)$.
Neka je $k = \gamma(G - v)$ i neka je $\theta : V(G - v) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ pravilno k–bojenje čvorova grafa $G - v$. Definišimo $\theta_1 : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k, k + 1\}$ sa

$$\theta_1(u) = \begin{cases} \theta(u), & u \in V(G - v) \\ k + 1, & u = v \end{cases} .$$

Jasno je da θ_1 predstavlja pravilno $(k + 1)$–bojenje čvorova grafa G, pa je po definiciji $\gamma(G) \leqslant k + 1 = \gamma(G - v) + 1$.

(b) Kako je $G - e$ podgraf grafa G, to je na osnovu zadatka 4, $\gamma(G-e) \leqslant \gamma(G)$ za svako $e \in E(G)$.
Dokazaćemo da je $\gamma(G) \leqslant \gamma(G-e)+1$, za svako $e \in E(G)$.
Neka je $m = \gamma(G-e)$ i neka je θ pravilno m–bojenje čvorova grafa $G - e$ i $e = v_1v_2$. Definišimo $\theta_1 : V(G) \to \{1, 2, \ldots, m, m+1\}$ sa

$$\theta_1(u) = \begin{cases} \theta(u), & u \neq v_1 \\ m+1, & u = v_1 \end{cases} .$$

Jasno je da θ_1 predstavlja pravilno $(m+1)$–bojenje čvorova grafa G, pa je po definiciji $\gamma(G) \leqslant m+1 = \gamma(G-e)+1$. $\square$

Dokazati da je $\gamma(G) \cdot \gamma(\overline{G}) \geqslant \nu$, $\nu = \nu(G)$.

Rješenje.
Neka je $G = (V, E)$ graf sa ν čvorova i neka je $\overline{G} = (V, E(\overline{G}))$ njegov komplement.
Graf $\left(V, E(G) \cup E(\overline{G})\right)$ je kompletan graf sa ν čvorova. Neka je $\gamma(G) = k$ i $\gamma(\overline{G}) = m$.
Dokazaćemo da je $k \cdot m \geqslant \nu$.
Neka je $\theta_1 : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ pravilno bojenje čvorova grafa G sa k boja i $\theta_2 : V \to \{1, 2, \ldots, m\}$ pravilno bojenje čvorova grafa $\overline{G}$ sa m boja. Definišimo

$$\theta : V \to \{1, 2, \ldots, k\} \times \{1, 2, \ldots, m\}$$

sa

$$\theta(u) = (\theta_1(u), \theta_2(u))\,.$$

θ je pravilno bojenje čvorova grafa K_ν sa $k \cdot m$ boja.

Zaista, neka su u i v susjedni čvorovi u grafu K_ν.
Tada su oni susjedni u G ili u $\overline{G}$. Neka su npr. susjedni u G. Tada je $\theta_1(u) \neq \theta_1(v)$, pa je

$$\theta(u) = (\theta_1(u), \theta_2(u)) \neq (\theta_1(v), \theta_2(v)) = \theta(v).$$

Dakle, $\nu = \gamma(K_\nu) \leqslant k \cdot m$. $\square$

Dokazati da je $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \geqslant 2\sqrt{\nu}$, $\nu = \nu(G)$.

Rješenje.
Iskoristićemo nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine i prethodni zadatak. Važi

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \geqslant 2\sqrt{\gamma(G) \cdot \gamma(\overline{G})} \geqslant 2\sqrt{\nu}. \qquad \square$$

Neka je G k–regularan graf sa ν čvorova. Dokazati da je

$$\gamma(G) \geqslant \frac{\nu}{\nu - k}.$$

Rješenje.
Iskoristićemo

$$\gamma(\overline{G}) \leqslant \Delta(\overline{G}) + 1 = \nu - 1 - k + 1 = \nu - k.$$

Kako je $\gamma(G) \cdot \gamma(\overline{G}) \geqslant \nu$, to je

$$\gamma(G) \geqslant \frac{\nu}{\gamma(\overline{G})} \geqslant \frac{\nu}{\nu - k}. \qquad \square$$

Neka je G graf sa ν čvorova i ε grana. Dokazati da važi

$$\gamma(G) \geqslant \frac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon}.$$

Rješenje.
Neka je $\gamma(G) = k$. Uočimo neko pravilno bojenje čvorova grafa G sa k boja i neka je V_i skup čvorova obojenih bojom i, $i = 1, 2, \ldots, k$.
Neka je $|V_i| = \nu_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Kako u skupu V_i nikoja dva čvora nijesu susjedna to je

$$d(x) \leqslant \nu - \nu_i, \; x \in V_i,$$

pa je

$$\sum_{x \in V_i} d(x) \leqslant \nu_i(\nu - \nu_i), \; i = 1, 2, \ldots, k.$$

Dobijamo

$$
\begin{aligned}
2\varepsilon = \sum_{v\in V(G)} d(v) &= \sum_{v\in V_1} d(v) + \cdots + \sum_{v\in V_k} d(v) \\
&\leqslant \nu_1(\nu-\nu_1) + \cdots + \nu_k(\nu-\nu_k) \\
&= \nu \underbrace{(\nu_1 + \cdots + \nu_k)}_{=\nu} - (\nu_1^2 + \cdots + \nu_k^2) \\
&\leqslant \nu^2 - \frac{(\nu_1 + \cdots + \nu_k)^2}{k} \\
&= \nu^2 - \frac{\nu^2}{k},
\end{aligned}
$$

gdje smo za dobijanje posljednje nejdnakosti iskoristili nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine. □

Iz grafa K_ν odstranjeno je k međusobno nesusjednih grana. Dokazati da je hromatski broj dobijenog grafa $\nu - k$.

Rješenje.
Označimo sa G dobijeni graf.
Neka su iz K_ν udaljene grane $u_1v_1, \ldots, u_kv_k$, a kako te grane nijesu susjedne slijedi da su $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$ različiti čvorovi.
Neka je

$$S := V(G) - \{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k\}.$$

Jasno, $|S| = \nu - 2k$. Neka je $S = \{x_{k+1}, \ldots, x_{\nu-k}\}$.
Definišimo $\theta : V(G) \to \{1, 2, \ldots, \nu - k\}$ na sljedeći način:

$$\theta(u_1) = \theta(v_1) = 1,\ \theta(u_2) = \theta(v_2) = 2, \ldots, \theta(u_k) = \theta(v_k) = k,$$

$$\theta(x_{k+1}) = k + 1, \ldots, \theta(x_{\nu-k}) = \nu - k.$$

θ je očigledno pravilno $(\nu - k)$-bojenje grafa G, pa je $\gamma(G) \leqslant \nu - k$.

Uočimo da je podgraf grafa G indukovan skupom čvorova $S \cup \{u_1, \ldots, u_k\}$ kompletan graf sa $\nu - k$ čvorova, odakle je $\gamma(G) \geqslant \gamma(K_{\nu-k}) = \nu - k$. Dakle, $\gamma(G) = \nu - k$. $\square$

Dokazati da ako je za svaka dva čvora v i w grafa G ispunjeno

$$\gamma(G - v - w) = \gamma(G) - 2,$$

tada je graf G kompletan.

Rješenje.

Pretpostavimo suprotno tj. pretpostavimo da graf G nije kompletan. Tada postoje bar dva čvora v i w, koja nijesu vezana granom. Po uslovu zadatka podgraf $G - v - w$ grafa G možemo pravilno obojiti sa $\gamma(G) - 2$ boja. Kako v i w nijesu susjedni čvorovi u grafu G, to njih možemo obojiti istom bojom, pa time dobijamo pravilno bojenje grafa G sa $\gamma(G) - 2 + 1 = \gamma(G) - 1$ boja. Ali to nije moguće po definiciji hromatskog broja. Dakle, bilo koja dva čvora v i w grafa G su susjedna, tj. G je kompletan. $\square$

Neka je G graf koji sadrži tačno jednu konturu neparne dužine. Dokazati da je $\gamma(G) = 3$.

Za vježbu. $\square$

Neka je G regularan i povezan graf sa ν čvorova. Dokazati da važi

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = \nu + 1 \text{ akko je } G \cong K_\nu \text{ ili } G \cong C_5.$$

Rješenje.
$(\Leftarrow)$ Neka je $G \cong K_\nu$. Tada je $\overline{G} \cong \overline{K_\nu}$, pa je

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = \nu + 1.$$

Ako je $G \cong C_5$ to je $\overline{G} \cong C_5$, pa je

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = 3 + 3 = 5 + 1.$$

$(\Rightarrow)$ Neka je $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = \nu + 1$ i pretpostavimo da $G \ncong K_\nu$. Dokažimo da je $G \cong C_5$. Neka je G k-regularan graf. Tada je $2 \leqslant k \leqslant \nu - 2$ (jer je G povezan i $G \ncong K_\nu$) i $\overline{G}$ je $(\nu - 1 - k)$-regularan. Pretpostavimo da G nije neparna kontura. Tada na osnovu Bruksove teoreme $\gamma(G) \leqslant \Delta(G) = k$.

Kako je

$$\gamma(\overline{G}) \leqslant \Delta(\overline{G}) + 1 = \nu - 1 - k + 1 = \nu - k,$$

to je

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leqslant k + \nu - k = \nu.$$

Kontradikcija. Dakle, $G \cong C_{2r+1}$, $r \in \mathbb{N}$ ($\nu = 2r + 1$). Ako je $r = 1$ to je $G \cong C_3 \cong K_3$, a pretpostavili smo da $G \ncong K_\nu$. Pretpostavimo da je $r \geqslant 3$. Tada je $\overline{G} \cong \overline{C_{2r+1}}$ povezan graf koji nije kompletan niti je neparna kontura (obrazložiti!). Na osnovu Bruksove teoreme

$$\gamma(\overline{G}) \leqslant \Delta(\overline{G}) = \nu - 1 - 2 = \nu - 3,$$

pa je

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leqslant 3 + \nu - 3 = \nu.$$

Kontradikcija. Dakle, $r = 2$ i $G \cong C_5$.

16.

Hemičar želi da transportuje hemikalije A, B, C, D, W, X, Y, Z u što manje kontejnera. Izvjesne hemikalije ne mogu biti smještene u istom kontejneru, jer reaguju među sobom. Poznato je da u svakoj od 6 grupa

$$\{A, B, C\},\ \{A, B, D\},\ \{A, B, X\},\ \{C, W, Y\},\ \{C, Y, Z\},\ \{D, W, Z\}$$

svake dvije hemikalije reaguju među sobom. Naći najmanji broj kontejnera za transportovanje hemikalija.

Za vježbu. $\square$

17.

Neka je G graf sa ε grana. Dokazati da je

$$\gamma(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2\varepsilon + \frac{1}{4}}.$$

Za vježbu. $\square$