Predavanja na tabli — Pripreme za predavanja iz predmeta NUMERIČKA ANALIZA (smjerovi A, B)

SADRŽAJ:

1: *1. Interpolacija,* 1.1. Lagranžov interpolacioni polinom (Lagrange), 1.2. Ocjena greške za Lagranžov interpolacioni polinom.

2: 1.3. Podijeljene razlike i njihova svojstva, 1.4. Njutnova interpolaciona formula sa podijeljenim razlikama, 1.5. Konačne razlike, 1.6. Njutnove interpolacione formule sa konačnim razlikama.

3: 1.7. Interpolacija sa višestrukim čvorovima, 1.8. Interpolacija pomoću splajna, 1.9. Numeričko diferenciranje.

4: 1.10. Nestabilnost numeričkog diferenciranja. Tri vrste greške u numeričkim metodama, 1.11. Pojam približnog broja, 1.12. Greška funkcije.

5: *2. Numerička integracija,* 2.1. Tri formule, 2.2. Rungeovo pravilo za praktičnu ocjenu greške, 2.3. Rombergova formula.

6: 2.4. Kvadraturne formule u slučaju prisustva težinske funkcije, 2.5. Gaussova kvadraturna formula, *3. Numeričke metode algebre,* 3.1. Gaussova metoda eliminacije, 3.2. Gaussova metoda eliminacije sa izborom glavnog elementa.

7: 3.3. Mjera uslovljenosti matrice, 3.4. Iterativne metode za rješavanje sistema linearnih jednačina.

8: 3.5. Zajdelova metoda, 3.6. Primjer iterativne metode (za rješavanje sistema linearnih jednačina) varijacionog tipa, 3.7. Metoda skalarnog proizvoda.

9: *4. Rješavanje sistema nelinearnih jednačina,* 4.1. Metoda polovljenja, 4.2. Metoda proste iteracije.

10: 4.3. Newtonova metoda.

11: *5. Numeričke metode za rješavanje Cauchyjevog zadatka za obične diferencijalne jednačine,* 5.1. Uvod o Cauchyjevom zadatku i lema o dva rješenja diferencijalne jednačine, 5.2. Eulerova metoda i drugi primjeri, 5.3. Opšti slučaj eksplicitne metode tipa Runge–Kutte, 5.4. Ocjena greške za metodu Runge–Kutte, 5.5. Algoritam zasnovan na metodi Runge–Kutte.

12: 5.6. Diferencne metode, 5.7. Metoda neodređenih koeficijenata, 5.8. Ocjena greške diferencne metode, 5.9. Adamsova metoda četvrtog reda, 5.10. Algoritam zasnovan na diferencnoj metodi.

13: 5.11. Milnova metoda (Milne), *6. Numeričke metode za rješavanje graničnog zadatka za obične diferencijalne jednačine,* 6.1. Metoda konačnih razlika.

14: Napomena o metodi konačnih elemenata.

FAJLOVI: ynumera, ynumerb, ..., ynumern ($\sum = 14$ files).

Numerička analiza, prvo predavanje

14. 2. 2019.

1.1. Lagranžov interpolacioni polinom (Lagrange)

Neka je $n \geq 0$ i razmotrimo $n+1$ tačaka na x–osi ($n+1$ čvorova) $x_0 < \ldots < x_n$. Razmotrimo i realnu funkciju f i uzmimo da su date njene vrijednosti u čvorovima: $f(x_i) = f_i$. Želimo da kroz tačke (x_i, f_i) u ravni provučemo grafik polinoma, u oznaci L_n, stepena n ili manje. Drugim riječima, uslov interpolacije glasi $L_n(x_i) = f(x_i)$ za svako $0 \leq i \leq n$. Za postavljeni zadatak, ispostaviće se da rješenje (L_n) postoji i da je ono jedinstveno.

Opšti oblik polinoma stepena n ili manje glasi $L_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Da bi uslov interpolacije bio zadovoljen, treba $a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_n x_i^n = f_i$, što možemo zapisati u matričnom obliku kao

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Vidimo da smo dobili jedan sistem linearnih jednačina po nepoznatim $a_0, \ldots, a_n$. Označimo sa M matricu sistema. Njena determinanta je tzv. Vandermondova determinanta. Kao što je poznato iz linearne algebre, važi

$$\det M = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Po pretpostavci, čvorovi mreže su međusobno različiti ($x_i \neq x_j$ ako je $i \neq j$). Zato je $\det M \neq 0$. Prema tome, sistem ima jedinstveno rješenje, što je i trebalo.

Prelazimo na konstrukciju interpolacionog polinoma. Posmatrajmo proizvod

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

jednak je nuli u svim čvorovima. Ako se izostavi faktor $(x - x_i)$ onda prestaje da bude jednak nuli kada je $x = x_i$. Prema tome, uvedimo funkcije

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

ovo su tzv. Lagranžovi koeficijenti. Oni zadovoljavaju

$$\ell_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = j \\ 0, & \text{ako je } i \neq j \end{cases}.$$

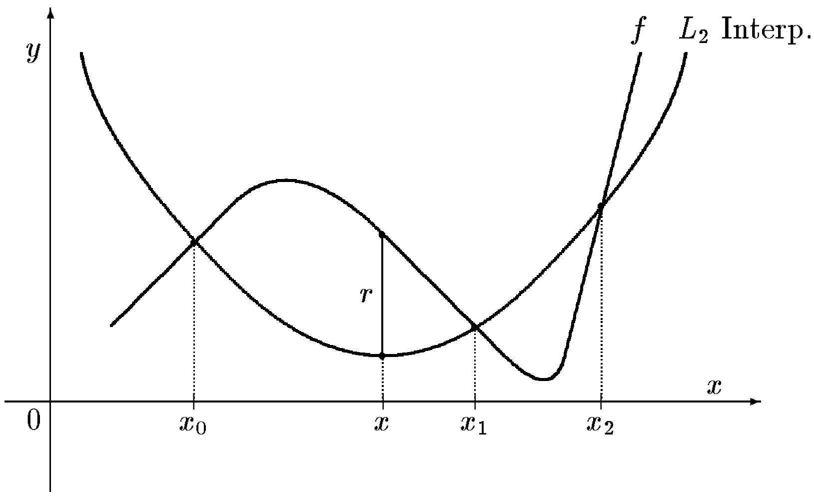
Drugim riječima, u i–tom čvor $\ell_i(x_i) = 1$, u ostalim čvorovima nula. Preostaje samo da se $\ell_i(x)$ pomnoži sa f_i i da se sve sabere, čime se konstrukcija završava. Na taj način:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \Big(\prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \Big) f_i,$$

ovo je glavna formula, ovo je izraz za Lagranžov interpolacioni polinom.

Ulazni podaci:

x_0	f_0
$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n



Smatramo da tačka $x \in R$ nije čvor. Vidi se da broj $L_n(x)$ može da bude efektivno izračunat. Ta vrijednost služi kao približna zamjena za broj $f(x)$, možemo pisati $f(x) \approx L_n(x)$.

Mi sprovodimo interpolaciju radi vrijednosti funkcije u tački $x \in R$. Ako $x \in (x_0, x_n)$ onda se kaže da se vrši interpolacija u užem smislu, a ako $x \notin [x_0, x_n]$ onda se vrši ekstrapolacija.

Kasnije će biti analizirano odstupanje (greška) $r(x) = f(x) - L_n(x)$. Znači, mi ćemo procijeniti razliku između tačnog i približnog broja.

Zadatak o najboljoj aproksimaciji (metoda najmanjih kvadrata)

Drukčije se kaže linearni trend ili linearna regresija ili engl. best fit. Neka je $n \geq 2$ i razmotrimo n (međusobno različitih) čvorova $x_1, \ldots, x_n$. Što se tiče realne funkcije f, uzmimo da raspolažemo njenim vrijednostima u čvorovima: $f(x_i) = f_i$.

Biće fiksirana jedna klasa funkcija. Želimo da odredimo funkciju, u oznaci g, koja pripada klasi i najbolje aproksimira našu funkciju f. U najprostijem slučaju, opredjeljujemo se za klasu linearnih funkcija. Dakle, traži se funkcija g oblika $g(x) = ax + b$, tj. traže se $a, b \in R$.

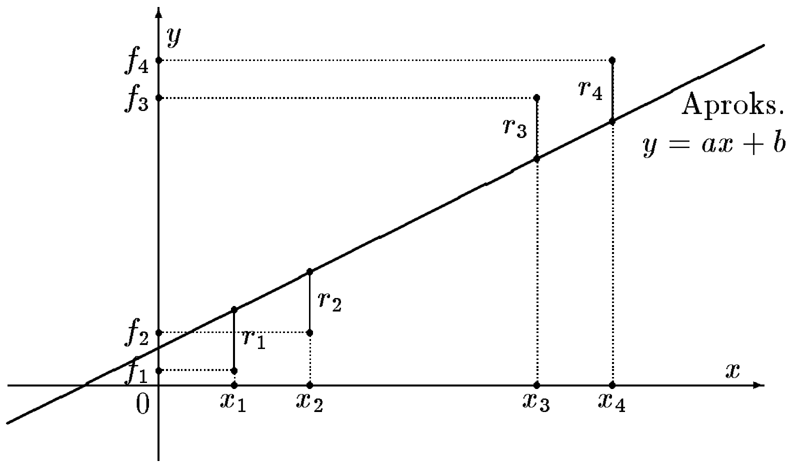
Šta znači da g najbolje aproksimira f? Za $x = x_i$ imamo dva broja. To su $g_i = g(x_i) = ax_i + b$, ponekad se kaže da je to teorijska vrijednost ili vrijednost po modelu i $f_i = f(x_i)$, ponekad se kaže da je to vrijednost dobijena mjerenjem. Pojedinačna odstupanja iznose $r_i = ax_i + b - f_i$. Zbirno ili ukupno odstupanje označavaćemo sa r. Stavlja se da je r^2 jednako zbiru kvadrata pojedinačnih odstupanja, što je u skladu sa euklidskom normom vektora u prostoru R^n. Rekli smo:

$$r^2 = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - f_i)^2.$$

Možemo pisati $F(a, b) = r^2$. Za koje (a, b) se ostvaruje minimum?

Ulazni podaci:

x_1	f_1
$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n



Imamo $\frac{\partial F}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i(ax_i + b - f_i)$, $\frac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - f_i)$. Da bi bila stacionarna tačka, treba $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial b} = 0$. To znači $(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i)b - \sum_{i=1}^{n} f_i x_i = 0$, $(\sum_{i=1}^{n} x_i)a + nb - \sum_{i=1}^{n} f_i = 0$. Možemo zapisati u matričnom obliku kao

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} f_i \end{pmatrix}.$$

Možemo zapisati u drugom obliku kao

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{1} \rangle & \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{1} \rangle \end{pmatrix},$$

gdje su uvedene oznake za vektore $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$, kao i oznaka za skalarni proizvod dva vektora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$, ako je $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Ovo je tzv. normalni sistem jednačina. Njegovim rješavanjem dolazimo do a i b, čime se kompletira rješenje postavljenog problema.

Vidi se da je matrica prethodnog sistema linearnih jednačina regularna. Zaista, vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{1}$ nisu kolinearni, a znamo da Cauchy–Schwrzova nejednakost glasi $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$, s tim da važi znak jednakosti ako i samo ako su $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ kolinearni.

Po Sylvesterovom kriterijumu, vidi se da funkcija F ima minimum u tački (a, b).

U prethodnom slučaju, za aproksimaciju je služila funkcija oblika $y = ax + b$ (linearni trend). Često, za aproksimaciju služi funkcija oblika $y = ae^{bx}$ (prirodna funkcija rasta). Primjenom operacije "ln" na lijevu i desnu stranu znaka jednakosti dobijamo $\ln y = \ln a + bx$, čime se svodi na prethodni slučaj (na linearni slučaj).

1.2. Ocjena greške za Lagranžov interpolacioni polinom

Stavimo $a = \min(x, x_0, \ldots, x_n)$, $b = \max(x, x_0, \ldots, x_n)$ i pretpostavimo da $f \in C^{n+1}[a, b]$. Određenim izvođenjem, u kome se pojavljuje pomoćna funkcija $\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K\omega_{n+1}(t)$ i pozivamo se na Rolovu teoremu (Rolle), dobija se

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi)$$

za neko $\xi \in (a, b)$. Možemo pisati i

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)| M_{n+1}, \qquad M_{n+1} = \max_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)|.$$

Numerička analiza, drugo predavanje

21. 2. 2019.

1.3. Podijeljene razlike i njihova svojstva

Razmotrimo realnu funkciju f i $n+1$ čvorova $x_0, \ldots, x_n$. Stavimo $f_i = f(x_i)$. Podijeljena razlika prvog reda $f[x_0, x_1]$ definiše se kao $f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$. Podijeljena razlika drugog reda obuhvata tri čvora: $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$. Podijeljena razlika k–tog reda definiše se preko onih $(k-1)$–vog reda:

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

Na kraju, nultog reda $f[x_0]$: $f[x_0] = f_0$.

Lema: $$f[x_0, \ldots, x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{f_i}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$$ (indukcijom po k).

Vidi se da važi $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$ i slično; ako permutujemo $x_0, \ldots, x_k$, ostaje vrijednost $f[x_0, \ldots, x_k]$; simetrična funkcija.

Uopštenje u slučaju višestrukih čvorova: po definiciji, stavlja se da je $f[x, x] = f'(x)$, $f[x, x, x] = \frac{1}{2!} f''(x)$ i slično, $f[x_1, x_1, x_2] = \lim_{\varepsilon \to 0} f[x_1, x_1 + \varepsilon, x_2]$ i slično.

1.4. Njutnova interpolaciona formula sa podijeljenim razlikama

Razmotrimo opet $n+1$ čvorova $x_0, \ldots, x_n$ i odgovarajuće vrijednosti funkcije $f_i = f(x_i)$. Interpolacija se vrši radi tačke $x \in R$. Vidjeli smo da je interpolacioni polinom stepena n, u oznaci $L_n = L_n(x)$, jedinstven. U ovoj sekciji, taj polinom će biti prikazan u drugom obliku. Izvođenje se izostavlja. Kao rezultat imamo

$$L_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$
$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})$$

ili svejedno

$$L_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1]\omega_1(x) + f[x_0, x_1, x_2]\omega_2(x) + \ldots +$$
$$f[x_0, \ldots, x_n]\omega_n(x).$$

Isto tako, kao rezultat imamo

$$f(x) - L_n(x) = f[x, x_0, \dots, x_n]\omega_{n+1}(x),$$

predstavlja izraz za grešku $r(x) = f(x) - L_n(x)$, razlika tačnog i približnog broja.

Najzad, jednostavnim kombinovanjem napisane formule i formule

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1}(x),$$

$\xi = \xi(x) \in (a, b)$ iz sekcije 1.2. dobijamo

$$f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

za neko $\xi \in (a, b)$, gdje je $a = \min(x, x_0. \dots, x_n)$, $b = \max(x, x_0, \dots, x_n)$, $f \in C^{n+1}[a, b]$, $n \geq 0$; veza podijeljene razlike $(n+1)$–vog reda neke funkcije i njenog $(n+1)$–vog izvoda. Naravno, isto tako: podijeljena razlika n–tog reda jednaka je n–tom izvodu u nekoj tački ξ kroz n!

1.5. Konačne razlike

Fiksirajmo korak $h > 0$ i posmatrajmo čvorove $x_i = x_0 + ih$ za razne $i \geq 0$, za razne $i \in Z$, ekvidistantna mreža. Posmatrajmo i vrijednosti funkcije $y_i = y(x_i)$. Konačne razlike neke funkcije definišu se samo u slučaju ekvidistantne mreže oblika $x_0, \dots, x_n$ recimo, o čemu u nastavku. Konačna razlika prvog reda označava se kao Δy_0 j iznosi $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ ili uopšte $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. Konačna razlika drugog reda $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$ i uopšte $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$. Slično, $\Delta^m y_i = \Delta(\Delta^{m-1} y_i) = \Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i$ $(m \geq 1)$, m–tog reda.

Pogledajmo primjer mreže $x_0, \dots, x_5$, gdje je $x_0 = 1$ i $h = 0{,}1$ i funkcije $y = \sqrt{x}$. Tabela sadrži konsčne razlike prvog i drugog reda:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
1	1	0,04881	−0,00217
1,1	1,04881	0,04664	−0,00191
1,2	1,09545	0,04473	−0,00169
1,3	1,14018	0,04304	−0,00152
1,4	1,18322	0,04152	
1,5	1,22474		

Mi kažemo da izraz $\Delta^m y_i$ predstavlja konačnu razliku ili konačnu razliku unaprijed.

Lako je izračunati $\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$, $\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$ i slično.

Lema 1. $\Delta^m y_0 = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \binom{m}{j} y_{m-j}$. Dokazuje se indukcijom, uz upotrebu relacije $\binom{l}{j} + \binom{l}{j-1} = \binom{l+1}{j}$.

Lema 2 o vezi podijeljenih i konačnih razlika. $\Delta^m y_i = h^m m! y[x_i, \ldots, x_{i+m}]$. Zaista, prilikom formiranja podijeljene razlike, u imeniocu imamo redom h, $2h$, ..., mh.

Lema 3 o vezi konačnih razlika i izvoda. Ako $y \in C^m[a,b]$ onda važi $\Delta^m y_i = h^m y^{(m)}(\xi)$ za neko $\xi \in (x_i, x_{i+m})$. Dokazuje se jednostavnim kombinovanjem prethodne leme i relacije iz 1.4. o vezi podijeljenih razlika i izvoda.

Ređe se koriste konačne razlike unazad $\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$, $\nabla^m y_i = \nabla^{m-1} y_i - \nabla^{m-1} y_{i-1}$ i centralne konačne razlike $\delta y_{i+1/2} = y_{i+1} - y_i$, $\delta^2 y_{i+1} = \delta y_{i+3/2} - \delta y_{i+1/2}$, itd. (u drugim oznakama $y^1_{i+1/2}$, y^2_{i+1}, itd.).

Konačne razlike m–tog reda polinoma stepena m su konstantne, dok su njegove konačne razlike višeg reda jednake nuli.

1.6. Njutnove interpolacione formule sa konačnim razlikama

Biće izvedena Prva Nj. i. f. ("za interpolaciju uinaprijed"), predstavlja jednu od najpoznatijih formula u matematici. Ta formula takođe predstavlja samo drugačiji zapis interpolacionog polinoma prikazanog u Lagranžovom obliku, s tim da je ona definisana samo u slučaju ravnomjerne mreže.

Razmotrimo mrežu $\{x_0, \ldots, x_n\}$ i vrijednosti y_i. Iz 1.4. i leme 2, automatski

$$L_n(x) = y_0 + \frac{1}{h}\Delta y_0\,(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{n!h^n}\Delta^n y_0\,(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}), \quad (1)$$

kao i izraz za grešku

$$y(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad (2)$$

gdje je ξ neki broj takav da je $\min(x_0, x) < \xi < \max(x, x_n)$.

Dalje, u slučaju ekvidistantne mreže, često se vrši smjena nezavisno promjenljive, nova promjenljiva označava se sa t i to $x = x_0 + ht$ ili svejedno $t = \frac{x - x_0}{h}$. Zapazite da je $t - 1 = \frac{x - x_1}{h}$, slično $t - 2$, itd. Npr. $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}1$, $x = 1{,}05$ $\Rightarrow t = 0{,}5$. Formule (1) i (2) možemo zapisati kao

$$L_n(x_0 + ht) = y_0 + \Delta y_0 t + \frac{1}{2!}\Delta^2 y_0 t(t-1) + \ldots + \frac{1}{n!}\Delta^n y_0 t(t-1)\ldots(t-n+1),$$

$$y(x_0 + ht) - L_n(x_0 + ht) = \frac{1}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi) h^{n+1} t(t-1)\ldots(t-n).$$

Sledeće, mogu se spojiti (1) i (2) u jednu formulu $y(x) = L_n(x) + r(x)$, što ćemo uraditi u slučaju $n = 3$:

$$y(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!h^2}\Delta^2 y_0 +$$

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!h^3}\Delta^3 y_0 + \frac{1}{4!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)y^{IV}(\xi),$$

$y(x)$ tačan broj, $L_3(x)$ približan, $r(x)$ razlika.

Slično glasi i Druga Nj. i. f. (za interpolaciju unazad), u njoj se pojavljuju ∇.

Nekada davno, Babbage je bio napravio Difference Engine. Ta mašina je mogla da tabelira polinome šestog stepena.

Ako $n = 1$ onda $L_1(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta y_0$ (linearna interpolacija), ako $n = 2$ onda $L_2(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2}\Delta^2 y_0$.

Numerička analiza, treće predavanje

28. 2. 2019.

1.7. Interpolacija sa višestrukim čvorovima

Drukčije se kaže Hermitov interpolacioni polinom (Hermite). Neka je $n \geq 1$ i razmotrimo čvorove $x_1 < \ldots < x_n$. Neka je $m_i \geq 1$, višestrukost pojedinog čvora. Što se tiče funkcije $f\colon R \to R$, date su njene vrijednosti u čvorovima, kao i vrijednosti njenih izvoda:

$$f^{(j)}(x_i) = f_i^{(j)}, \qquad 0 \leq j \leq m_i - 1, \qquad 1 \leq i \leq n$$

(date su brojne vrijednosti $f_i^{(j)} \in R$). Stavimo $m_1 + \ldots + m_n = s + 1$, ukupan broj uslova. Mi ćemo označavati interpolacioni polinom sa H_s, stepena s ili manje. Tražimo da bude zadovoljen uslov interpolacije

$$H_s^{(j)}(x_i) = f_i^{(j)}, \qquad 0 \leq j \leq m_i - 1, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Postojanje i jedinstvenost interpolacionog polinoma dokazuju se na bazi poznate teoreme: ako je p polinom stepena s ili manje koji ima više od s nula (broje se sa višestrukošću) onda je $p(x) \equiv 0$. Što se tiče konstrukcije, ne postoji formula koja bi obuhvatala opšti slučaj polinoma H_s. Izraz za grešku dobija se po analogiji sa Lagranžovim interpolacionim polinomom. To znači da se koristi pomoćna funkcija $\varphi(t) = f(t) - H_s(t) - K\omega_{s+1}(t)$ i da se pozivamo na Rolovu teoremu (Rolle). Stavljeno je

$$\omega_{s+1}(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^{m_i}.$$

Interpolacija se sprovodi radi tačke $x \in R$, a formula za grešku glasi

$$f(x) - H_s(x) = \frac{1}{(s+1)!}\omega_{s+1}(x) f^{(s+1)}(\xi), \qquad a < \xi < b,$$

$a = \min(x, x_1, \ldots, x_n)$, $b = \max(x, x_1, \ldots, x_n)$ (ξ zavisi od x). Pretpostavlja se da $f \in C^{s+1}[a, b]$.

Primjer. Čvor $x = -1$ je prost (jednostruk), čvor $x = 0$ je dvostruk, čvor $x = 1$ je prost (jednostruk). Data su četiri realna broja p, q, r, s. Treba konstruisati polinom H_3 koji zadovoljava uslove

$$H_3(-1) = p, \qquad H_3(0) = q, \qquad H_3(1) = r, \qquad H_3'(0) = s.$$

Rješenje glasi

$$H_3(x) = -\frac{1}{2}x^2(x-1)p - (x-1)(x+1)q + \frac{1}{2}x^2(x+1)r - x(x-1)(x+1)s,$$

a odgovarajući izraz za grešku

$$f(x) - H_3(x) = \frac{1}{4!}\omega_4(x)f^{(4)}(\xi), \qquad \omega_4(x) = x^2(x-1)(x+1),$$

gdje je $-1 < \xi < 1$ (ako je $-1 \leq x \leq 1$). Navedeni primjer će koristiti kod Simpsonove kvadraturne formule.

Drugi primjer bi bio: imamo n čvorova, svi su dvostruki. Znači da su dati brojevi $f_1, f_1', \ldots, f_n, f_n' \in R$ i da će rezultat biti H_{2n-1}. Navedeni primjer će se pojaviti kod Gausove kvadraturne formule (Gauss).

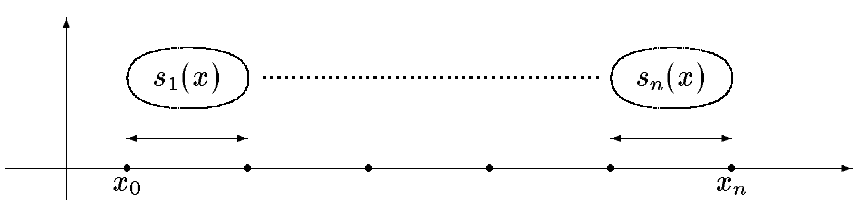
1.8. Interpolacija pomoću splajna

Iskustvo pokazuje da interpolacija pomoću polinoma L_n stepena $n \geq 6$ ne daje dobre rezultate. Zato je pogodno da interpolaciona funkcija bude dio–po–dio polinom (trećeg stepena).

Fiksirajmo $n \geq 1$ i interval $[a,b]$. Tako da je $h = \frac{b-a}{n}$, a čvorovi su $x_0, \ldots, x_n$, upravo $x_i = a + ih$ $(0 \leq i \leq n)$. Date su vrijednosti funkcije u čvorovima: $f(x_i) = f_i$. Treba procijeniti $f(x)$ za dato $x \in [a,b]$.

U cilju rješavanja postavljenog problema, biće konstruisana interpolaciona funkcija $s\colon [a,b] \to R$, kubni splajn. Na svakom malom intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ ona predstavlja jedan polinom trećeg stepena. Ona treba da zadovoljava uslov interpolacije $s(x_i) = f_i$. Ona treba da zadovoljava i uslov glatkosti $s \in C^2[a,b]$, ima neprekidan drugi izvod.

Dali smo postavku zadatka (kasnije će biti dopunjeno), pa pristupamo rješavanju. Uvedimo oznaku $s(x) = s_i(x)$ za $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ $(1 \leq i \leq n)$; na pojedinom malom intervalu, splajn se svodi na s_i.



Budući da je $s_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + \frac{c_i}{2}(x-x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x-x_i)^3$, vidimo da raspolažemo sa $4n$ slobodnih vrijednosti $a_i, \ldots, d_i$. A koliko ima uslova koji moraju biti zadovoljeni? Zbog uslova interpolacije $s_i(x_{i-1}) = f_{i-1}$, $s_i(x_i) = f_i$ $(1 \leq i \leq n)$, a zbog uslova glatkosti $s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$, $s_i''(x_i) = s_{i+1}''(x_i)$ $(1 \leq i \leq n-1)$, tako da smo – sveukupno – obavezni da ispunimo $4n-2$ zahtjeva.

Nedostaju dva uslova. Postavku zadatka kompletira izjava: treba da bude

$$s''(a) = s''(b) = 0 \qquad \text{(ili svejedno } s_1''(x_0) = s_n''(x_n) = 0\text{)}.$$

Sada se radi o tzv. prirodnom kubnom splajnu.

Kažimo unaprijed da postavljeni zadatak ima jedinstveno rješenje i da aproksimacija $f(x) \approx s(x)$ ima dobra svojstva.

Izvođenje je prilično opširno, pa se ovdje izostavlja. Ključnu ulogu ima sistem linearnih jednačina po nepoznatim $c_0, \ldots, c_n$:

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = \frac{6}{h^2}\Big(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}\Big) \qquad (1 \le i \le n-1), \qquad c_0 = c_n = 0.$$

Vidi se da je uvedena pomoćna promjenljiva c_0.

Definicija. Za realnu kvadratnu matricu $A = [a_{ij}]$ dimenzije $n \times n$ kaže se da je dijagonalno dominantna ako za svako $i = 1, \ldots, n$ važi $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ (u sumi: $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$).

Teorema. Ako je matrica A dijagonalno dominantna onda je ona regularna ($\det A \neq 0$).

Definicija. Za realnu kvadratnu matricu $A = [a_{ij}]$ dimenzije $n \times n$ kaže se da je trodijagonalna ako svi njeni elementi a_{ij} koji su različiti od nule ($a_{ij} \neq 0$) zadovoljavaju: $j = i$ ili $j = i \pm 1$.

U sistemu linearnih jednačina, ako je matrica sistema trodijagonalna onda se do rješenja sistema može doći primjenom jednog veoma efikasnog algoritma. To je Tomasov algoritam (Thomas) ili metoda progonke.

1.9. Numeričko diferenciranje

Polazi se od $n+1$ čvorova $x_0, \ldots, x_n$ i odgovarajućih vrijednosti funkcije f_i. Stavlja se $f'(x) \approx L_n'(x)$ i uopšte $f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x)$ (rezultat). Tačka x može da bude čvor mreže. U slučaju prvog izvoda, formula za grešku

$$f'(x) - L_n'(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_0)\omega_{n+1}'(x) + \frac{1}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\xi_1)\omega_{n+1}(x),$$

$\xi_0, \xi_1 \in (a,b)$, treba $f \in C^{n+2}[a,b]$.

Na redu su tri osnovne formule za numeričko diferenciranje. Vidjećemo da je mreža ekvidistantna.

(a) Jenostrana formula: prvi izvod u čvoru x_0 (preko $f_0, \ldots, f_n$).

Ako je $n = 1$ onda $f_0' = \frac{1}{h}\Delta f_0$, sa greškom $f'(x_0) - f_0' = -\frac{h}{2} f''(\xi)$, $x_0 < \xi < x_1$.

Ako je $n=2$ onda $f_0'=\frac{1}{h}\left(\Delta f_0-\frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right)$. Npr. $y=\sqrt{x}$, $x_0=1$, $h=0{,}1$ slijedi $y_0'=\frac{1}{h}\left(0{,}04881+\frac{1}{2}0{,}00217\right)=0{,}49895$ (numerički odgovor), dok tačna vrijednost iznosi $y'(1)=0{,}5$ ($y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$). Izvođenje formule: $L_2(x)=f_0+\frac{1}{h}(x-x_0)\Delta f_0+\frac{1}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)\Delta^2 f_0$, slijedi $L_2'(x)=\frac{1}{h}\Delta f_0+\frac{1}{2!h^2}(2x-x_0-x_1)\Delta^2 f_0$, slijedi $L_2'(x_0)=\frac{1}{h}\Delta f_0+\frac{1}{2!h^2}(-h)\Delta^2 f_0$ ili svejedno $f_0'=\frac{1}{h}\left(\Delta f_0-\frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right)$, kao što smo već.

Slično, f_0' u slučaju većeg n.

(b) Simetrična formula: prvi izvod u čvoru x_i preko f_{i-1}, f_i, f_{i+1}.

Formula glasi $f_i'=\frac{1}{2h}\left(f_{i+1}-f_{i-1}\right)$, a u nastavku ćemo izvesti izraz za grešku $r=f'(x_i)-f_i'$ (razlika jednako tačan minus približan) razvojem funkcije $f=f(x)$ po Taylorovoj formuli u tački $x=x_i$: $f_{i+1}=f(x_{i+1})=f(x_i+h)=f(x_i)+hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)+\frac{h^3}{3!}f'''(\xi_1)$, slično $f_{i-1}=f(x_{i-1})=f(x_i-h)=f(x_i)-hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)-\frac{h^3}{3!}f'''(\xi_2)$, $r=f'(x_i)-\frac{1}{2h}\left(f_{i+1}-f_{i-1}\right)=-\frac{h^2}{12}\left(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right)$, $r=-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$, $x_{i-1}<\xi<x_{i+1}$.

Mi smo prikazali $f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)$. Neprekidna funkcija uzima sve međuvrijednosti: ako je $y(a)=A$, $y(b)=B$, $A<C<B$ onda postoji c, $y(c)=C$, $a<c<b$. U tom smislu, $y(\xi_1)+y(\xi_2)=2y(\xi)$; $C=\frac{1}{2}(A+B)$.

(c) Drugi izvod u čvoru x_i preko f_{i-1}, f_i, f_{i+1} (simetrična formula).

Formula glasi $f_i''=\frac{1}{h^2}\left(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}\right)$ (predstavlja aproksimaciju za $f''(x_i)$), takođe razvojem $r=-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$, $x_{i-1}<\xi<x_{i+1}$.

Numerička analiza, četvrto predavanje

7. 3. 2019.

1.10. Nestabilnost numeričkog diferenciranja. Tri vrste greške u numeričkim metodama

Nestabilnost numeričkog diferenciranja

Radili smo jednostranu formulu ($n = 1$): $x_1 = x_0 + h$, treba procijeniti $f'(x_0)$, procjenu označavamo kao f_0', greška te procjene definiše se kao $r_1 = f'(x_0) - f_0'$, tada: $f_0' = \frac{1}{h}(f_1 - f_0)$, $r_1 = -\frac{h}{2}f''(\xi)$, $x_0 < \xi < x_1$. Isto tako $|r_1| \le \frac{1}{2}M_2 h$, $M_2 = \max_{t\in[a,b]}|f''(t)|$, gdje $x_0, x_1 \in [a, b]$, $f \in C^2[a, b]$. Za r_1 se kaže da predstavlja grešku (grešku metode).

x	f	zaokr.	razlika	granica
x_0	f_0	f_0^*	ε_0	E
x_1	f_1	f_1^*	ε_1	E

Ulaznim veličinama smatramo f_0, f_1. Raspolažemo samo sa približnim vrijednostima f_0^*, f_1^*. Označimo greške $\varepsilon_i = f_i - f_i^*$. Uzmimo da raspolažemo sa granicom greške: $|\varepsilon_i| \le E$.

Ulogu numeričkog odgovora preuzima veličina $(f_0')^* = \frac{1}{h}(f_1^* - f_0^*)$. Uvedimo oznaku $r_2 = f_0' - (f_0')^*$. Za r_2 se kaže da predstavlja grešku izazvanu približnošću ulaznih veličina (neotklonjivu grešku). Treba procijeniti r_2:

$$r_2 = f_0' - (f_0')^* = \frac{1}{h}\Big(f_1 - f_0\Big) - \frac{1}{h}\Big(f_1^* - f_0^*\Big) = \frac{1}{h}\Big(f_1 - f_1^* - f_0 + f_0^*\Big) = \frac{1}{h}\varepsilon_1 - \frac{1}{h}\varepsilon_0,$$

$$|r_2| \le \frac{1}{h}|\varepsilon_1| + \frac{1}{h}|\varepsilon_0| \le \frac{1}{h}E + \frac{1}{h}E, \qquad |r_2| \le \frac{2E}{h}.$$

Formula je nestabilna, zato što nije ispunjen uslov da male promjene ulaznih veličina izazivaju samo male promjene numeričkog rezultata.

Ukupna greška:

$$r = f'(x_0) - (f_0')^* = f'(x_0) - f_0' + f_0' - (f_0')^* = r_1 + r_2,$$

$$|r| \le |r_1| + |r_2| \le \frac{1}{2}M_2 h + \frac{2E}{h} \qquad \text{(nije ispunjeno: } h \to 0 \Rightarrow r \to 0\text{)}.$$

Ponovimo: greška od ulaznih podataka r_2 je prevelika. Zato se za razmatranu numeričku metodu (n. d.) kaže da je nestabilna u odnosu na grešku ulaznih podataka; greške ulaznih podataka ε_i, njihova granica E; $r_2 = r_2(E)$.

Sve formule za numeričko diferenciranje su nestabilne. Pogledajmo na primjeru y'' po simetričnoj formuli. Date su vrijednosti funkcije $y = e^x$ u tačkama $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$:

x	y
0	1
0,1	1,10517
0,2	1,22140

Tada, kao procjena veličine $y''(x_1)$ služi

$$y_1'' = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} = \frac{1{,}22140 - 2 \cdot 1{,}10517 + 1}{0{,}1^2} = 1{,}106.$$

Ulazni podaci $y_0, \ldots, y_2$ imaju grešku do najviše $\frac{1}{2}10^{-5}$, dok rezultat y_1'' ima grešku (r_2) barem $\frac{1}{2}10^{-3}$. Pored toga, ulazni podaci imaju po 6 sigurnih cifara, dok rezultat 1,106 ima svega 4 sigurne cifre.

Tri vrste greške u numeričkim metodama

Vidjeli smo da je greška metode označena sa r_1, a greška od ulaznih podataka sa r_2. Za bilo koju numeričku metodu, ukupna greška r računa se po formuli $r = r_1 + r_2 + r_3$, gdje se za r_3 kaže da predstavlja grešku računanja ili grešku operacija. Kod računara, rezultat aritmetičke operacije ima relativnu grešku do 10^{-7}.

Primjer (za r_3): $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{x+10}$. Može se računati preko $I_n = \frac{1}{n} - 10 I_{n-1}$ ili kao $I_n = \frac{0{,}1}{n+1} - \frac{0{,}01}{n+2} + \frac{0{,}001}{n+3} - \ldots$.

Drugi primjer za r_3: rješenje kvadratne jednačine $x^2 + 2px + q = 0$ u kojoj je q blisko nuli. Može se računati kao $x = -p + \sqrt{p^2 - q}$ ili $x = -\frac{q}{p + \sqrt{p^2 - q}}$.

Često se vodi računa samo o r_1 (kao da nema r_2, r_3).

1.11. Pojam približnog broja

Znamo da je $\pi = 3{,}14159265\ldots$ (tačan broj). Uzmimo $\pi = 3{,}14$ (3,14 je približan broj). Tada greška iznosi $A = \pi - 3{,}14 = 0{,}00159265\ldots$, dok relativna greška iznosi $R = \frac{\pi - 3{,}14}{\pi}$. Zapažamo da je $|A| \leq 10^{-2}$, pa se kaže da su sve tri cifre približnog broja sigurne u širem smislu. One su sigurne i u užem smislu, budući da važi $|A| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$. Što se tiče granice greške, u oznaci Δ, možemo pisati $\Delta = 0{,}0016$. Potpuno je ispravno i $\Delta = 0{,}002$ ili $\Delta = 0{,}005$ i slično. Granica relativne greške $\delta = \frac{\Delta}{\pi}$.

Neka je a tačna vrijednost neke veličine i neka je a^* njena raspoloživa približna vrijednost. Greškom približnog broja a^* naziva se veličina $A(a^*) = a - a^*$. Relativnom greškom približnog broja naziva se veličina $R(a^*) = \frac{a - a^*}{|a|}$.

Granica greške približnog broja a^* označava se sa $\Delta(a^*)$. Po definiciji, to je bilo koji broj koji zadovoljava $|a - a^*| \leq \Delta(a^*)$. Slično, granica relativne greške: $\frac{|a - a^*|}{|a|} \leq \delta(a^*)$.

Značajnim ciframa nekog broja nazivaju se njegova prva cifra različita od nule i sve cifre koje za njom dolaze. Za značajnu cifru približnog broja koja se nalazi na n–toj decimali kaže se da je sigurna (u užem smislu) ako važi relacija $|A| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$. Kaže se da je sigurna u širem smislu ako $|A| \leq 10^{-n}$.

Ako približan broj ima n sigurnih cifara onda je granica njegove relativne greške između $\frac{1}{2} \cdot 10^{-(n-1)}$ i $\frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$. U memoriji računara, realni brojevi imaju granicu relativne greške 10^{-7} (tačnije $0{,}6 \cdot 10^{-7}$); 32 bita.

Za značajnu cifru koja nije sigurna kaže se da je sumnjiva. Podrazumijeva se da su sumnjive cifre odbačene. Drugim riječima, uzmimo da je dato prosto npr. $a = 2{,}71$ (približna vrijednost) i da nije ništa rečeno o grešci. Po konvenciji, tada se smatra da je $\Delta = 0{,}01$. Ili malo drukčije: $\Delta = 0{,}005$; smatra se ovo drugo; prilikom odbacivanja, zadnja decimala je zaokružena.

Zapis npr. $a = 7{,}2 \pm 0{,}1$ znači naravno $7{,}1 \leq a \leq 7{,}3$.

$***$ Floating point ili plivajuća tačka (from Wikipedia). Kako se realni brojevi (podaci tipa float u programskom jeziku C) prikazuju u memoriji računara? Biće riječi o standardu IEEE 754 iz 1985. godine koji se danas koristi. Prilikom upisivanja broja (instrukcija scanf) neizbježno je zaokriživanje. U slučaju obične tačnosti, za broj x troše se 32 bita, po sljedećem rasporedu. Jedan bit za znak, $s = \pm 1$. Za eksponent e 8 bita, tako da je $-127 \leq e \leq 128$, odnosno $-126 \leq e \leq 127$. I 23 bita $a_1, \ldots, a_{23}$ za mantisu $m = (1{,}a_1 \ldots a_{23})_2$. Važi $x = \pm m 2^e$. Ako je $e = -127$ onda to znači $x = 0$, a ako je $e = 128$ onda to znači $x = \pm\infty$. Zaključak: relativna greška iznosi do $2^{-24} = 10^{-7{,}2}$, tj. zapisana vrijednost x^* ima 7 sigurnih (dekadnih) cifara. Lako se vidi da najmanji pozitivan broj koji može da bude upisan jeste $x = 2^{-126} = 1{,}18 \cdot 10^{-38}$, a najveći $x = (2 - 2^{-23}) \cdot 2^{127} = 3{,}40 \cdot 10^{38}$. U slučaju dvostruke preciznosti, za broj x troše se 64 bita, po sljedećem rasporedu. Jedan bit za znak, $s = \pm 1$. Za eksponent e 11 bita, tako da je $-1023 \leq e \leq 1024$, odnosno $-1022 \leq e \leq 1023$. I 52 bita $a_1, \ldots, a_{52}$ za mantisu $m = (1{,}a_1 \ldots a_{52})_2$. Važi $x = \pm m 2^e$. Ako je $e = -1023$ onda to znači $x = 0$, a ako je $e = 1024$ onda to znači $x = \pm\infty$. Zaključak: relativna greška iznosi do $2^{-53} = 10^{-15{,}9}$, tj. zapisana vrijednost x^* ima 16 sigurnih (dekadnih) cifara. $***$ Mantisa m ima 24 značajne binarne cifre (Single), odnosno ima ih 53 (Double). Poseban slučaj $x = 0$. $e \in Z$.

1.12. Greška funkcije

Šta je to greška približne vrijednosti funkcije? Ako su argumenti funkcije približni brojevi onda ćemo i vrijednost funkcije moći da saznamo samo približno. Pogledajmo prvo slučaj funkcije od jedne promjenljive.

Znači: tačan broj x, približan broj,x^*, granica greške $|x - x^*| \leq \Delta(x^*)$, s tim da $x^* \pm \Delta(x^*) \in [a, b]$ i razmotrimo realnu funkciju $f \in C^1[a, b]$. Greškom funkcije naziva se razlika $A = f(x) - f(x^*)$ i treba da bude procijenjena. Po

Lagranžovoj teoremi o srednjoj vrijednosti $A = f'(\xi)(x-x^*)$, $\xi = x^*+\theta(x-x^*)$, $0 < \theta < 1$. Dalje $|A| = |f'(\xi)||x - x^*| \le M_1|x - x^*|$, $M_1 = \max_{t\in]a,b]} |f'(t)|$ i definitivno: ocjena greške funkcije

$$|A| \le M_1\Delta(x^*). \tag{1}$$

Dalje, vidi se da je $\Delta(x^*) \ge |x-x^*|$, $t \approx x^*$ i pitanje je možemo li izračunati "max". Zato se uvodi u razmatranje tzv. linearna ocjena greške funkcije, u oznaci L, kao

$$L = |f'(x^*)|\Delta(x^*). \tag{2}$$

Veličina L koristi se u praktičnom radu. Ona predstavlja zadovoljavajuću zamjenu u slučaju da je greška argumenta mala.

Npr. kolika se greška čini ako se kaže da je $\sqrt{\pi} = \sqrt{3{,}14}$? U slučaju A posmatra se $3{,}135 \le t \le 3{,}145$, dok se u slučaju L posmatra samo $t = 3{,}14$, $y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ $(y(t) = \sqrt{t})$. Ne može se tvrditi da je $|A| \le L$. Važi $|A| \le L + o(\Delta(x^*))$ kad $\Delta(x^*) \to 0$.

Prelazimo na slučaj funkcije od više promjenljivih $f(x_1,\dots,x_n)$. Tako: tačni brojevi x_i, približni brojevi x_i^*, granice greške $|x_i - x_i^*| \le \Delta(x_i^*)$, s tim da $(x_1^* \pm \Delta(x_1^*),\dots,x_n^* \pm \Delta(x_n^*)) \in \Omega \subset R^n$ i pretpostavlja se da $f \in C^1(\Omega)$; Ω je n–dimenzioni zatvoreni pravougaonik. Greškom funkcije naziva se razlika $A = f(x_1,\dots,x_n)-f(x_1^*,\dots,x_n^*)$ i treba da bude procijenjena. Po Lagranžovoj teoremi o srednjoj vrijednosti

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\xi_1,\dots,\xi_n)}{\partial t_i}(x_i - x_i^*), \qquad \xi_i = x_i^* + \theta(x_i - x_i^*), \qquad 0 < \theta < 1,$$

$$|A| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(\xi_1,\dots,\xi_n)}{\partial t_i}\right| |x_i - x_i^*| \le \sum_{i=1}^{n} B_i|x_i - x_i^*|,$$

$$B_i = \max_{\Omega}\left|\frac{\partial f(t_1,\dots,t_n)}{\partial t_i}\right|, \qquad \text{ocjena greške funkcije:} \qquad |A| \le \sum_{i=1}^{n} B_i\Delta(x_i^*). \tag{3}$$

Dalje, može se razmatrati i tzv. linearna ocjena greške funkcije

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(x_1^*,\dots,x_n^*)}{\partial t_i}\right| \Delta(x_i^*), \tag{4}$$

nepouzdana zamjena za A.

Dva specijalna slučaja. 1. Greška zbira jednaka je zbiru grešaka sabiraka.

2. Linearna ocjena relativne greške proizvoda jednaka je zbiru relativnih grešaka činilaca. Zaista: $y = x_1x_2$ $(x_1, x_2 > 0)$, $A = (x_1+\varepsilon_1)(x_2+\varepsilon_2)-x_1x_2 = x_2\varepsilon_1 + x_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \approx x_2\varepsilon_1 + x_1\varepsilon_2$, $R = \frac{A}{y} \approx \frac{\varepsilon_1}{x_1} + \frac{\varepsilon_2}{x_2}$.

Obrnuti problem greške: dato je $\varepsilon > 0$ – granica greške funkcije f, a treba odrediti dozvoljene greške argumenata x_i tako da se ε ne prekorači. Apriori znamo grube aproksimacije x_i.

Numerička analiza, peto predavanje

14. 3. 2019.

2.1. Tri formule

Formula pravougaonika

Dati su $n \geq 1$ i $[a,b]$, stavimo $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$ i razmotrimo $f\colon [a,b] \to R$. Cilj je $I = \int_a^b f(x)dx$. Na malom intervalu $[x_{k-1}, x_k]$: $I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$, $S_k = hf_{k-1/2}$, greška

$$R_k = I_k - S_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f_{k-1/2})dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Big(f_{k-1/2} + f'_{k-1/2}(x - x_{k-1/2}) +$$

$$\frac{1}{2} f''(\xi_k(x))(x - x_{k-1/2})^2 - f_{k-1/2} \Big) dx = f''(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{2}(x - x_{k-1/2})^2 dx = \frac{h^3}{24} f''(\xi_k)$$

(po teoremi o srednjoj vrijednosti za integrale). Na velikom intervalu: $I = \sum_{k=1}^n I_k$, $S = \sum_{k=1}^n S_k = h \sum_{k=1}^n f_{k-1/2}$, greška

$$R = \sum_{k=1}^n R_k = \frac{1}{24} h^3 \sum_{k=1}^n f''(\xi_k) = \frac{1}{24} h^3 n f''(\xi) = \frac{1}{24}(b-a)h^2 f''(\xi)$$

(po teoremi o međuvrijednostima za neprekidnu funkciju).

Trapezna formula

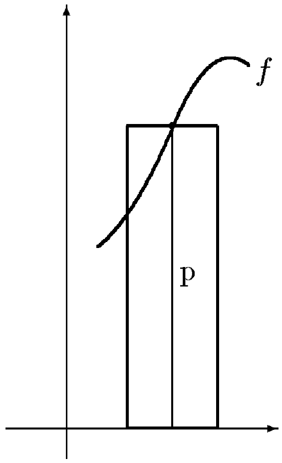
Na malom intervalu: $I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$, $S_k = \frac{h}{2}(f_{k-1} + f_k)$,

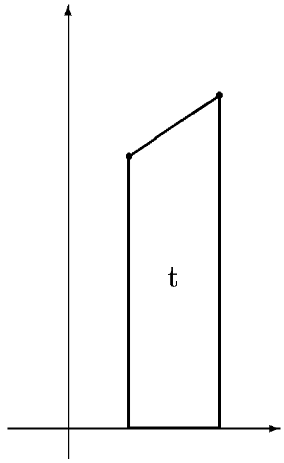
$$R_k = I_k - S_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \int_{x_{k-1}}^{x_k} L_1(x)dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{2}(x - x_{k-1})(x - x_k) \times$$

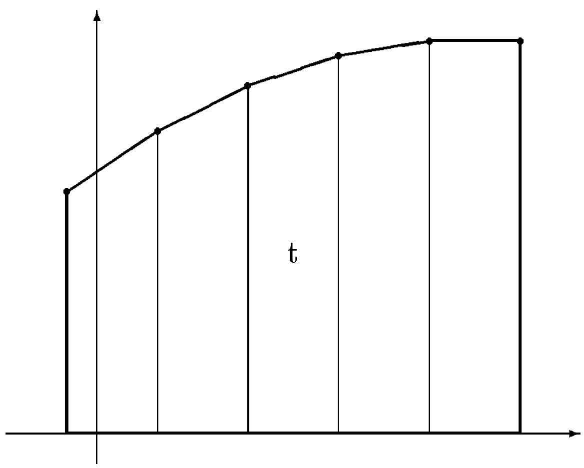
$$f''(\xi_k(x))dx = f''(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{2}(x - x_{k-1})(x - x_k)dx = -\frac{1}{12} h^3 f''(\xi_k).$$

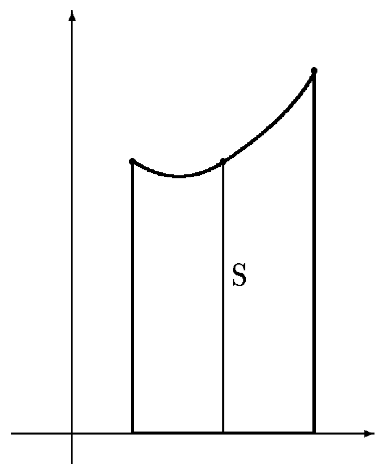
Na velikom intervalu: $I = \sum_{k=1}^n I_k$, $S = \sum_{k=1}^n S_k = h(\frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{2} f_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k)$,

$$R = \sum_{k=1}^n R_k = -\frac{1}{12} h^3 \sum_{k=1}^n f''(\xi_k) = -\frac{1}{12} h^3 n f''(\xi) = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi).$$









Simpsonova formula

Stavimo $h = \frac{b-a}{2n}$. Na malom intervalu: $I_k = \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx$, $S_k = \frac{h}{3}(f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k})$,

$$R_k = I_k - S_k = \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx - \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} L_2(x)dx = \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx - \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} H_3(x)dx$$

$$= \frac{1}{24}\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (x - x_{2k-2})(x - x_{2k-1})^2(x - x_{2k})f^{(4)}(\xi_k(x))dx =$$

$$\frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_k)\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (x - x_{2k-2})(x - x_{2k-1})^2(x - x_{2k})dx = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi_k).$$

Na velikom intervalu: $I = \sum_{k=1}^{n} I_k$, $S = \sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{h}{3}(f_0 + f_{2n} + 4\sum_{k=1}^{n} f_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{n-1} f_{2k})$,

$$R = \sum_{k=1}^{n} R_k = -\frac{1}{90}h^5 \sum_{k=1}^{n} f^{(4)}(\xi_k) = -\frac{1}{90}h^5 n f^{(4)}(\xi) = -\frac{1}{180}(b-a)h^4 f^{(4)}(\xi).$$

Ako je $nh = b - a$ onda $M_2^* = \frac{1}{h^2} \max_{i=0,\ldots,n-2} |\Delta^2 f_i|$.

2.2. Rungeovo pravilo za praktičnu ocjenu greške

Razmatramo $I = \int_a^b f(x)dx$, gdje $f \in C^4[a,b]$. Neka je $n \geq 1$ i stavimo $nh = b - a$. Sa I_n označavamo približnu vrijednost po trapeznoj formuli dobijenu sa korakom h, a sa I_{2n} onu sa korakom $\frac{h}{2}$. Odgovarajuće greške $R_n = I - I_n$, $R_{2n} = I - I_{2n}$. Polazeći od formule za uršku trapezne formule $R_n = Ch^2 + O(h^4)$ $(C = -\frac{1}{12}\int_a^b f''(x)dx)$, imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_{2n}}{I_{2n} - I_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{R_{2n}}{I - R_{2n} - (I - R_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{R_{2n}}{R_n - R_{2n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4}Ch^2 + O(h^4)}{Ch^2 + O(h^4) - (\frac{1}{4}Ch^2 + O(h^4))} = \frac{1}{3}$$

$(C \neq 0)$. Definitivno:

$$R_{2n} \approx \frac{1}{3}(I_{2n} - I_n).$$

2.3. Rombergova formula

Uzastopno, korak se usitnjava i vrše se korekcije.

(1) t	(2) t	(4) t	(7) t	etc.
	(3) k $(\frac{1}{3})$	(5) k $(\frac{1}{3})$	(8) k $(\frac{1}{3})$	etc.
	if (2) = (3)	(6) k $(\frac{1}{15})$	(9) k $(\frac{1}{15})$	etc.
		if (5) = (6)	(10) k $(\frac{1}{63})$	etc.
			if (9) = (10)	

Dva broja smatramo jednakima ako se poklapaju njihovi zapisi u memoriji računara.

Numerička analiza, šesto predavanje

21. 3. 2019.

2.4. Kvadraturne formule u slučaju prisustva težinske funkcije

Newton–Cotesove formule

Dati su $n \geq 1$ i interval $[a, b]$, dok tačke $x_i = a + ih$ $(0 \leq i \leq n)$ predstavljaju čvorove $(h = \frac{b-a}{n})$. Sa f_i označavamo vrijednosti date funkcije f u čvorovima $(f\colon [a, b] \to R)$. Treba procijeniti $I = \int_a^b f(x)dx$. U slučaju Newron–Cotesove formule zatvorenog tipa, kao približna vrijednost služi S $(I \approx S)$, gdje je $S = \sum_{i=0}^n c_i f_i$. Kako se računaju c_i? Označimo sa L_n interpolacioni polinom f po $x_0, \ldots, x_n$, bilo je $L_n(x) = \sum_{i=0}^n \ell_i(x) f_i$. Stavlja se $S = \int_a^b L_n(x)dx \Rightarrow c_i = \int_a^b \ell_i(x)dx$. Npr. $(n = 3)$ $S = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$, ovo je tzv. tri–osminska formula.

Težinska funkcija

Fiksirajmo jednu funkciju $p(x) \geq 0$ $(p\colon [a, b] \to R)$, ovo je tzv. težinska funkcija. Imamo $n + 1$ čvorova $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$. O nekoj funkciji $f\colon [a, b] \to R$ imamo date vrijednosti u čvorovima f_i. Treba aproksimirati $I(f) = \int_a^b f(x)p(x)dx$. Kao procjena služi $S(f)$ $(I(f) \approx S(f))$, gdje je $S(f) = \sum_{i=0}^n c_i f_i$. Kako se računaju c_i? Označimo sa L_n interpolacioni polinom f po $x_0, \ldots, x_n$, bilo je $L_n(x) = \sum_{i=0}^n \ell_i(x) f_i$. Stavlja se $S(f) = \int_a^b L_n(x)p(x)dx \Rightarrow c_i = \int_a^b \ell_i(x)p(x)dx$.

2.5. Gaussova kvadraturna formula

Niz ortogonalnih polinoma

Fiksirajmo interval $[a, b]$. Sa $L^2(a, b)$ označava se Lebesgueov prostor. Elementi prostora su realne funkcije čiji je domen $[a, b]$. Skalarni proizvod dvije funkcije definiše se kao $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Kaže se da su dvije funkcije ortogonalne jedna na drugu $(f \perp g)$ ako je $\langle f, g\rangle = 0$.

Za konačan niz polinoma $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ kaže se da predstavlja konačan niz ortogonalnih polinoma ako važi: (a) φ_i je polinom stepena tačno i $(0 \leq i \leq n)$ i (b) $\varphi_i \perp \varphi_j$ $(i \neq j)$. Može se posmatrati i ukupan niz $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$, ovo je tzv. niz ortogonalnih polinoma.

Sa $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ označavamo niz Legendreovih polinoma. Oni čine niz ortogonalnih polinoma u prostoru $L^2(-1, 1)$. Izraz: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$.

Rekurentna formula: $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$. Diferencijalna jednačina: $\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}] + n(n+1)P_n(x) = 0$. Npr. $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$.

U slučaju prisustva težinske funkcije $p(x) \geq 0$, skalarni proizvod $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)p(x)dx$, po definiciji.

U prostoru $L^2(-1,1)$ sa težinskom funkcijom $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, niz tzv. Čebiševljevih polinoma $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ čini niz ortogonalnih polinoma. Važi relacija $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $-1 \leq x \leq 1$. Npr. $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$. Oznaka za prostor $L^2_{p(x)}(-1,1)$ (možda).

Lema. Uvijek (za ma kakve (a,b), $p(x)$), jednačina $\varphi_n(x) = 0$ ima n međusobno različitih realnih rješenja i sva pripadaju intervalu $a < x < b$.

Gaussova kvadraturna formula

Razmatra se $I(f) = \int_{-1}^1 f(x)p(x)dx$, gdje je npr. $p(x) \equiv 1$ ili $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Aproksimacija ima oblik $S(f) = \sum_{i=1}^n c_i f_i$, gdje je $f_i = f(x_i)$. Gauss je za čvorove x_i uzeo rješenja jednačine $\varphi_n(x) = 0$. Koeficijenti c_i određuju se iz uslova $I(f) = S(f)$ kada je $f(x) = x^k$ za svako $0 \leq k \leq n-1$. Formula $I(f) \approx S(f)$ ima algebarski stepen tačnosti $2n-1$. Pokazao je da ne postoji formula čiji bi algebarski stepen tačnosti bio veći od toga.

Uvijek je $c_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$, što doprinosi numeričkoj stabilnosti Gaussove kvadraturne formule. Primjer formule $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$.

Razlaganje vektora $\mathbf{x}$ po ortonormiranoj bazi u euklidskom prostoru R^n: $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n c_i\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i\rangle \mathbf{e}_i$.

3.1. Gaussova metoda eliminacije

Razmotrimo sistem linearnih jednačina

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

($\det A \neq 0$). Drugi naziv: Gauss–Jordanova metoda redukcije.

Tokom rada algoritma, vrše se ekvivalentne transformacije sa elementima proširene matrice sistema, dok matrica sistema ne dobije gornje trougaoni oblik. Drugim riječima, u prvom koraku se anuliraju $a_{21}, \ldots, a_{n1}$, u drugom koraku $a_{32}, \ldots, a_{n2}$, itd. Nakon direktnog hoda algoritma, slijedi njegov obrnuti hod. Iz gornje trougaonog oblika, dobijamo x_i, redom, od n–te vrste prema prvoj.

Nema greške metode ($r_1 = 0$). Nema ni greške od ulaznih podataka ($r_2 = 0$), jer smatramo da su ulazni podaci a_{ij}, b_i dati tačno (da je "$E = 0$").

3.2. Gaussova metoda eliminacije sa izborom glavnog elementa

Na početku prvog koraka, u matrici sistema, treba odrediti (k, l) takav da je $|a_{kl}| = \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}|$. Element a_{kl} dolazi na mjesto a_{11}. U proširenoj matrici sistema, neka prva i k–ta vrsta zamijene mjesta i neka prva i l–ta kolona zamijene mjesta (zapamtite permutaciju $1 \leftrightarrow l$).

Na početku drugog koraka, u dijelu $2 \le i, j \le n$ matrice sistema, treba odrediti (k, l) takav da je $|a_{kl}| = \max_{i,j=2,\dots,n} |a_{ij}|$. Element a_{kl} dolazi na mjesto a_{22}. U proširenoj matrici sistema, neka druga i k–ta vrsta zamijene mjesta i neka druga i l–ta kolona zamijene mjesta (zapamtite permutaciju $2 \leftrightarrow l$).

Analogno, sve do kraja n–tog koraka. Kroz obrnuti hod dobijamo x_i. Preostaje da razdužite permutacije (redom "downto").

Računska greška r_3 smanjila se radikalno, zbog vođenja.

Parcijalno pivotiranje: mi tražimo pivota samo u okviru kolone. Prvi korak $|a_{k1}| = \max_{i=1,\dots,n} |a_{i1}|$, drugi korak $|a_{k2}| = \max_{i=2,\dots,n} |a_{i2}|$, itd.

Koliko iznosi računska greška r_3? Označimo sa $\mathbf{x}^*$ rješenje koje je računar saopštio. Pomnožite matricu A i vektor $\mathbf{x}^*$: $A\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^*$. Imamo $\mathbf{b} - \mathbf{b}^*$, a zanima nas $\mathbf{x} - \mathbf{x}^*$. Postoji korelacija između dvije veličine, o čemu u idućem naslovu. Naime, važi formula

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \operatorname{cond}(A) \frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{b}^*\|}{\|\mathbf{b}\|}. \tag{1}$$

Tako saznajemo ocjenu $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|$.

Razmotrimo Hilbertovu matricu

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Za njenu mjeru uslovljenosti po normi 2 važi $\operatorname{cond}(H_n) = O(\frac{(1+\sqrt{2})^{4n}}{\sqrt{n}})$ (npr. $\operatorname{cond}(H_5) = 4{,}8 \cdot 10^5$); mjera uslovljenosti je prevelika, matrica je loše uslovljena. Zato je sistem linearnih jednačina čija je matrica sistema H_n nepogodan za rješavanje, sa stanovišta numeričke analize. Naime, formula (1) pokazuje u kolikom se stepenu greška ulaznih podataka $E = \|\mathbf{b} - \mathbf{b}^*\|$ (date su nam samo zaokružene vrijednosti ulaznih podataka b_i) prenosi na rezultat, prenosi na grešku $r_2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|$; neotklonjiva greška $r_2 = r_2(E)$.

Ako se, po metodi najmanjih kvadrata, vrši aproksimacija polinomom stepena $n - 1$ onda se dobija s. l. j. čija je matrica sistema H_n.

Numerička analiza, sedmo predavanje

28. 3. 2019.

3.3. Mjera uslovljenosti matrice

Linearni operator

Razmotrimo realnu kvadratnu matricu A dimenzije $n \times n$. Po definiciji, indukovana norma matrice: $\|A\| = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$. Važi $\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \, \|\mathbf{x}\|$, $\|I\| = 1$, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

Ako je $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ onda se kaže da je broj $\lambda \in C$ sopstvena vrijednost matrice A, dok se za vektor $\mathbf{x} \neq 0$ kaže da predstavlja odgovarajući sopstveni vektor. Važi $|\lambda_i| \leq \|A\|$, gdje su sa $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ označene sopstvene vrijednosti matrice A. Matrica αA ima $\alpha\lambda_i$, matrica $A + cI$ ima $\lambda_i + c$, matrica A^{-1} ima λ_i^{-1} (ostaju vektori). Ako A^2 onda λ_i^2 (ostaju vektori). Važi: $\det A = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ je sopstvena vrijednost matrice A.

Mjera uslovljenosti matrice

Za regularnu realnu matricu A dimenzije $n \times n$ stavlja se $\mathrm{cond}(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$.

Vidi se da je $1 \leq \mathrm{cond}(A) < \infty$. Ako je karakteristika $\mathrm{cond}(A)$ blizu donje granice onda se kaže da je matrica A dobro uslovljena, well conditioned, a ako je blizu gornje granice onda slabo uslovljena, ill conditioned.

Svojstvo: važi $\mathrm{cond}(A) \geq \frac{|\lambda|}{|\mu|}$, gdje su λ, μ ma koje dvije sopstvene vrijednosti matrice A. Npr. $A = \mathrm{diag}(10, 8, 4, \frac{1}{2}) \Rightarrow \mathrm{cond}(A) = 20$ (po normi 2).

Teorema. Posmatrajmo vektore $\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \mathbf{b}, \mathbf{b}^*$, matrice A, A^*, uzmimo da je $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A^*\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^*$, uvedimo oznake $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, $\delta\mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{b}^*$, $\delta A = A - A^*$, pretpostavimo da su matrice A, A^* invertibilne i da je $\|\delta A\| \, \|A^{-1}\| < 1$. Tada važi nejednakost

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{1}{1 - \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \mathrm{cond}(A) \left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right).$$

Ova teorema pokazuje u kolikom stepenu se relativne greške ulaznih podataka $A, \mathbf{b}$ prenose na rezultat $\mathbf{x}$ (na relativnu grešku rezultata), prilikom rješavanja sistema linearnih jednačina.

Posmatramo kao da je $1 - \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \approx 1$. Relativna greška rezultata $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}\|}$. Specijalan slučaj ($\|\delta A\| = 0$, matrica sistema je data tačno): $\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\mathbf{b}-\mathbf{b}^*\|}{\|\mathbf{b}\|}$.

3.4. Iterativne metode za rješavanje sistema linearnih jednačina

Norma vektora

U vektorskom prostoru R^n, norma vektora $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ može da bude definisana na razne načine. Tri norme u prostoru R^n koje se često koriste: norma 1, norma 2 (euklidska norma), norma ∞ (max–norma):

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

$$\text{Indukovana norma matrice:} \qquad \|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right),$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \le i \le n} \lambda_i(A^T A)}, \qquad \|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

Ako je A simetrična ($A = A^T$) onda važi $\|A\|_2 = \max\limits_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$.

Princip kontrakcije

Teorema. Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i razmotrimo preslikavanje $\varphi\colon X \to X$. Neka φ zadovoljava uslov kontrakcije: postoji broj q $(0 \le q < 1)$ takav da za sve $x, y \in X$ važi $d(\varphi(x), \varphi(y)) \le q d(x, y)$. Dalje, neka je izabran $x_0 \in X$ na proizvoljan način i definišimo niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ relacijom: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \ge 0$. Tada: (1) jednačina $\varphi(x) = x$ ima samo jedno rješenje u oznaci X i (2) važi $\lim_{n\to\infty} x_n = X$. Teorema o ocjeni greške. Važe nejednakosti $d(X, x_n) \le \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$, $d(X, x_n) \le \frac{q}{1-q} d(x_n, x_{n-1})$.

Iz norme $\|x\|$ proizilazi metrika $d(x, y) = \|x - y\|$. Teorema. Neka je X Banachov prostor i razmotrimo preslikavanje $\varphi\colon X \to X$. Neka φ zadovoljava uslov kontrakcije: postoji broj q $(0 \le q < 1)$ takav da za sve $x, y \in X$ važi $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \le q\|x - y\|$. Dalje, neka je izabran $x_0 \in X$ na proizvoljan način i definišimo niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ relacijom: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \ge 0$. Tada: (1) jednačina $\varphi(x) = x$ ima samo jedno rješenje u oznaci X i (2) važi $\lim_{n\to\infty} x_n = X$. Teorema o ocjeni greške. Važe nejednakosti $\|X - x_n\| \le \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|$, $\|X - x_n\| \le \frac{q}{1-q}\|x_n - x_{n-1}\|$.

U normiranom vektorskom prostoru R^n, konvergencija niza vektora $\{\mathbf{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ ne zavisi od izabrane vektorske norme i svodi se na konvergenciju n brojnih nizova (po koordinatama).

U slučaju $X = R$ piše se $|x - y|$ i drugo. Moguć je i slučaj $X = [a, b] \subset R$, tj. $\varphi\colon [a, b] \to [a, b]$. Kažimo unaprijed da $|\varphi'(t)| \le q$ povlači $|\varphi(y) - \varphi(x)| \le q|x - y|$.

Metoda proste iteracije za rješavanje sistema linearnih jednačina

U pripremnom koraku, prikažite dati sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ u obliku $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$.

Teorema o dovoljnim uslovima za konvergenciju metode proste iteracije. Ako je $\|B\| < 1$ onda: (a) sistem $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$ ima jedinstveno rješenje $\mathbf{x}$ i (b) iterativni niz $\mathbf{x}_{k+1} = B\mathbf{x}_k + \mathbf{c}$ $(k \geq 0)$ konvergira ka $\mathbf{x}$ za bilo koju početnu aproksimaciju $\mathbf{x}_0 \in R^n$.

"Ako je $\|B\| < 1$ po bar jednoj normi". Prethodna teorema dobija se iz principa kontrakcije ($\varphi(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$), što se ne bi moglo reći za iduću.

Teorema o neophodnim i dovoljnim uslovima za konvergenciju metode proste iteracije. Neka sistem $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$ ima jedinstveno rješenje $\mathbf{x}$. Iterativni proces $\mathbf{x}_{k+1} = B\mathbf{x}_k + \mathbf{c}$ $(k \geq 0)$ konvergira ka $\mathbf{x}$ (za ma kakvu početnu aproksimaciju $\mathbf{x}_0$) ako i samo ako je $|\lambda_i(B)| < 1$ $(1 \leq i \leq n)$.

Jacobijeva metoda (specijalan slučaj metode proste iteracije)

Posmatrajmo s. l. j. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$; $P = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, $A = P + Q$, $P\mathbf{x} = -Q\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Prikažite dati sistem u obliku $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$, gdje je (u slučaju $n = 3$)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \end{pmatrix}.$$

Uzastopne aproksimacije računaju se po formuli $\mathbf{x}_{k+1} = B\mathbf{x}_k + \mathbf{c}$ $(k \geq 0)$; oznaka $\mathbf{x}_k = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$; kao $\mathbf{x}_0$ izaberite npr. $(0, \ldots, 0)$. Da li niz iteracija konvergira, tj. da li postoji $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$ (i čemu je jednak)?

Teorema: dovoljan uslov za konvergenciju Jacobijeve metode glasi: matrica A je dijagonalno dominantna. Tada je $\|B\|_\infty < 1$.

$$\text{Npr.} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \mathbf{c}. \qquad \text{Npr. } A = \begin{pmatrix} 15 & 1 & 2 \\ -4 & 16 & 3 \\ -5 & -6 & 17 \end{pmatrix}.$$

Numerička analiza, osmo predavanje

4. 4. 2019.

3.5. Zajdelova metoda

Drukčije se kaže Gauss–Seidelova metoda. U slučaju primjene Jacobijeve metode: $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i\Big)$ $(1 \le i \le n)$, a u slučaju G.–S. metode: $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i\Big)$ $(1 \le i \le n)$. Dvije metode su po svemu slične jedna drugoj.

3.6. Primjer iterativne metode (za rješavanje sistema linearnih jednačina) varijacionog tipa

Biće izložena metoda minimalnog ostatka (minimal residual method).

Treba riješiti sistem linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gdje je A matrica dimenzije $n \times n$, $\mathbf{b}$ vektor dimenzije n $(n \ge 1)$. Pretpostavlja se da je matrica A simetrična: $A^T = A$, zato $\lambda_i \in R$ $(1 \le i \le n)$. Dodatno, pretpostavlja se da je matrica A i pozitivno definitna: $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle > 0$ za $\mathbf{x} \ne 0$; simetrična + pozitivno definitna $\Rightarrow \lambda_i > 0$. Znamo da se skalarni proizvod vektora $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ definiše kao $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ i da iz njega proizilazi norma $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle^{1/2}$.

Razmotrimo nelinearni funkcional $f(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x} - 2\mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle$ (odrediti minimum funkcionala – to je varijacioni zadatak). Dokažite da se njegova minimalna vrijednost dostiže kada je $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, gdje je $\mathbf{x}^*$ rješenje sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $(\mathbf{x}^* = A^{-1}\mathbf{b})$. Zaista, razmotrimo

$$g(\mathbf{x}) = \langle A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^*\rangle = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}^*\rangle - \langle A\mathbf{x}^*, \mathbf{x}\rangle + \langle A\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*\rangle =$$

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}^*\rangle = f(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}^*\rangle.$$

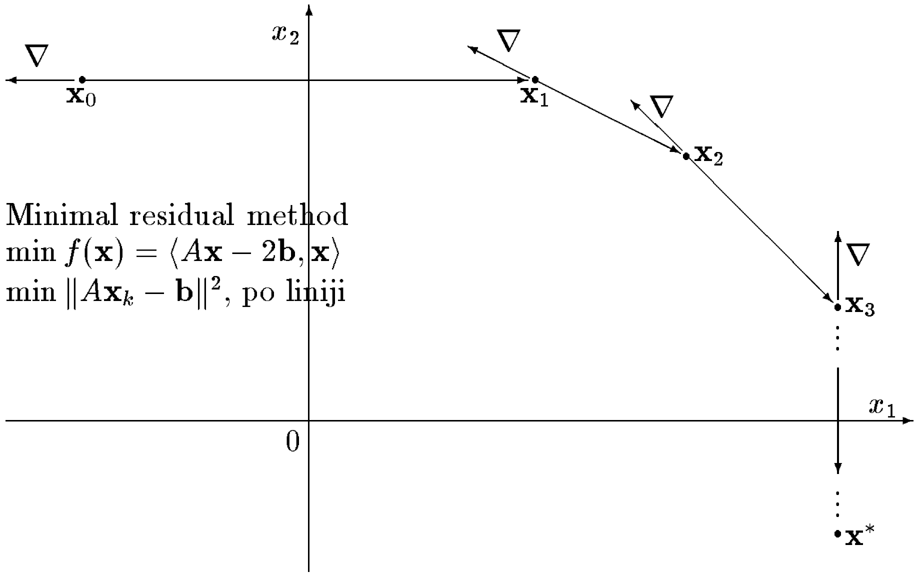
Vidi se da je $g(\mathbf{x}^*) = 0$, $g(\mathbf{x}) \ge 0$, $\langle \mathbf{b}, \mathbf{x}^*\rangle = \text{const}$, čime je dokaz završen. U izvođenju, koristili smo formulu $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, A^T\mathbf{y}\rangle$.

Izračunajte gradijent skalarnog polja $f(\mathbf{x})$. Znamo da je $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathbf{e}_n$, vektorsko polje, gdje $\mathbf{e}_i$ čine standardnu bazu. Imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha}\Big[\langle A(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{e}_i), \mathbf{x} + \alpha\mathbf{e}_i\rangle - 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} + \alpha\mathbf{e}_i\rangle - \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle\Big] =$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha}\Big[2\alpha\langle A\mathbf{x}, \mathbf{e}_i\rangle - 2\alpha\langle \mathbf{b}, \mathbf{e}_i\rangle\Big] = \langle 2A\mathbf{x} - 2\mathbf{b}, \mathbf{e}_i\rangle,$$

slijedi $\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \langle 2A\mathbf{x} - 2\mathbf{b}, \mathbf{e}_i\rangle \mathbf{e}_i = 2A\mathbf{x} - 2\mathbf{b}$, čime smo izračunali. U izvođenju, koristili smo formulu $\sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i\rangle \mathbf{e}_i = \mathbf{x}$.



Od tačke $\mathbf{x}_0$, ako se krećemo u smjeru $A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}$ onda će se ostvariti najbrže povećanje vrijednosti f. Ako želimo da dobijemo manje vrijednosti onda se treba uputiti u smjeru negativnog gradijenta. Dokle?

Stavimo $\mathbf{r}_0 = A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}$ (ostatak) i $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - t\mathbf{r}_0$. Izaberite t tako da se minimizuje $\|\mathbf{r}_1\|$, gdje je $\mathbf{r}_1 = A\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}$. U izvođenju, koristićemo formulu iz linearne algebre $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$. Imamo da je

$$\|\mathbf{r}_1\|^2 = \langle A\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}, A\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}\rangle = \langle A\mathbf{x}_0 - tA\mathbf{r}_0 - \mathbf{b}, A\mathbf{x}_0 - tA\mathbf{r}_0 - \mathbf{b}\rangle =$$

$$t^2\langle A\mathbf{r}_0, A\mathbf{r}_0\rangle - 2t\langle A\mathbf{r}_0, A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}\rangle + \langle A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}, A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}\rangle.$$

Zatim $\frac{d}{dt}\|\mathbf{r}_1\|^2 = 0$, pa definitivno slijedi $t = \frac{\langle A\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0\rangle}{\langle A\mathbf{r}_0, A\mathbf{r}_0\rangle}$, izabrali smo t.

Uopšte: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{\langle A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k\rangle}{\langle A\mathbf{r}_k, A\mathbf{r}_k\rangle}\mathbf{r}_k$, $\mathbf{r}_k = A\mathbf{x}_k - \mathbf{b}$ ($k \geq 0$); izaberite $\mathbf{x}_0$ kako bilo. Numerički odgovor glasi $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}_k$ (do koje smo iteracije).

Teorema: ako je $A^T = A > 0$ onda $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^*$.

Razmatrana numerička metoda konvergira tempom geometrijske progresije. To znači da za grešku k–te aproksimacije važi $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k\| \leq cq^k$ ($c > 0$, $0 \leq q < 1$). Kod nas je $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_1^n |x_i|^2$.

U slučaju metode najbržeg spusta, t se bira iz uslova $\min f(\mathbf{x})$, po onoj istoj polupravoj $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - t\mathbf{r}_0$ ($t \geq 0$); $\mathbf{r}_0$ je smjer gradijenta.

3.7. Metoda skalarnog proizvoda

Drukčije se kaže metoda stepena, engl. power method.

Treba odrediti dominantnu sopstvenu vrijednost date matrice A dimenzije $n \times n$. Pretpostavlja se da je A simetrična: $A^T = A$. Tada: (1) sopstvene vrijednosti $\lambda_i \in R$ ($1 \leq i \leq n$), (2) za sopstvene vektore važi $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j$, tj.

$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$ $(i \neq j)$, (3) sistem vektora $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ obrazuje ortonormiranu bazu euklidskog prostora R^n, podesili smo $\|\mathbf{e}_i\| = 1$ $(1 \leq i \leq n)$. Možemo pisati $\mathbf{x} = \sum_1^n c_i \mathbf{e}_i = \sum_1^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i$. Slično tome, možemo pisati $A\mathbf{x} = \sum_1^n \lambda_i \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i$, analogno $A^2\mathbf{x}$, itd. Već smo rekli $A\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$.

Na početku algoritma, odaberite proizvoljni vektor $\mathbf{x}_0 \neq 0$. U numeričkoj metodi će biti konstruisan niz realnih brojeva $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$. Pod određenim uslovima, važi $\lim_{k\to\infty} \mu_k = \lambda_1$. Numerisali smo $|\lambda_1| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$; kaže se da je λ_1 dominantna. Stavlja se

$$\mu_k = \langle A\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle \big/ \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle, \qquad \mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k \qquad (k \geq 0).$$

Teorema. Ako je $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ i $c_1 = \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{e}_1 \rangle \neq 0$ onda aproksimacioni niz μ_k konvergira ka λ_1 $(\lim_{k\to\infty} \mu_k = \lambda_1)$ tempom geometrijske progresije, tj. važi relacija $|\lambda_1 - \mu_k| = O(q^k)$, gdje je $q = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^2$.

Dokaz teoreme: $\mathbf{x}_0 = \sum_1^n c_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0 = \sum_1^n c_i \lambda_i^k \mathbf{e}_i$,

$$\|\mathbf{x}_k\|^2 = \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle = \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i^{2k}, \qquad \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k \rangle = \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i^{2k+1},$$

$$\mu_k = \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k \rangle \big/ \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle = \frac{c_1^2 \lambda_1^{2k+1} + c_2^2 \lambda_2^{2k+1} + \ldots + c_n^2 \lambda_n^{2k+1}}{c_1^2 \lambda_1^{2k} + c_2^2 \lambda_2^{2k} + \ldots + c_n^2 \lambda_n^{2k}},$$

$\lim_{k\to\infty}(\mu_k - \lambda_1) = 0$, dokaz je završen.

Ako govorimo o programskoj realizaciji razmatrane numeričke metode onda treba s vremena na vrijeme redukovati intenzitet vektora $\mathbf{x}_k$. Preostaju komentari. Numerički odgovor glasi $\lambda_1 \approx \mu_k$ (do koje smo iteracije). Zapažamo da je kod nas norma 2.

Radi ubrzanja konvergencije, vršite pogodne translacije po λ, tako da ulogu matrice A preuzima $A + cI$ čije su sopstvene vrijednosti $\lambda_i + c$. Lako se razbija zabrana $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ (ustvari $\lambda_1 = -\lambda_2$), time što se izvrši translacija, kao i zabrana $c_1 = 0$, time što će se promijeniti 2–3 početna vektora $\mathbf{x}_0$. Pored približne vrijednosti λ_1, možemo dobiti i približnu vrijednost sopstvenog vektora $\mathbf{e}_1$ (to je $\mathbf{x}_k$, samo podesite intenzitet), kao i ostale λ_i, $\mathbf{e}_i$ $(2 \leq i \leq n)$, preko matrice $B = B\mathbf{x} = A\mathbf{x} - \lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1$.

Numerička analiza, deveto predavanje

11. 4. 2019.

4.1. Metoda polovljenja

Takođe se kaže i metoda polovljenja intervala ili metoda bisekcije.

Razmotrimo realnu funkciju $f \in C[a,b]$ koja zadovoljava $f(a)f(b) < 0$; suprotni znaci u $x = a$, $x = b$. Tada, po Bolzanovoj teoremi, f ima bar jednu nulu, tj. jednačina $f(x) = 0$ ima bar jedan korijen (rješenje). Biće konstruisana numerička metoda (algoritam) za nalaženje korijena. Na početku, stavimo $[a_0, b_0] = [a, b]$ i $x_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$. Izračunamo $f(x_1)$ i gledamo znak. Ako je $f(a_0)f(x_1) < 0$ onda stavljamo $[a_1, b_1] = [a_0, x_1]$, a ako je $f(x_1)f(b_0) < 0$ onda stavljamo $[a_1, b_1] = [x_1, b_0]$. Može se desiti $f(x_n) = 0$, onda smo odredili tačnu vrijednost korijena; saopštiti x_n i obustaviti računanje; $r_n = 0$.

Uopšte, u n–tom koraku, polazimo od intervala $[a_{n-1}, b_{n-1}]$, stavljamo $x_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$ i dolazimo do duplo kraćeg intervala $[a_n, b_n]$ koji takođe sadrži korijen. Jasno, $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, gdje je $f(\xi) = 0$. Važi relacija $|\xi - x_n| \le \frac{1}{2^n}(b - a)$, o ocjeni greške n–te aproksimacije x_n. Numerički odgovor glasi $\xi \approx x_n$. Što više iteracija, to smo bliži korijenu ξ, budući da je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(b - a) = 0$. Kada postane $\frac{1}{2^n}(b - a) < \varepsilon$, gdje je ε unaprijed propisana dozvoljena granica greške, onda se računski proces obustavlja; $|r_n| < \varepsilon$, $r_n = \xi - x_n$.

Metoda bisekcije konvergira i ima linearni red konvergencije.

4.2. Metoda proste iteracije

Drukčije se kaže metoda fiksne tačke. Datu jednačinu $f(x) = 0$ treba prikazati u obliku $x = \varphi(x)$. Vidjećemo da je red konvergencije linearan.

(*) Dokazati teoremu o dovoljnim uslovima za konvergenciju metode proste iteracije u slučaju jedne jednačine.

Metoda proste iteracije služi za numeričko rješavanje jednačine oblika $x = \varphi(x)$.

Neka je φ realna funkcija definisana na jednom intervalu realne ose $[a, b]$. Za funkciju $\varphi = \varphi(x)$ kaže se da je kontrakcija ako ona ispunjava sljedeći uslov: $(\exists q < 1)\ (\forall x_1, x_2 \in [a, b])\ |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \le q|x_2 - x_1|$.

Teorema. Razmotrimo funkciju $\varphi \in C^1[a, b]$ (neprekidno diferencijabilna). Neka su ispunjeni uslovi: (1) ako je $a \le x \le b$ onda je $a \le \varphi(x) \le b$ i (2) postoji q takav da je $|\varphi'(x)| \le q < 1$ za $a \le x \le b$. Definišimo niz brojeva $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sa $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ za $n \ge 0$, gdje $x_0 \in [a, b]$. Tada važi: (1) jednačina $x = \varphi(x)$ ima jedinstveno rješenje na intervalu $[a, b[$ (označimo ga sa ξ) i (2) $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Dokaz teoreme. Po Lagrangeovoj teoremi (po formuli o konačnim priraštajima) $\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_1) = \varphi'(\beta)(\alpha_2-\alpha_1)$, gdje je $\alpha_1 < \beta < \alpha_2 \Rightarrow |\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_1)| = |\varphi'(\beta)|\,|\alpha_2 - \alpha_1| \le q|\alpha_2 - \alpha_1|$.

Kako φ: $[a,b] \to [a,b]$ i $x_0 \in [a,b]$ to $x_n \in [a,b]$ za svako n.

Dokažimo da je $\{x_n\}$ Cauchyjev niz. Imamo $|x_{n+1} - x_n| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})| \le q|x_n - x_{n-1}|$. Slično $|x_{n+2} - x_{n+1}| = |\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)| \le q|x_{n+1} - x_n| \le q^2|x_n - x_{n-1}|$. Itd. Isto tako $|x_{n+p} - x_{n+p-1}| \le q^p|x_n - x_{n-1}|$. Na isti način se dokazuje i $|x_n - x_{n-1}| \le q^{n-1}|x_1 - x_0|$. Ukupno

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - x_{n+p-1} + \ldots + x_{n+2} - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n| \le$$

$$|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+\ldots+|x_{n+2}-x_{n+1}|+|x_{n+1}-x_n| \le (q^p+\ldots+q^2+q)|x_n-x_{n-1}| \le$$

$$(q+q^2+\ldots)|x_n-x_{n-1}| = \frac{q}{1-q}|x_n-x_{n-1}| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0| \to 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty$$

bez obzira na $p \ge 1$. Znači da $|x_{n+p} - x_n| \to 0$, razmatrani niz je Cauchyjev.

Niz $\{x_n\}$ je Cauchyjev $\Rightarrow$ niz $\{x_n\}$ je i konvergentan i odmah uvodimo oznaku $X = \lim_{n\to\infty} x_n$. Iz $a \le x_n \le b$ za svako $n \Rightarrow a \le X \le b$. Iz $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ slijedi $X = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$ i dalje slijedi (budući da je φ neprekidna funkcija) $X = \varphi(X)$. Znači $X = \xi$. Ne mogu postojati dva rješenja ξ_1 i ξ_2 jer bi tada bilo $\varphi(\xi_1) = \xi_1$, $\varphi(\xi_2) = \xi_2$ i (za neko β) $|\xi_2 - \xi_1| = |\varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1)| = |\varphi'(\beta)|\,|\xi_2 - \xi_1| \le q|\xi_2 - \xi_1|$, a znamo da je $q < 1$. Dokaz je završen.

(*) Dokazati prvu formulu za ocjenu greške $|x_n - \xi| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$ (za svako n).

Treba da dokažemo nejednakost. S jedne strane, $|x_n - x_{n-1}| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})| \le q|x_{n-1} - x_{n-2}| = q|\varphi(x_{n-2}) - \varphi(x_{n-3})| \le \ldots \le q^{n-1}|x_1 - x_0|$, prepišimo $|x_n - x_{n-1}| \le q^{n-1}|x_1 - x_0|$. S druge strane, $x_n - \xi = x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - \xi$ pa po aksiomi trougla imamo $|x_n - \xi| \le |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - \xi|$ i dalje

$$|x_n - \xi| \le |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - \xi| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_n)| + |\varphi(x_n) - \varphi(\xi)| \le$$

$$q|x_{n-1} - x_n| + q|x_n - \xi| \quad \Rightarrow \quad (1-q)|x_n - \xi| \le q|x_{n-1} - x_n| \quad \Rightarrow$$

$$|x_n - \xi| \le \frac{q}{1-q}|x_{n-1} - x_n|.$$

Ukupno:

$$|x_n - \xi| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \le \frac{q}{1-q}q^{n-1}|x_1 - x_0| = \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|,$$

što je i trebalo.

(*) Dokazati drugu formulu za ocjenu greške $|x_n - \xi| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$ (za svako n).

Zadatak 1. Data je iteracija $x_{r+1} = x_r(3 - 3x_r + x_r^2)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$. Izračunajte fiksne tačke iteracije i odredite koje su privlačne i koje su odbojne. U okolini privlačnih fiksnih tačaka odredite red konvergencije. **Rješenje.** Fiksne tačke su rješenja jednačine $g(x) = x$, gdje je $g(x) = x(3 - 3x + x^2)$. Dobijamo tri rješenja $x = 0$, $x = 1$ i $x = 2$. Izračunamo izvod $g'(x) = 3(x-1)^2$. Kako je $|g'(0)| = 3 > 1$, $|g'(1)| = 0 < 1$, $|g'(2)| = 3 > 1$, to je jedina privlačna fiksna tačka $x = 1$. Iz $g'(1) = 0$, $g''(1) = 0$, $g'''(1) = 6 \neq 0$ slijedi da je red konvergencije u okolini fiksne tačke kubni.

Zadatak 2. Data je iteracija $x_{r+1} = \frac{2}{3}\left(x_r + \frac{1}{x_r} - \frac{1}{2}\right)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$. Izračunajte fiksne tačke iteracije i odredite koje su privlačne i koje su odbojne. U okolini privlačnih fiksnih tačaka odredite red konvergencije. **Rješenje.** Iterativna funkcija je $g(x) = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)$. Fiksne tačke su rješenja jednačine $g(\alpha) = \alpha$. Iz $g(\alpha) - \alpha = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3\alpha} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3\alpha}(\alpha^2 + \alpha - 2) = -\frac{1}{3\alpha}(\alpha+2)(\alpha-1)$ dobijamo da su fiksne tačke $\alpha = -2$ i $\alpha = 1$. Kako je $g'(-2) = \frac{1}{2}$ i $g'(1) = 0$, to su obe tačke privlačne fiksne tačke. Kako je $g'(-2) \neq 0$, to je u blizini $\alpha = -2$ red konvergencije linearan. U blizini $\alpha = 1$ red konvergencije je kvadratni, jer je $g'(1) = 0$ i $g''(1) = \frac{4}{3} \neq 0$.

Zadatak 3. Jednačinu $x^3 - A = 0$, $A \in R$, rješavamo pomoću iteracije oblika $x_{r+1} = \alpha x_r + \frac{\beta}{x_r^2}$, $r = 0, 1, \ldots$. Odaberite parametre α i β tako da red konvergencije u okolini rješenja jednačine bude barem kvadratni. Koliki je tačno red konvergencije? **Rješenje.** Rješenje jednačine je očito $x = \sqrt[3]{A}$. Iterativna funkcija je jednaka $g(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x^2}$. Da bi $\sqrt[3]{A}$ bila fiksna tačka i da bi red konvergencije u njenoj okolini bio barem kvadratni, mora važiti $g(\sqrt[3]{A}) = \alpha\sqrt[3]{A} + \frac{\beta}{\sqrt[3]{A^2}} = \sqrt[3]{A}$, $g'(\sqrt[3]{A}) = \alpha - 2\frac{\beta}{\sqrt[3]{A^3}} = 0$. Jednačine se pojednostavljuju u $\alpha + \frac{\beta}{A} = 1$, $\alpha - 2\frac{\beta}{A} = 0$. Rješenje je jednako $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{A}{3}$. Kako je $g''(x) = 6\frac{\beta}{x^4}$, $g''(\sqrt[3]{A}) = 6\frac{\beta}{\sqrt[3]{A^4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{A}} \neq 0$, znači da je red konvergencije tačno kvadratni.

Zadatak 4. Jednačinu $x^2 - a = 0$, $a > 0$, rješavamo pomoću iteracije $x_{r+1} = \frac{x_r^3}{Ax_r^2 + B}$, $r = 0, 1, \ldots$. Odaberite nepoznate koeficijente A i B tako da red konvergencije u okolini rješenja $\sqrt{a}$ bude barem kvadratni. Koliki je tačno red konvergencije? **Rezultat.** $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{a}{2}$, znači $x_{r+1} = \frac{2x_r^3}{3x_r^2 - a}$, $r = 0, 1, \ldots$, konvergencija je tačno kvadratna (Izvor: Marjeta Krajnc).

Za fiksnu tačku ξ funkcije φ ($\varphi(\xi) = \xi$) kaže se da je atraktivna (privlačna) ako $|\varphi'(\xi)| < 1$, da je repulsivna (odbojna) ako $|\varphi'(\xi)| > 1$, da je neutralna ako $|\varphi'(\xi)| = 1$. Za konvergentan niz iteracija $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ($\lim_{n\to\infty} x_n = \varphi(\xi) = \xi$) kaže se da ima konvergenciju reda $s \geq 1$ ako $|r_{n+1}| \sim c|r_n|^s$, $r_n = \xi - x_n$. Teorema: ako je $\varphi'(\xi) = 0, \ldots, \varphi^{(s-1)}(\xi) = 0$, $\varphi^{(s)}(\xi) \neq 0$ (plus $\varphi(\xi) = \xi$) onda je u okolini fiksne tačke ξ red konvergencije niza iteracija jednak (tačno) s. Naime, po Taylorovoj formuli, $x_{n+1} - \xi = \varphi(x_n) - \varphi(\xi) = \frac{1}{s!}(x_n - \xi)^s f^{(s)}(\xi_n)$, tačka ξ_n je između ξ i x_n, $\varphi \in C^s[a, b]$.

Numerička analiza, deseto predavanje

18. 4. 2019.

4.3. Newtonova metoda

Takođe se kaže i Newton–Raphsonova metoda. U slučaju jedne jednačine sa jednom nepoznatom obično se kaže metoda tangente. Izložićemo metodu tangente.

(*) Dokazati teoremu o dovoljnim uslovima za konvergenciju metode tangente.

Metoda tangente služi za numeričko rješavanje jednačine oblika $F(x) = 0$ na jednom intervalu realne ose $[a, b]$.

Polazimo od grube aproksimacije x_0. Posmatrajmo grafik funkcije $y = F(x)$ i uočimo na grafiku tačku čija je apscisa $x = x_0$, njene koordinate su $(x, y) = (x_0, F(x_0))$. U toj tački, prislonimo tangentu na grafik. Jednačina tangente? Kao prava kroz jednu tačku $y - F(x_0) = k(x - x_0)$ ili $y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0)$, na bazi geometrijske interpretacije prvog izvoda. Presječna tačka tangente i x–ose predstavlja bolju aproksimaciju od x_0. Apscisa presječne tačke? Iz $y = 0$ i $y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0)$ imamo $-F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0)$, zatim $-F(x_0)/F'(x_0) = x - x_0$ i definitivno $x = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$. Stavlja se $x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$. Slično x_2 na bazi x_1, itd. Da li niz $\{x_n\}$ konvergira ka rješenju jednačine?

Teorema (o dovoljnim uslovima za konvergenciju metode tangente). Neka su ispunjeni sljedeći uslovi: $F \in C^2[a, b]$, $F(a)F(b) < 0$, $F'(x)$ je stalnog znaka na $[a, b]$ (to znači: $F'(x) > 0$ za svako $x \in [a, b]$ ili $F'(x) < 0$ za svako $x \in [a, b]$), $F''(x)$ je stalnog znaka na $[a, b]$, tačka $x_0 \in [a, b]$ izabrana je tako da važi $F(x_0)F''(x_0) > 0$. Neka je niz brojeva $\{x_n\}$ definisan sa $x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$ za $n \geq 0$. Tada jednačina $F(x) = 0$ ima jedinstveno rješenje na intervalu $[a, b]$ (označimo ga sa X) i važi $\lim_{n\to\infty} x_n = X$.

Dokaz teoreme. Iz $F(a)F(b) < 0$ i $F'(x)$ je stalnog znaka slijedi postojanje i jedinstvenost rješenja X. U zavisnosti od toga kakvog su znaka $F'(x)$ i $F''(x)$ moguća su četiri slučaja i to: 1) $F' > 0$, $F'' > 0$, 2) $F' > 0$, $F'' < 0$, 3) $F' < 0$, $F'' > 0$, 4) $F' < 0$, $F'' < 0$. Mi ćemo sprovesti dokaz za prvi slučaj. Za ostale slučajeve dokaz je sličan.

Prvo. Važi $x_n > X$ za svako n; zapaziti odmah da je ovaj uslov ekvivalentan sa $F(x_n) > 0$. Dokazuje se matematičkom indukcijom. Imamo da je $x_0 > X$ jer je $F''(x) > 0$ i $F(x_0)F''(x_0) > 0$. Ako je $x_n > X$ onda je i $x_{n+1} > X$. Zaista, po Taylorovoj formuli:

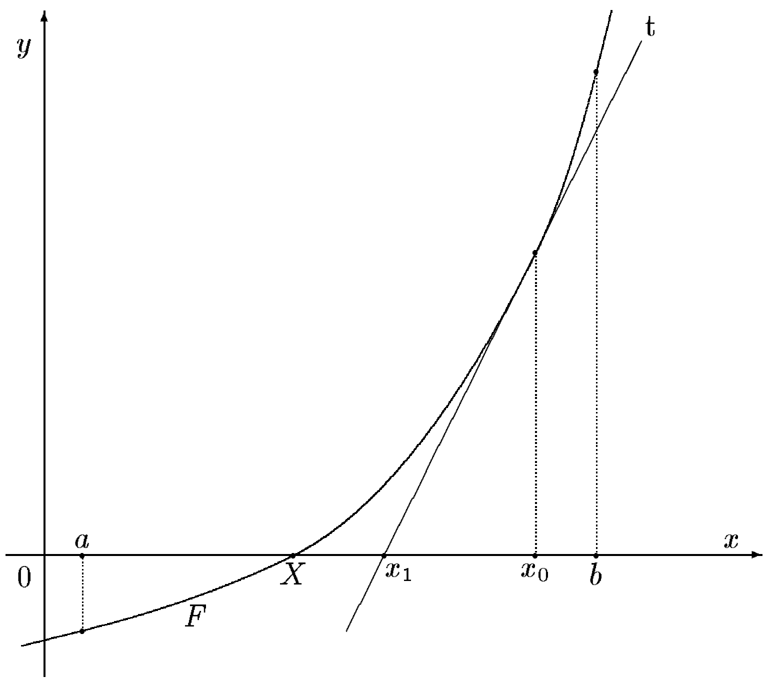
$$F(X) = F(x_n) + F'(x_n)(X - x_n) + \frac{1}{2}F''(\alpha)(X - x_n)^2$$

$$\Rightarrow \qquad x_{n+1} = X + \frac{F''(\alpha)(X - x_n)^2}{2F'(x_n)} > X.$$

Drugo. Niz $\{x_n\}$ je opadajući, tj. važi $x_{n+1} < x_n$ za $n \geq 0$. Zaista, $x_{n+1} - x_n = -F(x_n)/F'(x_n) < 0$ zato što je $F(x_n) > 0$ kako je maločas pokazano i takođe $F'(x_n) > 0$ po definicionom uslovu prvog slučaja.

Treće. Razmatrani niz je konvergentan, budući da je monoton i ograničen (svi njegovi elementi su veći od X). Označimo sa ξ graničnu vrijednost niza: neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Još četvrto. Na relaciju $x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$ treba primijrniti operaciju $\lim_{n\to\infty}$ čime se dobija $\xi = \xi - \frac{F(\xi)}{F'(\xi)}$; zapaziti da je $F'(\xi) \neq 0$ budući da $\xi \in [a, b]$. Dakle, $F(\xi) = 0$. Znači da je $\xi = X$. Dokaz je završen.



Metoda tangente ima kvadratni red konvergencije, što znači da se elementi niza x_n vrlo brzo približavaju rješenju jednačine X.

Zaista, $F(\xi) = 0$, $\varphi(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$, $\varphi(\xi) = \xi$, $\varphi'(x) = 1 - \frac{F'(x)}{F'(x)} + \frac{F(x)F''(x)}{(F'(x))^2}$, $\varphi'(\xi) = 0$.

Specijalan slučaj metode tangente: $F(x) = x^2 - a$ (dato je $a > 0$), $F(x) = 0$ $\Rightarrow x = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, Heronova metoda za računanje kvadratnog korijena.

(*) Dokazati teoremu o ocjeni greške u slučaju metode tangente.

Teorema (o ocjeni greške). Važi nejednakost

$$|X - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2$$

za svako $n \geq 1$, $m_1 = \inf_{x\in[a,b]} |F'(x)|$, $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |F''(x)|$.

Dokaz. Razvijmo funkciju $y = F(x)$ po Taylorovoj formuli u okolini tačke $x = x_{n-1}$ do drugog izvoda:

$$F(x) = F(x_{n-1}) + F'(x_{n-1})(x - x_{n-1}) + \frac{1}{2}F''(\alpha)(x - x_{n-1})^2,$$

α zavisi od x. Iskoristimo ovaj razvoj za $x = x_n$: $F(x_n) = F(x_{n-1}) + F'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}F''(\alpha)(x_n - x_{n-1})^2$, α je neka tačka između x_{n-1} i x_n, $|F''(\alpha)| \leq M_2$. Izraz $F(x_{n-1}) + F'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$ predatavlja linearni dio Taylorovog razvoja i jednak je u ovoj situaciji nuli po geometrijskoj definiciji prvog izvoda, po definiciji metode tangente. Tako da se ranija formula svodi na $F(x_n) = \frac{1}{2}F''(\alpha)(x_n - x_{n-1})^2$. Slijedi

$$|F(x_n)| \leq \frac{M_2}{2}(x_n - x_{n-1})^2. \tag{1}$$

S druge strane imamo: $F(x_n) = F(x_n) - F(X) = F'(\beta)(x_n - X)$, Lagrangeova teorema o srednjoj vrijednosti. Slijedi $|F(x_n)| = |F'(\beta)|\,|x_n - X|$, $|F(x_n)| \geq m_1|x_n - X|$ ili svejedno

$$|x_n - X| \leq \frac{|F(x_n)|}{m_1}. \tag{2}$$

Kombinovanjem (1) i (2) imamo $|x_n - X| \leq \frac{1}{m_1} \cdot \frac{M_2}{2}(x_n - x_{n-1})^2$. Dokaz je završen.

Numerička analiza, jedanaesto predavanje

25. 4. 2019.

5.1. Uvod o Cauchyjevom zadatku i lema o dva rješenja diferencijalne jednačine

Lema. Neka je $f(x,y)$ neprekidna funkcija i neka je neprekidno diferencijabilna po promjenljivoj y. Neka su $Y_1(x)$ i $Y_2(x)$ dva rješenja diferencijalne jednačine $y' = f(x,y)$. Tada važi

$$Y_2(\beta) - Y_1(\beta) = (Y_2(\alpha) - Y_1(\alpha)) \exp\left\{\int_\alpha^\beta f'_y(x, \overline{y}(x))dx\right\},$$

gdje je $\overline{y}(x)$ neki broj između $Y_1(x)$ i $Y_2(x)$, $Y_1(x) < \overline{y}(x) < Y_2(x)$.

Uvedimo oznaku $\Omega = \{(x,y) | \, Y_1(x) \le y \le Y_2(x),\, \alpha \le x \le \beta\}$. Stavimo $L = \sup_{(x,y)\in\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}$. Slijedi

$$|Y_2(\beta) - Y_1(\beta)| \le |Y_2(\alpha) - Y_1(\alpha)| \exp\{L(\beta-\alpha)\}.$$

Očito $\alpha < \beta$. Smatramo $Y_1(x) < Y_2(x)$. Pisali smo $\exp x$ umjesto e^x.

5.2. Eulerova metoda i drugi primjeri

(*) Izvođenje Eulerove metode i njen izraz za lokalnu grešku.

Razmotrimo problem inicijalnih vrijednosti $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$. Neka su fiksirane veličine $h > 0$ i $n \in N$. Mrežu čvorova čine tačke $x_i = x_0 + ih$ $(0 \le i \le n)$. Mi tražimo približno rješenje razmatranog problema. Sa y_i označava se približna vrijednost u tački $x = x_i$ $(0 \le i \le n)$. Greška u pojedinoj tački definiše se kao $R_i = y(x_i) - y_i$ $(0 \le i \le n)$.

Prelazimo na izvođenje Eulerove metode. Napišimo Taylorovu formulu:

$$y(x_0+h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 y''(\alpha) \quad \text{ili} \quad y(x_1) = y_0 + hf(x_0,y_0) + \frac{1}{2}h^2y''(\alpha),$$

gdje je $x_0 < \alpha < x_0 + h$. Uzimamo da $y_0 + hf(x_0,y_0)$ predstavlja približnu vrijednost i (samim tim) $\frac{1}{2}h^2y''(\alpha)$ predstavljaće grešku. Prema tome, stavlja se $y_1 = y_0 + hf(x_0,y_0)$. Pored toga, stavlja se $r_1 = \frac{1}{2}h^2y''(\alpha)$, ovo je tzv. lokalna greška. Kaže se lokalna greška ili greška na (jednom) koraku.

Slično se dobija y_2 na bazi y_1, itd. Dakle, formula za Eulerovu metodu ili šema za računanje Eulerove metode glasi $y_{i+1} = y_i + hf(x_i,y_i)$ za $0 \le i \le n-1$.

Slično se definišu i ostale lokalne greške $r_2, \ldots, r_n$ i važi relacija $r_i = \frac{1}{2}h^2y''(\alpha)$ gdje je $x_{i-1} < \alpha < x_i$ $(1 \le i \le n)$. U zaključku, lokalna greška Eulerove metode iznosi $r_i = O(h^2)$. Lako se pokazuje da važi sljedeće izvođenje (kada je y rješenje jednačine): $y' = f(x,y) \Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}f(x,y) \quad \Rightarrow \quad y'' = f'_x + f'_y y' \quad \Rightarrow \quad y'' = f'_x + f'_y f.$$

(*) Ocjena greške Eulerove metode.

U cilju ocjene greške, uvedimo potrebne oznake. Naravno, $y = y(x)$ je analitičko rješenje razmatranog problema. Stavimo $y_0(x) = y(x)$. Neka je $y_i = y_i(x)$ funkcija koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu $y' = f(x,y)$ i uslov $y_i(x_i) = y_i$ za $1 \le i \le n$. Lokalna greška r_i definiše se kao $r_i = y_{i-1}(x_i) - y_i(x_i)$ i za nju važi relacija $r_i = \frac{1}{2}h^2 y''_{i-1}(\alpha_i)$, gdje je $x_{i-1} < \alpha_i < x_i$.

Prelazimo na ocjenu greške R_n. Po lemi o dva rješenja diferencijalne jednačine važi

$$y_{i-1}(x_n) - y_i(x_n) = (y_{i-1}(x_i) - y_i(x_i)) \exp \int_{x_i}^{x_n} f'_y(x, \overline{y}_i(x))dx,$$

gdje je recimo $y_{i-1}(x) < \overline{y}_i(x) < y_i(x)$. Ova relacija pokazuje da razlika $y_{i-1}(x) - y_i(x)$ u tački $x = x_n$ može da bude veća od one u tački $x = x_i$. Drugim riječima, tokom napredovanja po x–osi dolazi do dodatnog razilaženja dva rješenja, uopšte uzev. Imamo da je

$$R_n = y(x_n) - y_n = y_0(x_n) - y_n(x_n) = \sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}(x_n) - y_i(x_n)) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}(x_i) - y_i(x_i)) \exp \int_{x_i}^{x_n} f'_y(x, \overline{y}_i(x))dx \quad \text{slijedi}$$

$$|R_n| \le \sum_{i=1}^{n} |y_{i-1}(x_i) - y_i(x_i)| \exp \int_{x_i}^{x_n} f'_y(x, \overline{y}_i(x))dx \le$$

$$\sum_{i=1}^{n} |r_i| \exp \int_{x_i}^{x_n} L dx = \sum_{i=1}^{n} |r_i| \exp\{L(x_n - x_i)\},$$

gdje je uvedena oznaka $L = \sup f'_y(x,y)$ po skupu $\Omega = \{x_0 \le x \le x_0 + X,\ y(x) - \varepsilon \le y \le y(x) + \varepsilon\}$.

Dobili smo definitivno $|R_n| \le \sum_{i=1}^{n} |r_i| \exp\{L(x_n - x_i)\}$ ili $|R_n| \le \sum_{i=1}^{n} |r_i|$ $\exp\{LX\}$, stavili smo $X = nh$. Budući da je $|r_i| = O(h^2)$ slijedi $|R_n| = O(h)$. Takođe važi $|R_i| = O(h)$ za ostale i. Zaključak: greška Eulerove metode je reda h ili $|R_n| \le Ch$ za neku konstantu $C > 0$.

Poboljšana Eulerova metoda: $y^*_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})\Big)$ ili $k_1 = hf(x_i, y_i)$, $k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$, $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$. Lokalne greške $r_i = O(h^3)$, greška $R_n = O(h^2)$.

Heunova metoda (Hojnova metoda): $y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)$, $y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$ ili $k_1 = hf(x_i, y_i)$, $k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1)$, $y_{i+1} = y_i + k_2$. Lokalne greške $r_i = O(h^3)$, greška $R_n = O(h^2)$.

5.3. Opšti slučaj eksplicitne metode tipa Runge–Kutte

Priraštaj funkcije $y = y(x)$ u blizini tačke $x = x_0$ može da bude procijenjen pomoću broja $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, što stvara Eulerovu metodu.

Razmatra se Cauchyjev problem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ na intervalu $[x_0, x_0+X]$. Izabrali smo $n \geq 1$, pa mrežu čine čvorovi $x_i = x_0+ih$ $(0 \leq i \leq n)$, $h = \frac{X}{n}$. Numerički odgovor će imati oblik $y_0, \ldots, y_n$, a posmatraćemo i greške $R_i = y(x_i) - y_i$. Formule za metodu RK4:

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \quad k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right),$$
$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\Big(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\Big),$$

$0 \leq i \leq n-1$ ($k_1, \ldots, k_4$ zavise od i). Formule su izvedene po metodi neodređenih koeficijenata. Lokalne greške $r_i = O(h^5)$, greška $R_n = O(h^4)$. Očito, naziv metode "Runge-Kutta četvrtog reda" predstavlja posljedicu relacije $|R_n| \leq Ch^4$ za neku konstantu $C > 0$. Pretpostavili smo da je funkcija $f(x, y)$ dovoljno glatka.

5.4. Ocjena greške za metodu Runge–Kutte

Kao praktični izraz za grešku Eulerove metode služi

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} r_i \exp \int_{x_i}^{x_n} f'_y(x, y(x))dx, \tag{1}$$

gdje treba uzeti $r_i = \frac{1}{2}h^2 y''(x_{i-1/2})$, znamo da $y''(x) = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)f(x, y)$, a integral izračunati preko trapezne formule po čvorovima $f'_y(x_\nu, y_\nu)$, $i \leq \nu \leq n$, npr. $f(x, y) = x^2y^2 \Rightarrow f'_y(x, y) = 2x^2y$.

Formula (1) može da posluži za bilo koju jednokoračnu metodu (metodu Runge–Kutte), a isto tako i za bilo koju višekoračnu metodu (diferencnu metodu), samo treba saznati r_i. U slučaju RK4 preporučuje se: $r_{i+1} \approx r_{i+2}$, $r_{i+1} + r_{i+2} \approx \frac{1}{15}(y_{i+2} - Y_{i+2})$, gdje se broj Y_{i+2} dobija polazeći od (x_i, y_i) sa korakom $2h$.

5.5. Algoritam zasnovan na metodi Runge–Kutte

U slučaju RK4, procjena greške u tački $x = x_0 + X$ po Rungeovom pravilu: $R_{2n}(x_0+X) \approx \frac{1}{15}\Big(y_{2n}(x_0+X) - y_n(x_0+X)\Big)$. Treba sprovesti grubi ili pomoćni račun sa korakom h i fini račun sa korakom $\frac{h}{2}$, takođe od $x = x_0$ do $x = x_0+X$.

Numerička analiza, dvanaesto predavanje

2. 5. 2019.

5.6. Diferencne metode

Razmatra se Cauchyjev problem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ na intervau $[x_0, x_0 + X]$, dok mrežu čine čvorovi $x_n = x_0 + nh$ $(h = \frac{X}{N})$. Fiksirajmo $1 \le k \le 4$ i razmotrimo k čvorova $x_0, \dots, x_{k-1}$. Fokusirajmo se na slučaj $k = 4$: razmotrimo 4 čvora $x_0, \dots, x_3$. Označimo sa $L_3(x)$ interpolacioni polinom funkcije $y'(x)$ po navedenim čvorovima čiji su indeksi $0 \le n \le 3$:

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \ell_i(x) y'(x_i), \qquad \ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne i}}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Greška interpolacije:

$$e(x) = \frac{1}{4!} \omega_4(x) y^{(5)}(\xi(x)), \qquad \omega_4(x) = \prod_{i=0}^{3} (x - x_i),$$

ako $y \in C^5[x_0, x_0 + X]$. Na relaciju $y'(x) = L_3(x) + e(x)$ primijenimo integral od x_3 do x_4: $y(x_4) = y(x_3) + \int_{x_3}^{x_4} L_3(x)dx + \int_{x_3}^{x_4} e(x)dx$ ili svejedno $y(x_4) = y(x_3) + \int_{x_3}^{x_4} L_3(x)dx + r_4$, gdje r_4 predstavlja lokalnu grešku. Kada se izračuna: $y(x_4) = y(x_3) + \frac{h}{24}\Big(55y'(x_3) - 59y'(x_2) + 37y'(x_1) - 9y'(x_0)\Big) + r_4$, $r_4 = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\xi_4)$, $x_0 < \xi_4 < x_4$. Dalje $y(x_4) \approx y(x_3) + \frac{h}{24}\Big(55y'(x_3) - 59y'(x_2) + 37y'(x_1) - 9y'(x_0)\Big)$ ili $y(x_4) \approx y(x_3) + \frac{h}{24}\Big(55f(x_3, y(x_3)) - 59f(x_2, y(x_2)) + 37f(x_1, y(x_1)) - 9f(x_0, y(x_0))\Big)$, budući da je $y' = f(x, y)$. Na taj način, imamo numeričku formulu $y_4 = y_3 + \frac{h}{24}\Big(55f(x_3, y_3) - 59f(x_2, y_2) + 37f(x_1, y_1) - 9f(x_0, y_0)\Big)$.

Sličnim postupkom, mi napredujemo od tačke do tačke. Na taj način, imamo numeričku metodu ili šemu:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} \times$$

$$\Big(55f(x_n, y_n) - 59f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 37f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 9f(x_{n-3}, y_{n-3})\Big),$$

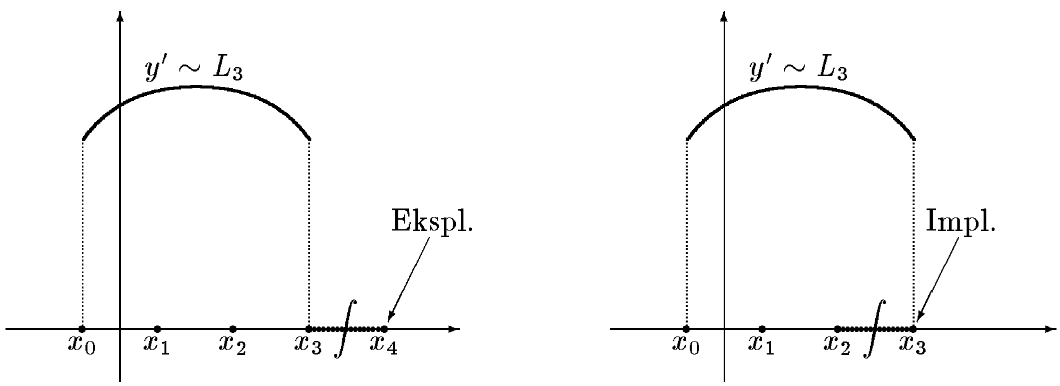
$3 \le n \le N - 1$. Kraći zapis $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\Big(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\Big)$. Ova šema za računanje predaje se računaru. Mi smo upravo izveli tzv. eksplicitnu Adamsovu metodu četvrtog reda (ponekad se kaže i ekstrapolaciona). Numerički odgovor (rezultat) ima oblik $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$. Veličine $y_1, \dots, y_3$ izračunajte po RK4.

Sa r_n označavamo lokalne greške, sa $R_N = y(x_N) - y_N$ grešku, a sa $y(x)$ analitičko rješenje razmatranog Cauchyjevog problema.

Prelazimo na drugu metodu (drugu šemu). To je tzv. implicitna Adamsova metoda četvrtog reda (ponekad se kaže i interpolaciona).

Dakle, $L_3(x)$ ostaje interpolacioni polinom funkcije $y'(x)$ po mreži čvorova $x_0, \ldots, x_3$, pa naravno da ostaje i izraz za njegovu grešku $e(x)$. U ovom slučaju, na relaciju $y'(x) = L_3(x) + e(x)$ treba primijeniti integral od x_2 do x_3. Postupak je sličan. Npr. dobiće se $r_3 = -\frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(\xi_3)$, $x_0 < \xi_3 < x_3$ (r_n e. $\neq r_n$ i.). Šema za računanje:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\Big(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\Big), \qquad 2 \le n \le N-1.$$



Prelazimo na treću metodu, to je tzv. Adamsova prediktor–korektor metoda četvrtog reda:

$$y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\Big(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\Big), \qquad f^*_{n+1} = f(x_{n+1}, y^*_{n+1}),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\Big(9f^*_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\Big), \qquad 3 \le n \le N-1.$$

Vidimo da je izvršeno jedno malo prilagođavanje implicitne šeme.

Veličine y^*_{n+1} imaju pomoćne uloge, dok y_{n+1} predstavljaju numerički odgovor. Za y^*_{n+1} kaže se da je prediktor vrijednost, dok je y_{n+1} korektor. Vidimo da smo se oslobodili sabirka $f(x_{n+1}, y_{n+1})$ koji je stvarao implicitnost, po cijenu samo beznačajnog povećanja lokalne greške.

5.7. Metoda neodređenih koeficijenata

Kao zadatak: za rješavanje početnog problema $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ koristi se diferencna šema $y_{n+1} = 5y_{n-1} - 4y_n + h\Big(\alpha f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \beta f(x_n, y_n)\Big)$. Izaberite α i β tako da lokalna greška šeme $r = L - R$ iznosi $O(h^4)$. Uputstvo za zadatak: razviti funkcije y i $y' = f$ po Taylorovoj formuli. Rezultat: $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

5.8. Ocjena greške diferencne metode

Lokalne greške eksplicitne Adamsove metode jednake su $r_n = O(h^{k+1})$, njena greška je jednaka $R_N = y(x_N) - y_N = O(h^k)$, izvođenje je slično onome u slučaju Runge–Kutte. Isto tako, važi $r_n = O(h^{k+1})$, $R_N = O(h^k)$ u slučaju implicitne Adamsove metode. Navedene dvije formule važe bez izmjene i za Adamsovu prediktor–korektor metodu, budući da se šema samo neznatno razlikuje od prethodne.

5.9. Adamsova metoda četvrtog reda

Mi govorimo o Adamsovoj prediktor–korektor metodi četvrtog reda, čije su formule već napisane. Već je pokazano: $r_n^* = y_{n-1}(x_n) - y_n^* = \frac{251}{720}y^{(5)}(\xi_n^*)h^5$, $r_n = y_{n-1}(x_n) - y_n = -\frac{19}{720}y^{(5)}(\xi_n)h^5 + O(h^6)$; y_n^* je isto što i y_n^{pred}. Slijedi $y_n^* - y_n = r_n - r_n^* \approx -\frac{19}{720}y^{(5)}(\xi_n)h^5 - \frac{251}{720}y^{(5)}(\xi_n)h^5 = -\frac{270}{720}y^{(5)}(\xi_n)h^5 \approx 14r_n$. Bilo je: eksplicitna Adamsova: $x_{n-4} < \xi_n^* < x_n$, implicitna Adamsova: $x_{n-3} < \xi_n < x_n$, tako da za male h važi $\xi_n^* \approx \xi_n$. Definitivno

$$r_n \approx \frac{1}{14}\Big(y_n^* - y_n\Big),$$

izraz za lokalnu grešku r_n.

5.10. Algoritam zasnovan na diferencnoj metodi

Formula za praktičnu ocjenu greške:

$$R_N = \sum_{n=1}^{N} r_n \exp \int_{x_n}^{x_N} f'_y(x, y(x))dx,$$

gdje je $R_N = y(x_N) - y_N$, r_n su lokalne greške i potreban je izraz za r_n.

Numerička analiza, trinaesto predavanje

9. 5. 2019.

5.11. Milnova metoda (Milne)

Za diferencnu metodu kažemo da nije Adamsovog tipa ako se, prilikom računanja y_{n+1}, ne oslanjamo na y_n, već na y_{n-1} ili slično. Milnova:

$$y_{n+1}^* = y_{n-3} + \frac{4h}{3}\Big(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}\Big), \qquad f_{n+1}^* = f(x_{n+1}, y_{n+1}^*),$$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\Big(f_{n+1}^* + 4f_n + f_{n-1}\Big), \qquad 3 \le n \le N-1.$$

Lokalne greške r_n su reda h^5, greška R_N je reda h^4, praktična procjena: $r_n \approx \frac{1}{29}\Big(y_n^* - y_n\Big)$.

6.1. Metoda konačnih razlika

Fiksirali smo interval $[0, X]$. Fiksirajmo funkcije $p \in C^2[0, X]$, $p(x) \ge 0$, $f \in C^2[0, X]$ i realne brojeve a_0, a_1. Razmotrimo granični problem sa diferencijalnom jednačinom drugog reda:

$$-y'' + p(x)y(x) = f(x), \qquad y(0) = a_0, \qquad y(X) = a_1. \tag{1}$$

Iz teorije običnih diferencijalnih jednačina, poznato je da navedeni granični problem ima jedinstveno rješenje $y(x)$, pri čemu $y \in C^4[0, X]$.

Fiksirajmo $N \ge 2$. Označimo sa y_n približne vrijednosti u čvorovima $x_n = nh$, $0 \le n \le N$ ($h = \frac{X}{N}$). Te približne vrijednosti predstavljaju rješenje diferencnog problema u kome učestvuju konačne razlike drugog reda Δ^2:

$$-\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + p_n y_n = f_n, \qquad y_0 = a_0, \qquad y_N = a_1, \tag{2}$$

$p_n = p(x_n)$, $f_n = f(x_n)$. Sažeto $\ell(y_n) = f_n$ ili $\ell(\mathbf{y}) = \mathbf{f}$, $y_0 = a_0$, $y_N = a_1$.

Oduzimanjem relacija (1) i (2) dobijamo $\ell(R_n) = -r_n$, $1 \le n \le N-1$, $R_0 = R_N = 0$. Sa R_n označena je greška (greška metode): $R_n = y(x_n) - y_n$; $y(x_n)$ od analitičkog rješenja, y_n kompjuter. Sa r_n označena je tzv. greška aproksimacije:

$$r_n = -y''(x_n) + \frac{y(x_{n+1}) - 2y(x_n) + y(x_{n-1})}{h^2} = \frac{1}{12}h^2 y^{(4)}(\xi_n),$$

$x_{n-1} < \xi_n < x_{n+1}$, v. Numeričko diferenciranje. Znači $|r_n| \le \frac{1}{12}h^2 M_4$, $1 \le n \le N-1$, $M_4 = \max_{0 \le x \le X} |y^{(4)}(x)|$. Drugim riječima $\|\mathbf{r}\| \le \frac{1}{12}h^2 M_4$, gdje je $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_{N-1})$, $\|\mathbf{r}\| = \max_{1 \le n \le N-1} |r_n|$.

Pitanje: da li sistem (2) ima jedinstveno rješenje?

Sistem linearnih jednačina (2) sastoji se od $N-1$ jednačina i ima isto toliko nepoznatih $y_1, \ldots, y_{N-1}$. Matrica sistema M_{N-1} je trodijagonalna i npr. za $N = 4$ ona glasi

$$M_3 = \begin{pmatrix} -2-p_1h^2 & 1 & 0 \\ 1 & -2-p_2h^2 & 1 \\ 0 & 1 & -2-p_3h^2 \end{pmatrix}.$$

Posmatranjem homogenog sistema čija je matrica sistema M_{N-1}:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N-1,1} & \cdots & m_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$y_0 = y_N = 0$, broja $|y_k| = \max_{1 \le n \le N-1} |y_n|$ i k–te jednačine zaključujemo da homogeni sistem ima samo trivijalno rješenje. Zaključujemo da je matrica M_{N-1} regularna. Prema tome, sistem (2) ima jedinstveno rješenje. Samo se napominje da za matricu $M_{0,N-1}$ (odgovara slučaju $p_n \equiv 0$) važi $\det M_{0,N} = (-1)^N(N+1)$, što može da bude pokazano njenim razvojem po elementima prve vrste; tako, za determinantu izlazi $d_{n+2} + 2d_{n+1} + d_n = 0$, $d_1 = -2$, $d_2 = 3$. Na primjer, u slučaju $N = 4$:

$$M_{0,3} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ponovimo $\det M_N \neq 0$ ($N = 1, 2, \ldots$). Odgovor: sistem (2) ima jedinstveno rješenje.

Preko dvije leme, dokazuje se da važi uslov stabilnosti $\max_{1 \le n \le N-1} |y_n| \le \beta \max_{1 \le n \le N-1} |f_n|$ (ili svejedno $\|\mathbf{y}\| \le \beta \|\mathbf{f}\|$), tj.

$$\max_{1 \le n \le N-1} |y_n| \le \frac{1}{8} X^2 \max_{1 \le n \le N-1} |f_n|,$$

gdje je $y_0, \ldots, y_N$ ma kakav konačan niz brojeva, $y_0 = y_N = 0$, $p_n \ge 0$, $\ell(y_n) = f_n$, $\ell(y_n) = -\frac{1}{h^2}\Big(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}\Big) + p_n y_n$. Kako postoji konstanta $\beta > 0$, to kažemo da je razmatrana diferencna šema stabilna u odnosu na svoju desnu stranu (u odnosu na slobodan sabirak u sistemu jednačina $\mathbf{f}$).

Definitivno, mi dobijamo da za grešku metode važi $|R_n| \le \frac{1}{8} X^2 \frac{1}{12} M_4 h^2$, znači $|R_n| \le \frac{1}{96} X^2 M_4 h^2$ za $1 \le n \le N-1$ ($R_0 = R_N = 0$). Zato se kaže da razmatrana numerička metoda konvergira, ona ima kvadratni red konvergencije ($\lim_{h \to 0} \|\mathbf{R}\| = 0$, $\|\mathbf{R}\| = O(h^2)$). Ponovimo da $\mathbf{y} = (y_0, \ldots, y_N)$ predstavlja numerički rezultat.

- Već smo vidjeli da je razmatrana diferencna šema stabilna u odnosu na $\mathbf{f}$. Pored toga, ona je stabilna i u odnosu na granične uslove $\mathbf{a} = (a_0, a_1)$. Naime, preko dvije leme, mi smo ustvari dokazali da važi uslov stabilnosti $\|\mathbf{y}\| \le \alpha\|\mathbf{a}\| + \beta\|\mathbf{f}\|$, gdje je $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{8}X^2$ (max–norma), gdje je $y_0, \dots, y_N$ ma kakav konačan niz brojeva. Dalje, oduzimanjem slijedi modifikovani oblik $\|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\| \le \alpha\|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1\| + \beta\|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1\|$, gdje je $\mathbf{y}_i = (y_0^{(i)}, \dots, y_N^{(i)})$, $\mathbf{a}_i = (a_0^{(i)}, a_1^{(i)})$, $\mathbf{f}_i = (f_1^{(i)}, \dots, f_{N-1}^{(i)})$, $\ell(\mathbf{y}_i) = \mathbf{f}_i$, $y_0^{(i)} = a_0^{(i)}$, $y_N^{(i)} = a_1^{(i)}$, $i = 1, 2$. Ova relacija pokazuje da male promjene desne strane $\mathbf{f}$ i graničnih uslova $\mathbf{a} \Rightarrow$ samo male promjene rješenja diferencnog problema $\mathbf{y}$, što možemo zapisati kao $\|\Delta\mathbf{y}\| \le \alpha\|\Delta\mathbf{a}\| + \beta\|\Delta\mathbf{f}\|$.

  Oko oznaka: $\mathbf{v}_1 = (5, 10, 15, 20)$ ili $v_1^{(1)} = 5, \dots, v_4^{(1)} = 20$.

- Ako diferencijalna jednačina glasi $y'' + p(x)y' + q(x)y(x) = f(x)$ onda u diferencnoj šemi imamo relacije

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + p_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + q_n y_n = f_n$$

  $(1 \le n \le N-1)$, što se obrazlaže poznatim limesima

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} = y''(x),$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} = y'(x)$$

  (spec. $x = x_n$).

- Ako granični uslovi imaju oblik $y'(0) = b_0$, $y'(X) = b_1$ onda, u diferencnoj šemi, odgovarajuće relacije glase $\frac{y_1 - y_0}{h} = b_0$, $\frac{y_N - y_{N-1}}{h} = b_1$, budući da je $\lim_{h\to 0} \frac{y(h) - y(0)}{h} = y'(0)$, $\lim_{h\to 0} \frac{y(X) - y(X-h)}{h} = y'(X)$; možemo pisati $h \to +0$.

Metoda konačnih razlika primjenjuje se za rješavanje svih tipova običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina.

NA14 (16.5) Napomena o metodi konačnih elemenata

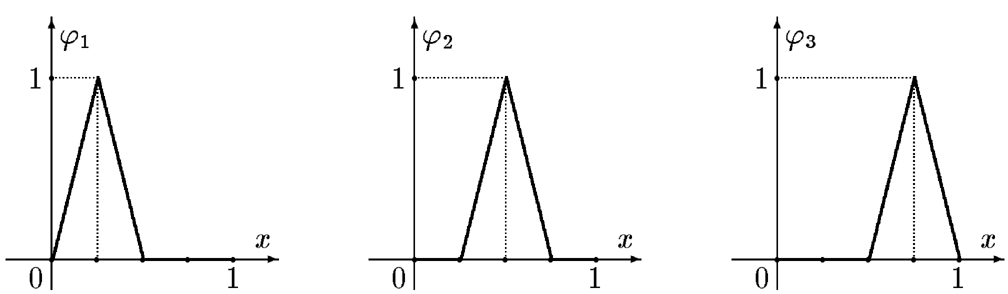
Za numeričko rješavanje graničnog problema $-y'' + p(x)y(x) = f(x)$, $y(0) = y(1) = 0$, gdje su $p(x)$, $f(x)$ date neprekidne funkcije, $p(x) \geq 0$, pored metode konačnih razlika, primjenjuje se i metoda konačnih elemenata. U Lebesgueovom prostoru $L^2(0,1)$, razmotrimo linearni diferencijalni operator $Ay = -y'' + p(x)y(x)$ čiji se domen $\mathcal{D}$ sastoji od funkcija koje zadovoljavaju $y(0) = y(1) = 0$ i $y'' \in L^2(0,1)$. Taj operator je samokonjugovan i pozitivan, $A^* = A > 0$. Tako da se granični problem može formulisati kao $Ay = f$. S druge strane, posmatrajmo nelinearni funkcional $F(y) = \langle Ay, y\rangle - 2\langle f, y\rangle$, $y \in \mathcal{D}$. Želimo da odredimo njegov minimum. Teorema: dva zadatka su ekvivalentna. Drugim riječima, oba zadatka imaju jedinstveno rješenje, s tim da jedna te ista funkcija i predstavlja rješenje GP i realizuje $\min F$.

Kada se izračuna, $F(y) = \int_0^1 \Big(-y''+p(x)y(x)-2f(x)\Big)y(x)dx = \int_0^1 \Big((y'(x))^2 + p(x)y^2(x) - 2f(x)y(x)\Big)dx$, budući da je $y(0) = y(1) = 0$, pomoću parcijalne integracije. Skalarni proizvod u prostoru $L^2(0,1)$: $\langle y_1, y_2\rangle = \int_0^1 y_1(x)y_2(x)dx$.

Ako bismo odredili analitičko rješenje varijacionog zadatka (zadatka o minimumu funkcionala) onda bismo očito imali i analitičko rješenje graničnog problema; traži se minimum po svim funkcijama iz domena. Međutim, ako se ograničimo samo na funkcije iz jednog konačno–dimenzionog potprostora $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ onda ćemo dobiti numeričko rješenje (po Ritzovoj metodi).

Prva mogućnost: potprostor $\mathcal{S}$ sastoji se od funkcija oblika $y = c_1 \sin \pi x + \ldots + c_n \sin n\pi x$ ($c_i \in R$).

Druga mogućnost: potprostor $\mathcal{S}$ sastoji se od funkcija oblika $y = c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$ ($c_i \in R$), gdje su $\varphi_i(x)$ tzv. konačni elementi: ako označimo $x_i = ih$ $(0 \leq i \leq n)$, $h = \frac{1}{n}$ onda: $\varphi_i(x) = \frac{1}{h}(x - x_{i-1})$ za $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, $\varphi_i(x) = \frac{1}{h}(x_{i+1} - x)$ za $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $\varphi_i(x) = 0$ za ostale $x \in [0,1]$. Na slici su prikazani grafici funkcija $y = \varphi_i(x)$ u slučaju $n = 4$:



Drugim riječima, odredite c_i da se ostvari $\min F(y)$, gdje očito $y \in \mathcal{S}$. Algoritam: riješite sistem linearnih jednačina $M\mathbf{c} = \mathbf{b}$ po nepoznatoj $\mathbf{c}$, gdje je $m_{ij} = \langle A\varphi_i, \varphi_j\rangle = \int_0^1 \Big(\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + p(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\Big)dx$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_{n-1})^T$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_{n-1})^T$, $b_i = \langle f, \varphi_i\rangle = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx$; Ritzova metoda u formi MKE. Iz $\frac{\partial F}{\partial c_i} = 0 \Rightarrow M\mathbf{c} = \mathbf{b}$. Odgovor $y^*(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i\varphi_i(x)$.