Grupa, polje

Def. Neka je dat neprazan skup A. Preslikavanje koje svakom uređenom paru (x,y) iz $A \times A$ pridružuje eleme $x * y$ iz A nazivamo unutrašnja binarna operacija u skupu A

$$A \times A \longrightarrow A$$
$$(x,y) \longrightarrow x * y$$

Def. Ako je na skupu A definisana unutrašnja binarna operacija $*$ koja je asocijativna, tada je struktura $(A,*)$ polugrupa.

Def. Struktura $(G,*)$ je grupa ako:

1) $(\forall x,y \in G),\ x*y \in G$ zatvorenost
2) $(\forall x,y,z \in G),\ (x*y)*z = x*(y*z)$ asocijativnost
3) $(\exists e \in G)(\forall x \in G),\ x*e = e*x = x$ neutralni element
4) $(\forall x \in G)(\exists!\, x^{-1} \in G),\ x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$ inverzni element

Primjeri: 1) $(\mathbb{Z},+)$ - grupa
2) $(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot)$ - nije grupa
3) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ - grupa
4) $(\mathbb{Q},+)$ - grupa

Ako važi i:

5) $(\forall x,y \in G)\ x*y = y*x$

tada je struktura $(G,*)$ Abelova grupa

Primjeri 1) $(\mathbb{N},+)$ - nije grupa, nije Abelova grupa
2) $(\mathbb{Z},+)$ - Abelova grupa
3) $(\mathbb{Q},+)$ - Abelova grupa
4) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ Abelova grupa

Def. Struktura $(P,+,\cdot)$ je polje ako važi:

1) $(P,+)$ je Abelova grupa
2) $(P\setminus\{0\},\cdot)$ je Abelova grupa
3) a) $(\forall x,y,z \in P)\ x\cdot(y+z) = xy + xz$
b) $(\forall x,y,z \in P)\ (x+y)\cdot z = xz + yz$

* Vektorski prostori *

Def. Neka je V zadat neprazni skup i struktura $(K,+,\cdot)$ zadano polje. Kažemo da je V linearni ili vektorski prostor na polje K, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1) u V je definisana operacija „+" tako da je $(V,+)$ Abelova grupa

2) Zadata je operacija „$\cdot$" $: K \times V \to V$ koja ima sledeć
$(\lambda, x) \to \lambda \cdot x$ svojstva:

* $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
  $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall x \in V$ → ⌈$K,+,\cdot$; množenje dva skalara⌋
* $(\alpha + \beta) x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$; $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall x \in V$
* $\alpha \cdot (x + y) = \alpha x + \alpha y$ $\forall \alpha \in K$, $\forall x, y \in V$
  → ⌈$K \times V$ - množenje vektora skalarom⌋
* $1 \cdot x = x$, $1 \in K$, $\forall x \in V$

Primjeri: 1) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ polje $\mathbb{R}$
2) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ polje $\mathbb{Q}$
3) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ polje $\mathbb{C}$

Zadatak 1. Neka je $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \quad i = \overline{1,n}\}$ gdje je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva i neka su definisane sledeće operacije:

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$x \oplus y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

Ispitati da li je $\mathbb{R}^n$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$

I Pokažimo da je $(\mathbb{R}^n, +)$ Abelova grupa

$(x, y) \in \mathbb{R}^n$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

$x \oplus y = (\underbrace{x_1 + y_1}_{\in \mathbb{R}}, \dots, \underbrace{x_n + y_n}_{\in \mathbb{R}}) \in \mathbb{R}^n$

2) $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

$z = (z_1, \dots, z_n)$

$$(x \oplus y) \oplus z = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \oplus (z_1, \dots, z_n)$$
$$= ((x_1 + y_1) + z_1, \dots, (x_n + y_n) + z_n)$$
$$= (x_1 + (y_1 + z_1), \dots, x_n + (y_n + z_n))$$
$$= (x_1, \dots, x_n) \oplus (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) = x \oplus (y \oplus z)$$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

3) Neka je x proizvoljan element

Tražimo $e=(e_1,\dots,e_n)\in R^n$ tako da je $x\oplus e=e\oplus x=x$

$x\oplus e=x$

$(x_1+e_1,\dots,x_n+e_n)=(x_1,\dots,x_n)$

$$\left.\begin{aligned} x_1+e_1&=x_1\\ x_n+e_n&=x_n\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} e_1&=0\\ e_n&=0\end{aligned}$$

$e=(0,\dots,0)$

Provjerimo da li je $e\oplus x=x$

$(0+x_1,\dots,0+x_n)=(x_1,\dots,x_n)$

$(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_n)$

Neutralni element u odnosu na operaciju $\oplus$ je $e=(0,\dots,0)$

4) Neka je $x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$

Proizvoljno tražimo $y=(y_1,\dots,y_n)$ tako da važi

$x\oplus y=y\oplus x=e$

$x\oplus y=e$

$(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)=(0,\dots,0)$

$$\left.\begin{aligned} x_1+y_1&=0\\ x_n+y_n&=0\end{aligned}\right\} \begin{aligned} y_1&=-x_1\\ y_n&=-x_n\end{aligned}$$

$y=(-x_1,\dots,-x_n)$

Provjerimo da li važi

$y\oplus x=e$

$((-x_1)+x_1,\dots,(-x_n)+x_n)=(0,\dots,0)$

$(0,\dots,0)=(0,\dots,0)$

Inverzni element elementa $x=(x_1,\dots,x_n)$ je element

$x^{-1}=(-x_1,\dots,-x_n)$

5) $x,y\in R^n$

$x=(x_1,\dots,x_n)$

$y=(y_1,\dots,y_n)$

$x\oplus y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)=(y_1+x_1,\dots,y_n+x_n)=y\oplus x$

Iz 1) 2) 3) 4) 5) $\Rightarrow$ da je $(R^n,+)$ Abelova grupa

$R^n=\{(x_1,\dots,x_n)\mid x_i\in R\}$

$R^2=\{(x_1,x_2)\mid x_1,x_2\in R\}$

$R^3=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1,x_2,x_3\in R\}$

$R^2=R\times R$

$R^3=R\times R\times R$

$R^n=R\times R\times\dots\times R^n$

II $\lambda\in R$ $\quad x\in(x_1,\dots,x_n)\in R^n$ $\quad \lambda\odot x=(\underbrace{\lambda\cdot x_1}_{\in R},\dots,\underbrace{\lambda\cdot x_n}_{\in R})$ $\quad \odot: R\times R^n\to R^n$ dobro def.

1) $\alpha\cdot(\beta\cdot x)=\alpha\cdot(\beta\cdot x_1,\dots,\beta x_n)=(\alpha\cdot(\beta\cdot x_1),\dots\alpha\cdot(\beta\cdot x_n))$
$=((\alpha\cdot\beta)\cdot x_1,\dots(\alpha\cdot\beta)\cdot x_n)=(\alpha\beta)\cdot x,\ (\forall\alpha,\beta\in R)(\forall x\in R^n)$

2) $(\alpha+\beta)\cdot x=((\alpha+\beta)x_1,\dots,(\alpha+\beta)x_n)$
$=(\alpha x_1+\beta x_1,\dots,\alpha x_n+\beta x_n)=(\alpha x_1,\dots\alpha x_n)\oplus(\beta x_1,\dots,\beta x_n)$

3) $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)=(\alpha\cdot(x_1+y_1),\dots,\alpha\cdot(x_n+y_n))$
$=(\alpha x_1+\alpha y_1,\dots,\alpha x_n+\alpha y_n)=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)\oplus(\alpha y_1,\dots,\alpha y_n)$
$\alpha\odot x\oplus\alpha\odot y,\ \forall\alpha\in R,\ \forall x,y\in R^n$

4) $1\odot x=(1\cdot x_1,\dots,1\cdot x_n)=(x_1,\dots,x_n)=x$
$\forall x\in R^n$

iz I i $\underline{\text{II}}$ $\Rightarrow$ da je R^n vektorski prostor nad poljem R u odnosu na operacije $\oplus$ i $\odot$

<u>zadatak 2.</u> Neka je $R^2=\{(x_1,x_2)\mid x_1,x_2\in R\}$ R-skup realnih brojeva

$x=(x_1,x_2)$ $\quad x\oplus y=(x_1+y_1,x_2+y_2)$
$y=(y_1,y_2)$ $\quad \lambda\cdot x=(\lambda x_1,x_2)$
$\lambda\in R$

Ispitati da li je R^2 vektorski prostor nad poljem u odnosu na operacije $+$ i $\cdot$

I $(R^2,+)$ je Abelova grupa
1) $\oplus$ je unutrašnja operacija u R^2
2) $\oplus$ je asocijativna
3) inverzni element za $x=(x_1,x_2)$ je $x^{-1}=(-x_1,-x_2)$
4) neutralni element $e=(0,\dots,0)$
5) $\oplus$ je komutativna operacija

$\underline{\text{II}}$ $\lambda\in R$
$x=(x_1,x_2)\in R^2$
$\lambda\cdot x=(\underbrace{\lambda x_1}_{\in R},\underbrace{x_2}_{\in R})\in R^2$ $\odot$ je dobro definisana

$\alpha\in R,\ x\in(x_1,x_2)\in R$

$$\alpha\cdot(\beta\cdot x)=\alpha\cdot(\beta x_1,x_2)=(\alpha\cdot(\beta x_1,x_2)=((\alpha\cdot\beta)x_1,x_2)=(\alpha\cdot\beta)\cdot x$$

1) $\alpha\cdot(\beta\cdot x)=\alpha\cdot(\beta x_1,x_2)=(\alpha\cdot(\beta x_1,x_2)$

2) $\alpha,\beta\in R$

$x=(x_1,x_2)\in R^2$

$(\alpha+\beta)\cdot x=((\alpha+\beta)x_1,x_2)=(\alpha x_1+\beta x_1,x_2)$

$\alpha\odot x+\beta\odot x=(\alpha x_1,x_2)+(\beta x_1,x_2)=(\alpha x_1+\beta x_1,2x_2)$

$\alpha\odot x+\beta\odot x=(\alpha x_1,x_2)+(\beta x_1,x_2)\neq(\alpha x_1+\beta x_1,2x_2)$

Kako je u opštem slučaju $(\alpha x_1+\beta x_1,x_2)\neq(\alpha x_1+\beta x_1,2x_2)$ ovo važi samo kada je $x_2=0$.

To je $\alpha+\beta\odot x_2\neq\alpha\cdot x\oplus\beta\cdot x$ u opštem slučaju. Slijedi da R^2 nije vektorski prostor nad poljem R u odnosu na ovako definisane operacije $\oplus$ i $\odot$: $x\oplus y=(x_1+y_1,x_2+y_2)$

$\lambda\cdot x=(\lambda x_1,\lambda x_2)$

R^2, R

1. Ispitati da li je $V=\{f \mid f:R\to R\}$ vektorski prostor nad poljem R u odnosu na operacije $+$ i $\cdot$.

$(f\oplus g)(x)=f(x)+g(x),\ \forall x\in R$

$(\alpha\odot f)(x)=\alpha\cdot f(x)$

I 1) $f,g\in V$

$(f\oplus g)(x)=\underset{\in R}{f(x)}+\underset{\in R}{g(x)}\in R,\ \forall x\in R$. Zaključujemo da je $f\oplus g$ realna f-ja, tj. pripada V. Operacija $\oplus$ je unutrašnja binarna operacija u skupu V

2) $f,g,h\in V$

$((f\oplus g)\oplus h)(x)=(f\oplus g)(x)+h(x)=(f(x)+g(x))+h(x)$

$=f(x)+(g(x)+h(x))=f(x)+(g\oplus h)(x)=(f+(g\oplus h))(x),\ \forall x\in R$

$\Rightarrow(f\oplus g)\oplus h=f\oplus(g\oplus h)$ $\oplus$ je asocijativna operacija

3) Neutralni element u odnosu na operaciju $\oplus$ je f_0, $f_0(x)=0$, $\forall x\in R$

Neka je f iz V proizvoljno

$(f\oplus f_0)(x)=f(x)+f_0(x)=f_0(x)+f(x)=(f_0\oplus f)(x),\ \forall x\in R$

$\Rightarrow f \oplus f_0 = f_0 \oplus f$

$(f_0 \oplus f)(x) = f_0(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x)$

$f_0 \oplus f = f$

4) Inverzni element f-je f iz V je funkcija $f^{-1} = -f$, $(-f)(x) = -f(x)$

$(f \oplus f^{-1})(x) = f(x) + f^{-1}(x) = f(x) + (-f(x)) = 0 = f_0$

$f \oplus f^{-1} = f_0$

$(f^{-1} \oplus f)(x) = f^{-1}(x) \oplus f(x) = (-f(x)) + f(x) = 0$

$f^{-1} \oplus f = f_0$

5) $f, g \in V$

$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g \oplus f)(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$f \oplus g = g \oplus f$ $\quad \oplus$ je komutativna operacija

Iz 1) 2) 3) 4) 5) zaključujemo da je $(V, \oplus)$ Abelova grupa

II $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad (\lambda \odot f)(x) = \underset{\in \mathbb{R}}{\lambda} \cdot \underset{\in \mathbb{R}}{f(x)} \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda \odot f \in V$

$f \in V$

1) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$f \in V$

$(\alpha \odot (\beta \odot f))(x) = \alpha \cdot ((\beta \odot f)(x)) = \alpha \cdot (\beta \cdot f(x)) = (\alpha \cdot \beta) \cdot f(x) =$

$((\alpha \cdot \beta) \odot f)(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$\alpha \odot (\beta \odot f) = (\alpha \cdot \beta) \odot f$

2) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$f \in V$

$((\alpha + \beta) \odot f)(x) = (\alpha + \beta) \cdot f(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(x) = (\alpha \odot f)(x) +$

$(\beta \odot f)(x) = (\alpha \odot f + \beta \odot f)(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha + \beta) \odot f = \alpha \odot f \oplus \beta \odot f$

3) $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad f, g \in V$

$(\alpha \odot (f \oplus g))(x) = \alpha \cdot ((f \oplus g)(x)) = \alpha \cdot (f(x) + g(x)) = \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot g(x)$

$= (\alpha \odot f)(x) + (\alpha \odot g)(x) = (\alpha \odot f \oplus \alpha \odot g)(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \odot (f \oplus g) =$

$\alpha \odot f \oplus \alpha \odot g$

4) $1 \in \mathbb{R}, f \in V$

$(1 \odot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 \odot f = f$

Iz I i II slijedi da je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ u odnosu na operacije $\oplus$ i $\odot$

* Vektorski potprostori *

Def. Neka je V vektorski prostor nad poljem P. Skup $V_1 \subseteq V$ je potprostor vektorskog prostora V ako je vektorski prostor nad istim poljem P i u odnosu na iste operacije.

Teorema: Skup V_1 je potprostor vektorskog prostora V nad poljem P ako: 1) $(\forall x, y \in V_1)\ x+y \in V_1$
2) $(\forall \lambda \in P) \land (\forall x \in V_1),\ \lambda \cdot x \in V_1$ $\Rightarrow (\alpha x + \beta y \in V_1,\ \forall \alpha, \beta \in P\ \forall x, y \in V_1)$

Def. Neka su $L_1 \dots L_n$ potprostori vektorskog prostora V nad poljem P. Suma potprostora $L_1, \dots, L_n$ je skup $L = L_1 + \dots + L_n = \{x_1 + \dots + x_n \mid x_i \in L_i\ i \in \overline{1,n}\}$ L je potprostor; L je najmanji potprostor koji sadrži sve potprostore $L_1, \dots, L_n$. $L_i \subseteq L, \forall i \in \overline{1,n}$

Def. Suma $L = L_1 + \dots + L_n$ potprostora $L_1 \dots L_n$ vektorskog prostora V nad poljem P je direktna ako se svaki vektor iz L može na jedinstven način razložiti na sumu elemenata iz $L_1 \dots L_n$.

Oznaka $L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \dots \dot{+} L_n$

Teorema: Suma L je direktna ako i samo ako $L_1 \cap L_2 = \{0\}$

1. Dat je skup $L = \{f \mid f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \land f(0) = 0\}$. Ispitati da li je L potprostor prostora realnih funkcija nad poljem $\mathbb{R}$.

1) $f, g \in L$

a) $(f+g)(x) = \underset{\in \mathbb{R}}{f(x)} + \underset{\in \mathbb{R}}{g(x)} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}$ $f+g$ jeste realna funkcija

Iz a i b slijedi da $f+g \in L$

b) $(f+g)(0) = \underset{\in L}{f(0)} + \underset{\in L}{g(0)} = 0 + 0 = 0$

2) $\alpha \in \mathbb{R}, f \in L$

$(\alpha \cdot f)(x) = \underset{\in \mathbb{R}}{\alpha} \cdot \underset{\in \mathbb{R}}{f(x)} \in \mathbb{R}$ $\alpha \cdot f$ jeste realna funkcija

b) $(\alpha \cdot f)(0) = \alpha \cdot f(0) = \alpha \cdot 0 = 0$ iz a i b slijedi da $\alpha \cdot f \in L$

2. Ispitati da li su sledeći skupovi potprostori prostora $\mathbb{R}^3$

nad poljem $\mathbb{R}$.

a) $K=\{(x,y,z) \mid x+y+z=0,\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$

1) $x=(x_1,x_2,x_3)\in K$

$y=(y_1,y_2,y_3)\in K$

$x+y=(\underset{\in\mathbb{R}}{x_1+y_1},\ \underset{\in\mathbb{R}}{x_2+y_2},\ \underset{\in\mathbb{R}}{x_3+y_3})\in\mathbb{R}^3$

$x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+y_3=\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{0}+\underbrace{y_1+y_2+y_3}_{0}=0+0=0$

$x+y\in K$

2) $\alpha\in\mathbb{R}$

$x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$

$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)\in\mathbb{R}^3$

$\alpha x_1+\alpha x_2+\alpha x_3=\alpha(x_1+x_2+x_3)=\alpha\cdot 0=0$

$\alpha\cdot x\in K$

Iz 1) i 2) slijedi da je K potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ nad poljem $\mathbb{R}$

b) $L=\{(x,y,z) \mid x+y+z=1,\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$

1) $x=(x_1,x_2,x_3)\in L$

$y=(y_1,y_2,y_3)\in L$

$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)\in\mathbb{R}^3$

$x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+y_3=1+1+1=3\Rightarrow x+y\notin L$

2) Uočimo da $(0,0,0)\notin L$

3. Dat je skup $L=\{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\wedge 3f(0)=2f(1)\}$. Ispitati da li je L potprostor prostora realnih funkcija nad poljem $\mathbb{R}$.

1) $f,g\in L$

a) $(f+g)(x)=\underset{\in\mathbb{R}}{f(x)}+\underset{\in\mathbb{R}}{g(x)}\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f+g$ jeste realna f-ja.

b) $(3(f+g))(0)=3\cdot((f+g)(0))=3\cdot(f(0)+g(0))=3\cdot f(0)+3\cdot g(0)$

$=2\cdot f(1)+2\cdot g(1)=2\cdot(f(1)+g(1))=2\cdot((f+g)(1))$

$=(2\cdot(f+g))(1)$ $\quad$ Iz a i b $\Rightarrow f+g\in L$

2) $\alpha\in\mathbb{R},\ f\in L$

a) $(\alpha\cdot f)(x)=\underset{\in\mathbb{R}}{\alpha}\cdot \underset{\in\mathbb{R}}{f(x)}\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}$ $\quad \alpha\cdot f$ je realna funkcija

b) $(3(\alpha\cdot f))(0)=3\cdot((\alpha\cdot f)(0))=3\cdot(\alpha\cdot f(0))=\alpha\cdot(3f(0))=\alpha\cdot(2f(1))$

$=2(\alpha(f(1))=2\cdot((\alpha\cdot f)(1))=$ $\quad$ iz a i b $\Rightarrow \alpha\cdot f$ pripada L

Iz 1) i 2) $\Rightarrow$ da je L potprostor prostora realnih funkcija nad poljem $\mathbb{R}$