* Linearne kombinacije, linearna zavisnost i nezavisnost vektora *

$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$ vektor $x$ je linearna kombinacija vektora $x_1, \dots, x_k$

$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_k) = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in P\}$ linearni omotač nad $x_1, \dots, x_k$

Def. Sistem vektora $x_1 \dots x_k$ vektorskog prostora $V$ nad poljem $P$ je linearno nezavisan ako važi:

$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0^{\text{nula vektor}} \rightarrow \alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = 0 \dots \wedge \alpha_k = 0$

Def. Sistem vektora $x_1 \dots x_k$ vektorskog prostora $V$ nad poljem $P$ je linearno zavisan ako postoje skalari $\alpha_1 \dots \alpha_k \in P$ takav da je:

$\alpha_1 x_1 + \dots \alpha_k x_k = 0$ $\alpha_i \neq 0$, za bar jedno $i \in \{1 \dots k\}$

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$

$x_3 = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} x_2$

Sistem je linearno zavisan ako se neki od vektora $x_1 \dots x_k$ može predstaviti linearnim kombinacijama prethodnih

Sistem koji sadrži nula vektor je linearno zavisan.

1. Ispitati linearnu nezavisnost vektora:

a) $x = (1,2,0)$ $y = (0,1,-1)$ $z = (2,0,1)$

Neka je $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ tada je

$(\alpha, 2\alpha, 0) + (0, \beta, -\beta) + (2\gamma, 0, \gamma) = (0,0,0)$

$(\alpha + 2\gamma, 2\alpha + \beta, -\beta + \gamma) = (0,0,0) \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \alpha + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \wedge \gamma = 0$

Pokazali smo da važi da $\alpha x + \beta y + \gamma z \Rightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \wedge \gamma = 0$, a to po definiciji znači da je sistem $x, y, z$ linearno nezavisan

b) $x = (1,2,3)$ $y = (1,0,-1)$ $z = (0,2,4)$

Neka je $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, tada je

$(\alpha+\beta, 2\alpha+2\gamma, 2\alpha+(-\beta)+4\gamma)=(0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ 2\alpha+2\gamma=0 \\ 2\alpha-\beta+4\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \beta=-\alpha \\ \gamma=-\alpha \\ 3\alpha+\alpha-4\alpha=0 \end{matrix} \quad 0=0$$

Rešenje sistema je $(\alpha, -\alpha, -\alpha), \alpha \in R$

Sistem je saglasan i neodređen

Za $\alpha=1$ dobijamo

$\beta=-\alpha \quad \gamma=-1$ i važi

$1\cdot x-1\cdot y-1\cdot z=0 \Rightarrow$ sistem $x, y, z$ linearno zavistan

2. Neka su vektori $u, v, w$ linearno nezavisni. Dokazati da je i sistem $u+v, u-v, u-2v+w$ linearno nezavisan.

Neka je $\alpha(u+v)+\beta(u-v)+\gamma(u-2v+w)=0$

1) $(\alpha+\beta+\gamma)\cdot u+(\alpha-\beta-2\gamma)v+\gamma\cdot w=0$

Kako su vektori $u, v, w$ linearno nezavisni, to iz 1) slijedi da je $\alpha+\beta+\gamma=0 \quad \alpha-\beta-2\gamma=0 \quad \gamma=0$

$\alpha+\beta=0 \quad 2\alpha=0$

$\alpha-\beta=0 \quad \beta=0$

Pokazali smo da važi $\alpha\cdot(u+v)+\beta(u-v)+\gamma(u-2v+w)=0 \Rightarrow \alpha=0 \wedge \beta=0 \wedge \gamma=0$ a to po definiciji znači da je sistem $u+v, u-v, u-2v+w$ linearno nezavisan.

3. Ispitati linearnu nezavisnost sistema kojeg čine f-je $f_1, f_2, f_3$ gdje je $f_1(x)\equiv 2$, $f_2(x)=\sin x$ $f_3(x)=\cos x$

Neka je $\alpha\cdot f_1+\beta\cdot f_2+\gamma\cdot f_3=0$, tada je $(\alpha\cdot f_1+\beta\cdot f_2+\gamma\cdot f_3)(x)=0$, $\forall x$ iz $R$ $\quad \alpha\cdot f_1(x)+\beta\cdot f_2(x)+\gamma\cdot f_3(x)=0 \quad \forall x\in R$

Za $x=0$ $\quad 2\alpha+\beta\cdot 0+\gamma\cdot 1=0 \qquad 2\alpha+\gamma=0 \qquad 4\alpha=0$

Za $x=\frac{\pi}{2}$ $\quad 2\alpha+\beta\cdot 1+\gamma\cdot 0=0 \qquad 2\alpha+\beta=0 \qquad \alpha=0$

Za $x=\pi$ $\quad 2\alpha+\beta\cdot 0+\gamma\cdot(-1)=0 \qquad 2\alpha-\gamma=0 \qquad \beta=0, \gamma=0$

Dakle, pokazali smo da važi $\alpha\cdot f_1+\beta\cdot f_2+\gamma\cdot f_3 \Rightarrow f_1=0, f_2=0, f_3=0$, a to po definiciji znači da je sistem $f_1, f_2, f_3$ linearno nezavisan.

4. Dat je sistem vektora $x_1, \dots, x_n$. Dokazati da:

a) Ako su neki od vektora $x_1, \dots, x_n$ linearno zavisni, tada je i čitav sistem linearno zavisan

Neka je $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3} \dots x_{i_k}$ linearno zavisan podsistem sistema $x_1, \dots, x_n$. Znači da postoje skalari $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ takvi da je $\alpha_{i_1} \cdot x_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k} \cdot x_{i_k} = 0$ i bar jedno $\alpha_{i_j} \neq 0$ $j \in \{1 \dots k\}$

Tako važi i $0 \cdot x_1 + \dots + \alpha_{i_1} x_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k} \cdot x_{i_k} + \dots + 0 \cdot x_n = 0$, $\alpha_{i_j} \neq 0$ za bar jedno $j \in \{1 \dots k\}$. Odavde slijedi da je sistem $x_1 \dots x_n$ linearno zavisan.

b) Neka je sistem $x_1 \dots x_n$ linearno nezavisan. Pretpostavimo da postoji njegov podsistem $x_{i1} \dots x_{ik}$ koji je linearno zavisan. Na osnovu dokazanog pod a $\Rightarrow$ da je i cijeli sistem $x_1, \dots, x_n$ linearno zavisan, a to nije tačno. Pretpostavka nije bila tačna. Ostaje da je svaki podsistem ovog sistema takođe linearno nezavisan.

1. Dokazati da je sistem vektora $e_1, \dots, e_n$ linearno zavisan akko $e_1 = 0$ ili se neki od vektora $e_k (k \geq 2)$ može zapisati kao linearna kombinacija vektora $e_1 \dots e_{k-1}$.

R: $\Leftarrow$ Neka je $e_1 = \vec{0}$ ili se neki od vektora $e_k (k \geq 2)$ može predstaviti kao linearna kombinacija prethodnih

Ako je $e_1 = 0$ sistem $e_1 \dots e_n$ je linearno zavisan

Ako je $e_k = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{k-1} e_{k-1}$ tada je

$e_k = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{k-1} e_{k-1} + 0 e_{k+1} + \dots + 0 \cdot e_n$

Vektor $e_k$ predstavili smo kao linearnu kombinaciju svih ostalih vektora sistema pa zaključujemo da je sistem $e_1 \dots e_n$ linearno zavisan.

$\Rightarrow$ Neka je sistem $e_1 \dots e_n$ linearno zavisan. Ako je $e_1 = 0$, dokaz u ovom smjeru je završen

Ako je $e_1 \neq 0$ moramo dokazati da je neki od vektora linearna kombinacija prethodnika. Kako je sistem $e_1 \dots e_n$ linearno zavisan, to postoje skalari $\alpha_1 \dots \alpha_n$ takvi da je:

$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$ * $\alpha_i \neq 0$ $i = \overline{1, n}$

Neka je $\alpha_k$ posljednji skalar različit od nule:

$\alpha_k \neq 0$, $\alpha_j = 0$, $j = \overline{k+1, n}$

Pokažimo da je $k > 1$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $k = 1$. To bi da znači da je $\alpha_1 \neq 0$ $\alpha_j = 0$ $j = \overline{2, n}$

Iz * tada slijedi da je $\alpha_1 e_1 = 0$ što nije moguće. Dakle, pretpostavka da je $k = 1$ nije bila dobra. Ostaje da je $k > 1$, odn. $k \geq 2$.

Iz * slijedi $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = 0$. Odavde slijedi $e_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} e_1 - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} e_{k-1}$

2. Dat je vektorski prostor $\mathbb{R}$ nad poljem $\mathbb{Q}$. Dokazati da su vektori $1, \sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ linearno nezavisni

Neka je $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot \sqrt{2} + \gamma \cdot \sqrt{3} = 0$. * $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$

Tada je $\alpha + \beta\sqrt{2} = \gamma\sqrt{3} /^2$

$\alpha^2 + 2\beta\alpha\sqrt{2} + 2\beta^2 = 3\gamma^2$

$\underbrace{2\alpha\beta}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{2} = \underbrace{3\gamma^2 - \alpha^2 - 2\beta^2}_{\in \mathbb{Q}} \Rightarrow$

$\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \lor \beta = 0$

Pretpostavimo da je $\alpha = 0$

Pretpostavimo da je $\beta \neq 0$. Iz * slijedi $\beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$, $\beta\sqrt{2} = \ldots$

$\underbrace{-\frac{\gamma}{\beta}}_{\in \mathbb{Q}} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}_{\in \mathbb{I}}$, što nije moguće. To znači da je Pretpostavka $\beta \neq 0$ loša. Ostaje da je $\beta = 0$. Iz * slijedi

$\gamma \cdot \sqrt{3} = 0$, $\gamma = 0$

3. U vektorskom prostoru uređenih trojki kompleksnih brojeva nad poljem racionalnih brojeva, ispitati linearnu zavisnost sistema vektora:

$a = (1+3i, 5+i, 3-2i)$ $b = (2-i, -4+2i, -1+3i)$ $c = (i, 2, 1-i)$

$z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

$\mathbb{C}^3 = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\}$

Neka je $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0 \in \mathbb{C}^3$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$

$\alpha \cdot (1+3i, 5+i, 3-2i) + \beta(2-i, -4+2i, -1+3i) + \gamma(i, 2, 1-i) = (0,0,0)$

$(\alpha(1+3i) + \beta\cdot(2-i) + \gamma i, \alpha\cdot(5+i) + \beta\cdot(-4+2i) + 2\gamma, \alpha(3-2i) + \beta(-1+3i) + \gamma(1-i)) = (0,0,0)$

$(\alpha + 2\beta + (3\alpha - \beta + \gamma)i, 5\alpha - 4\beta + 2\gamma + (\alpha + 2\beta)i, 3\alpha - \beta + \gamma + (-2\alpha + 3\beta - \gamma)i) = (0,0,0)$

$\alpha + 2\beta + (3\alpha - \beta + \gamma) \cdot i = 0$ $a + bi = c + di$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$5\alpha - 4\beta + 2\gamma + (\alpha + 2\beta)i = 0$ $a = c \land b = d$

$3\alpha - \beta + \gamma + (-2\alpha + 3\beta - \gamma)i = 0$

$\alpha + 2\beta = 0$

$3\alpha - \beta + \gamma = 0$

$5\alpha - 4\beta + 2\gamma = 0$

$\alpha + 2\beta = 0$

$3\alpha - \beta + \gamma = 0$

$-2\alpha + 3\beta - \gamma = 0$

$\alpha + 2\beta = 0$ $\cdot(-3)$ $\cdot(-5)$ $\cdot 2$

$3\alpha - \beta + \gamma = 0$

$5\alpha - 4\beta + 2\gamma = 0$

$-2\alpha + 3\beta - \gamma = 0$

$\alpha + 2\beta = 0$

$-7\beta + \gamma = 0$

$14\beta + 2\gamma = 0$

$7\beta - \gamma = 0$

$\gamma = 7\beta$

$\beta$-slobodna nepoznata

Opšte rešenje sistema je $(-2\beta, \beta, 7\beta)$, ...

Npr. za $\beta = 1$, $\alpha_1 = -2$, $\gamma = 7$

Dakle, sistem nema samo trivijalno rešenje, ... ima netrivijalno rešenja $-2a+b+7d=0$ $\Rightarrow$ Vektori su linearno zavisni

4. U vektorskom prostoru uređenih trojki kompleksnih brojeva nad poljem: a) realnih brojeva b) kompleksnih brojeva. Ispitati linearnu zavisnost sistema vektora $a=(3-2i, i, 1+i)$, $b=(1,-i,1-i)$, $c=(4-i,1,3+i)$

Neka je $\alpha a+\beta b+\gamma c=0$

$(3\alpha-2\alpha i, \alpha i, \alpha+\alpha i)+(\beta,-\beta i,\beta-\beta i)+(4\gamma-\gamma i,\gamma,3\gamma+\gamma i)=(0,0,0)$

$(3\alpha-2\alpha+\beta+4\gamma-\gamma i, \alpha i-\beta i+\gamma, \alpha+\alpha i+\beta-\beta i+3\gamma+\gamma i)=(0,0,0)$

$(3-2i)\alpha+\beta+(4-i)\gamma=0$

$\alpha-\beta i+\gamma=0$

$(1+i)\alpha+(1-i)\beta+(3+i)\gamma=0$

$$\begin{pmatrix} 3+2i & 1 & 4-i \\ i & -i & 1 \\ 1+i & 1-i & 3+i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ 3-2i & 1 & 4-i \\ 1+i & 1-i & 3+i \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \gamma & \beta & \alpha \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 4-i & 1 & 3-2i \\ 3+i & 1-i & 1+i \end{pmatrix} \end{array}$$

* prvi sistem množimo sa $i-4$ i dodajemo drugom i sa $-(3+i)$ i dodajemo trećem.

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 0 & 2+4i & 2-6i \\ 0 & 2i & 2-2i \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{2} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 0 & 1+2i & 1-3i \\ 0 & i & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 0 & i & 1-i \\ 0 & 1+2i & 1-3i \end{pmatrix} \cdot(i-2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ 0 & i & 1-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$i\cdot z=-(1+2i)$

$z=-\frac{1+2i}{i}\cdot\frac{i}{i}=-\frac{i+2\cdot(-1)}{-1}=-\frac{i-2}{-1}=i-2$

$\gamma-i\beta+i\cdot\alpha=0$

$i\cdot\beta+(1-i)\alpha=0$

Sistem ima rešenje

$\gamma-i\beta+i\cdot\alpha=0$

$\gamma+\alpha=0$

$\gamma=-\alpha$

$\beta=\frac{i-1}{i}\cdot\alpha$

$-\alpha-i\beta+i\alpha=0$

$\beta=\frac{i-1}{i}\cdot\frac{i}{i}\cdot\alpha=(1+i)\alpha$

$(-1+i)\alpha=i\cdot\beta$

$\gamma=-\alpha$

$\beta=(1+i)\alpha$

a) Ako su $\alpha, \beta$ i $\gamma \in R$. Tada $\beta = (1+i)\alpha \Rightarrow \beta = 0 \wedge \alpha = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

Sistem vektora je linearno nezavisan

b) Ako su $\alpha, \beta, \gamma \in C$. Sistem jednačina ima netrivijalna rešenja npr. $\alpha = 1$ $\beta = 1+i$ $\gamma = -1$

$1 \cdot a + (1+i) \cdot b - 1 \cdot c = 0$ - sistem vektora je linearno zavisan

$z = a + bi$ $\bar{z} = a - bi$ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $|z|^2 = a^2 + b^2$

Def. Sistem vektora $x_1 \dots x_k$ iz $R^n$ je Gausov ili trapezni ako ima osobinu da za svako $i = \overline{1, k-1}$ ako je $s$-ta koordinata vektora $x_i$ prva njegova nenulta koordinata, tada prvih $s$ koordinata sledećeg vektora $x_{i+1}$ su nule.

* Dokazuje se da je trapezni sistem nenultih vektora linearno nezavisan

primjeri: $(1,-2,0,3,7)$ $(2,1,7,3,4)$

$(0,4,-3,6,1)$ $(0,0,2,1,5)$

$(0,0,2,5,9)$ $(0,0,0,0,1)$

Elementarne transformacije sistema vektora $x_1 \dots x_n$ su:

1) zamjena mjesta dva vektora u sistemu

$x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_n$ $x_1 \dots x_j \dots x_i \dots x_n$

2) množenje vektora skalarom različitim od nule

$x_1, \dots x_i, \dots x_j \dots x_n$ $x_1, \dots \alpha \cdot x_i, \dots x_j \dots x_n$

3) množenje vektora skalarom i dodavanje drugom vektoru:

$x_1 \dots x_i, \dots x_j \dots x_n$ $x_1 \dots x_i, \dots x_j + \alpha \cdot x_i, \dots x_n$

Elementarnim transformacijama ne mijenjamo linearnu (ne) zavisnost sistema

Def. Sistemi $X = \{x_1 \dots x_n\}$ i $Y = \{y_1 \dots y_n\}$ su ekvivalentni ako se svaki vektor jednog sistema može izraziti kao linearna kombinacija vektora drugog sistema

* Sistemi koji se dobijaju jedan od drugog elementarnim transformacijama su ekvivalentni

5. Dokazati da su sistemi $X=\{x_1 \dots x_n\}$ i $Y=\{y_1 \dots y_m\}$ ekvivalentni ako i samo ako je $\mathcal{L}in(x_1 \dots x_n) = \mathcal{L}in(y_1 \dots y_m)$

$\Rightarrow$ Neka su sistemi $X$ i $Y$ ekvivalentni

1° Neka je $x \in \mathcal{L}(x_1 \dots x_n)$ proizvoljno

$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ Svaki od vektora $x_1 \dots x_n$ možemo izraziti kao linearnu kombinaciju vektora iz $Y$, a to znači da i vektor $x$ možemo izraziti kao linearnu kombinaciju vektora iz $Y$, tj. zaključujemo da $x \in \mathcal{L}(y_1 \dots y_n)$. Pokazali smo da $(\forall x \in \mathcal{L}(x_1 \dots x_n))$ $x \in \mathcal{L}(y_1 \dots y_m)$ a to znači da je $\mathcal{L}(x_1 \dots x_n) \subseteq \mathcal{L}(y_1 \dots y_m)$

2° Slično, zaključujemo da je $\mathcal{L}(y_1 \dots y_m) \subseteq \mathcal{L}(x_1 \dots x_n)$. Iz 1° i 2° slijedi $\mathcal{L}(x_1 \dots x_n) = \mathcal{L}(y_1 \dots y_n)$

$\Leftarrow$ Neka je $\mathcal{L}(x_1 \dots x_n) = \mathcal{L}(y_1 \dots y_m)$

$x_i \in \mathcal{L}(x_1 \dots x_n) \quad \forall i = \overline{1,n}$

$x_i \in \mathcal{L}(y_1 \dots y_n) \quad \forall i = \overline{1,n}$

$y_i \in \mathcal{L}(y_1 \dots y_m) \quad \forall i = \overline{1,m}$

$y_i \in \mathcal{L}(x_1 \dots x_n) \quad \forall i = \overline{1,m}$

6. Da li su ekvivalentni sledeći sistemi vektora

$X: \begin{array}{l} x_1 = (1,0,0) \\ x_2 = (0,1,0) \\ x_3 = (0,0,1) \end{array} \qquad Y: \begin{array}{l} y_1 = (0,0,1) \\ y_2 = (0,1,1) \\ y_3 = (1,1,1) \end{array}$

Sistemi $X$ i $Y$ su ekvivalentni akko $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{L}(y_1, y_2, y_3)$

$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3) = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R\}$

$= \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R\} = R^3$

$\mathcal{L}(y_1, y_2, y_3) = \{\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 \mid \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in R\}$

$= \{(\beta_3, \beta_2 + \beta_3, \beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \mid \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in R\}$

Da li je $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{L}(y_1, y_2, y_3)$

Da li je $\mathcal{L}(y_1, y_2, y_3) = R^3$ ?

Očigledno da je $\mathcal{L}(y_1, y_2, y_3) \subseteq R^3$. Pokažimo da je $R^3 \subseteq \mathcal{L}(y_1, y_2, y_3)$

Neka je $x=(a,b,c)\in R^3$ proizvoljno

Da li $x\in \mathcal{L}(y_1,y_2,y_3)$ Da li postoje $\beta_1,\beta_2,\beta_3 \in R$, takvi

da je $x=(\beta_3,\beta_2+\beta_3,\beta_1+\beta_2+\beta_3)$ $\beta_3=a$

$(a,b,c)=(\beta_3,\beta_2+\beta_3,\beta_1+\beta_2+\beta_3)$ $\beta_2=b-a$

$\beta_3=a$ $\beta_2+\beta_3=b$ $\beta_1+\beta_2+\beta_3=c$ $\beta_1=c-b$

Postoje takvi $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ pa zaključujemo da $x\in\mathcal{L}(y_1,y_2,y_3)$. Pokazali smo da $(\forall x\in R^3)$ $x\in\mathcal{L}(y_1,y_2,y_3)$, a to znači da je $R^3\subseteq\mathcal{L}(y_1,y_2,y_3)$

Iz 1 i 2 slijedi da je $\mathcal{L}(y_1,y_2,y_3)=R^3$ i dati sistemi vektora su ekvivalentni.