Dokaz Neka je $y = \mathcal{A}x$, $x \in V$, $y \in W$. Fiksirajmo baze e u V i f u W, i označimo sa $e(x)$ i $f(y)$ vektore x i y zapisane u bazama e i f respektivno. Tada $y(f) = A(e,f)x(e)$ i $y(f') = A(e',f')x(e')$. S druge strane $x(e) = Sx(e')$ i $y(f) = Qy(f')$ $Qy(f') = A(e,f)x(e)$ iz prethodnih jednakosti. Dakle, $QA(e',f')x(e') = A(e,f)Sx(e')$
Pošto je $x \in V$ proizvoljan, to $QA(e',f') = A(e,f)S$
Sve matrice istog vektora su međusobno ekvivalentne.

Teor. IV 12. Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i rank $\mathcal{A} = r$. Tada postoje baze e u V i f u W takve da je matrica $A(e,f) = G = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dokaz Neka je $A(e',f')$ matrica $\mathcal{A}$ u bazama e' i f'. Tada postoje regularne matrice P i Q takve da
(*) $A(e',f') = PGQ$ Izaberimo nove baze $e = e'Q^{-1}$ i $f = f'P^{-1}$
Tada, po teor. IV 11. $A(e,f)Q = P^{-1}A(e',f')$ (~)
Uvrstimo (*) u (~) $PA(e,f)Q = PGQ$. Odavde $A(e,f) = G$

* VJEŽBE *

* Suma i presjek potprostora *

Neka su L_1 i L_2 potpr. vekt. prostora V nad poljem P
$L_1 + L_2 = \{x + y \mid x \in L_1 \land y \in L_2\}$ $L_1 \cap L_2 = \{x \mid x \in L_1 \land x \in L_2\}$

Teor. Neka je $\{L_i, i \in I\}$ proizvoljna familija potpr. vekt. prostora V nad poljem P. Tada je $\bigcap_{i \in I} L_i$ potpr. prostora V.

Teor. Neka su L_1 i L_2 potpr. vekt. prostora V nad poljem P. Tada je $L_1 + L_2$ potpr. prostora V.

Teor. Neka su L_1 i L_2 konačnodim. potpr. vekt. prostora V. Tada važi jednakost $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$

Def. Neka su $L_1 \ldots L_k$ potpr. vekt. prostora V. Suma $L = L_1 + \ldots + L_k$ je direktna ako za svako $x \in L$ postoje jedinstveni vektori $x_1 \in L_1 \ldots x_k \in L_k$, takvi da je $x = x_1 + \ldots + x_k$. Pišemo $L = L_1 \dot{+} \ldots \dot{+} L_k$

Teor. Suma $L_1 + \ldots + L_k$ potpr. $L_1 \ldots L_k$ vekt. prostora V direktna akko je unija baza potpr. $L_1 .. L_k$ baza prostora V.

Teor. Suma potpr. $L_1 .. L_k$ vekt prostora V je direktna ako se bar jedan vektor iz V može na jedinstven način razložiti kao suma vektora $x_1, .., x_k$ $x_i \in L$ $i=\overline{1,n}$

Teor. Suma potpr. je direktna akko je $L_i \cap \{L_1 + .. + L_{i-1} + L_{i+1} + .. + L_k\} = \{0\}$ $\forall i$

Napomena: Za $k=2$, suma potpr. L_1 i L_2 je direktna akko je $L_1 \cap L_2 = 0$. Uočimo da je tada $\dim(L_1+L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$

* Lin. operatori *

Def. Neka su X i Y vekt. prostori nad poljem P. Preslikavanje $A: X \to Y$ je lin. preslikavanje ili lin. operator, ako je zadovoljeno: 1) $A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2$ $\forall x_1, x_2$ aditivnost
2) $A(\alpha x) = \alpha \cdot Ax$ $\forall \alpha \in P, \forall x \in X$ - homogenost

Neka su X i Y fiksirani vekt. prostori nad poljem P. Skup svih lin. operatora koji djeluju iz X u Y označavamo sa $\mathcal{L}(X,Y)$ (Hom(X,Y)) $\mathcal{L}(X,Y)$ je vekt. prostor nad poljem P u odn. na operacije sabiranja operatora i množ. operatora skalarom.

Def. Neka je $A: X \to Y$ lin. operator:
1) A je monomorfizam ako je „1-1" preslikavanje ($x_1 \neq x_2 \Rightarrow Ax_1 \neq Ax_2$)
2) A je epimorfizam ako je „na" preslikavanje $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)$
3) A je izomorfizam ako je bijektivno preslikavanje $Ax=y$

Def. Jezgro lin. operatora $A: X \to Y$ je skup $N_A = \operatorname{Ker} A = \{x \in X \mid Ax = 0\}$ N_A je potpr. prostora X

Def. Slika lin. oper. $A: X \to Y$ je $T_A = \operatorname{Im} A = \{Ax : x \in X\}$ T_A je potpr. prostora Y.

Def. $n_A = \dim Ker A$ - defekt operatora A

$r_A = \dim Im A$ - rang operatora A

Teor. Neka je $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Tada je $n_A + r_A = \dim X$

Def. Neka je $\mathcal{L}$ skup svih lin. operatora iz X u X. Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ je regularan ako je $N_A = \{0\}$

Napomena: Regularan operator samo nula vektor preslikava u nulu $x \neq 0 \Rightarrow Ax \neq 0$. Ako oper. nije regularan kažemo da je singularan (postoji $x \neq 0$ t.d. $Ax = 0$)

Teor. Neka je X vekt. prostor i $A: X \to X$ lin. operator. Sledeći uslovi su ekvivalentni: 1) $N_A = \{0\}$ A je regularan

2) $T_A = X$ A je sirjekt. 3) $Ax = Ay \Rightarrow x = y$ A je injekt.

4) A je bijekcija

Napomena: Ako je $A: X \to X$ regul. operator, tada je

$n_A + r_A = \dim X$ $N_A = \{0\}$ $\dim N_A = 0 \Rightarrow n_A = 0$ $r_A = \dim X$

Za singularan operator važi da je $r_A < \dim X$

Teor. Neka su X i Y vekt. prostori konačne dimenzije. $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ i M komplement potprostora N_A. Tada je:

a) $M \cong T_A$ (A lin. op. i bijekcija $\Rightarrow$ izomorfizam)

b) $\dim X = n_A + r_A$ c) $r_A \leq \dim X$, $r_A \leq \dim Y$

Teor. Neka su X, Y i Z vekt. prostori nad poljem P i $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ $B \in \mathcal{L}(Z,X)$. Tada je: a) $rang_{A \circ B} \leq \min(r_A, r_B)$

b) $r_{A\circ B} = r_A$ ako je B bijekcija c) $r_{A \circ B} = r_B$ ako je A bijekcija

1. Dato je preslikavanje $A: R^3 \to R^3$ definisano sa $A(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_3, x_1 + x_2)$. Dokazati da je A lin. op. i naći mu jezgro i sliku

1° $x, y \in R^3$ $x = (x_1, x_2, x_3)$ $y = (y_1, y_2, y_3)$

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

$A(x+y) = (x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) + x_3 + y_3,\ x_1 + y_1 - (x_3 + y_3),\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2)$

$= (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_3, x_1 + x_2) + (y_1 + 2y_2 + y_3, y_1 - y_3, y_1 + y_2)$

$= \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$

$2^\circ \ \alpha \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^3 \quad x = (x_1, x_2, x_3) \quad \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$

$\mathcal{A}(\alpha x) = (\alpha x_1 + 2(\alpha x_2) + \alpha x_3, \ \alpha x_1 - \alpha x_3, \ \alpha x_1 + \alpha x_2)$

$= \alpha \cdot (x_1 + 2x_2 + x_3, \ x_1 - x_3, \ x_1 + x_2) = \alpha \cdot \mathcal{A}x$

Iz 1° i $2^\circ \Rightarrow \mathcal{A}$ je lin. operator

$N_{\mathcal{A}} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{A}x = 0\} \quad N_{\mathcal{A}} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = 0$
$\in \mathbb{R}^3\} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1 + 2x_2 + x_3, \ x_1 - x_3, \ x_1 + x_2) = (0,0,0)\}$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

$x_1 - x_3 = 0 \qquad x_3 = x_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \sim$

$x_1 + x_2 = 0 \qquad x_2 = -x_1$

$(x_3, -x_3, x_3) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

$x_2 = -x_3$

$x_1 = -2x_2 - x_3 = 2x_3 - x_3 = x_3$

$N_{\mathcal{A}} = \{(x_3, -x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3(1,-1,1) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(e) \quad e = (1,-1,1)$

Baza u $N_{\mathcal{A}}$ je $\{e\}$ pa je $\dim N_{\mathcal{A}} = 1 \quad n_{\mathcal{A}} = 1$

$T_{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A}x \mid x \in \mathbb{R}^3\} = \{\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(x_1 + 2x_2 + x_3, \ x_1 - x_3, \ x_1 + x_2)\} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} =$

$= \{x_1(1,1,1) + x_2(2,0,1) + x_3(1,-1,0) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3)$

$a_1 = (1,1,1) \quad a_2 = (2,0,1) \quad a_3 = (1,-1,0)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-2) \ \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \{a_1, a_2\}$ baza u $T_{\mathcal{A}}$

$r_{\mathcal{A}} = \dim T_{\mathcal{A}} = 2$

2. a) Dokazati da množenje operatora nekim nenultim skalarom ne mijenja rang i defekt operatora

b) Dokazati da je $S = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y) \wedge T_{\mathcal{A}} \subseteq L\}$ (L - potp. prostora Y) potpr. prostora $\mathcal{L}(X,Y)$

c) Dokazati da je sistem 2 nenulta oper. iz $\mathcal{L}(X,Y)$ čiji su prostori slika različiti lin. nezavisan.

a) Neka je $\alpha \in P \wedge \alpha \neq 0$. $\mathcal{B} = \alpha \cdot \mathcal{A}$ Pokažimo da je $T_{\mathcal{A}} = T_{\mathcal{B}}$

1° Neka je $y \in T_A$ - proizv. Tada postoji $x \in X$ tako da je
$y = A(x)$ odnosno $A(\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}x) = \alpha A(\frac{1}{\alpha}x) = (\alpha A)(\frac{1}{\alpha}x)$
$= B(\frac{1}{\alpha}x) \in T_B$ $(\forall y \in T_A)\ y \in T_B \Rightarrow T_A \subseteq T_B$

2° Neka je $y \in T_B$ proizvoljan. Tada postoji $x \in X$ t.d. $y = Bx$
$= (\alpha \cdot A)x = \alpha \cdot Ax = A \cdot (\alpha x) \in T_A$ $(\forall y \in T_B)\ y \in T_A \Rightarrow T_B \subset T_A$

Iz 1° i 2° $\Rightarrow T_A = T_B$ pa je $\dim T_A = \dim T_B$ rang$A$ = rang$B$

$$\left.\begin{array}{l} r_A + n_A = \dim X \\ r_B + n_B = \dim X \end{array}\right\} \Rightarrow n_A = n_B$$

b) 1° $A, B \in S$

a) $A + B \in \mathcal{L}(X,Y)$ b) Neka je $y \in T_{A+B}$ proizvoljno. Tada postoji $x \in X$ t.d. $y = (A+B)x = Ax + Bx \in \underset{\in L}{T_A} + \underset{\in L}{T_B} \subseteq L \Rightarrow y \in L$
$(\forall y \in T_{A+B})\ y \in L \Rightarrow T_{A+B} \subseteq L$ Iz a) i b) $\Rightarrow A + B \in S$

2° $\alpha \in P$, $A \in S$

a) $\alpha A \in \mathcal{L}(X,Y)$ b) Neka je $y \in T_{\alpha A}$. Tada postoji $x \in X$ t.d.
$y = (\alpha A)x = \alpha \cdot Ax \in T_A \in L$. $(\forall y \in T_{\alpha A})\ y \in L \Rightarrow T_{\alpha A} \subseteq L$
Iz a) i b) $\Rightarrow \alpha A \in S$ iz 1° i 2° $\Rightarrow S$ je potpr. prostora $\mathcal{L}(X,Y)$

c) A, B - nenulti operatori $T_A \neq T_B$ $\{A, B\}$ je lin. nezav.
Pretp. suprotno tj. da je sistem $\{A, B\}$ lin. zavisan. To znači da postoje skalari α i β t.d. $\alpha A + \beta B = 0$ i $\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0$. Neka je $\beta \neq 0$. Tada je $B = -\frac{\alpha}{\beta} A$. Na osn. a) $\Rightarrow T_A = T_B$ a to nije tačno.
Ostaje da je $\{A, B\}$ lin. nezavisan

3. Neka su X i Y vekt. prostori nad poljem K, i $A: X \to Y$ i $B: X \to Y$ lin. oper. a) Dokazati da je $r_{A+B} \le r_A + r_B$ b) Ako su r_A i r_B konačni, tada je $|r_A - r_B| \le r_{A+B}$

a) Dokazati da je $T_{A+B} \subseteq T_A + T_B$. Neka je $y \in T_{A+B}$ proizv. Tada $\exists x \in X$ t.d. $y = (A+B)x = Ax + Bx \in T_A + T_B$
$(\forall y \in T_{A+B})\ y \in T_A + T_B \Rightarrow T_{A+B} \subseteq T_A + T_B \Rightarrow$
$\dim T_{A+B} \le \dim(T_A + T_B) \le \dim T_A + \dim T_B$
$r_{A+B} \le r_A + r_B$

$r_A = r_{A+B+(-B)} \overset{(a)}{\leq} r_{A+B} + r_{-B} \overset{2(a)}{=} r_{A+B} + r_B$ r_B - konačno

$\Rightarrow r_A - r_B \leq r_{A+B}$ (1)

$r_B = r_{B+A+(-A)} \overset{a}{\leq} r_{B+A} + r_{-A} \overset{2(a)}{=} r_{A+B} + r_A$ r_A - konačno

$\Rightarrow r_B - r_A \leq r_{A+B}$ (2) Iz 1) i 2) $\Rightarrow |r_A - r_B| \leq r_{A+B}$

4. Proizvod regularnog i singularnog operatora je singularan. Dokazati!

1° A_1 - regularan, A_2 - singularan $\Rightarrow \exists x \neq 0$ $A_2 x = 0$

$(A_1 \cdot A_2)x = A_1(A_2 x) = A_1(0) = 0$. Dakle $\exists x \neq 0$ t.d. $(A_1 A_2)x = 0$

$\Rightarrow A_1 \cdot A_2$ - sing. oper.

2° A_1 - singularan $\Rightarrow r_{A_1} < \dim X$ A_2 - regularan

$r_{A_1 \circ A_2} \leq \min(r_{A_1}, r_{A_2}) \leq r_{A_1} < \dim X \Rightarrow A_1 \circ A_2$ - singularan

5. Ako je $J + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_n A^n = \Theta$, tada je operator A regularan. Dokazati:

Pretp. suprotno tj. da je A singularan. Tada $\exists x \neq 0$ t.d.

$Ax = 0$ $A^2 = A \cdot A$ $A^2 x = (A \cdot A)x = A(A(x)) = A\, 0 = 0$

$A^3 = A^2 \cdot A$ $A^3 x = A^2(Ax) = A^2 \cdot 0 = 0 \dots A^n x = 0$

1 $(J + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_n A^n)x = Jx + \alpha_1 Ax + \alpha_2 A^2 x + \dots + \alpha_n A^n x = x$

2 $(J + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_n A^n)x = \Theta x = 0$

Iz 1 i 2 $\Rightarrow x = 0$, što nije tačno. Ostaje da je A regularan.

6. Neka je A operator koji zadovoljava uslov $A^m = \Theta$, za neko $m \in N$. Tada je $\alpha J - A$ regul. oper. za svako $\alpha \neq 0$. Dokazati!

Neka je $\alpha \neq 0$, $x \neq 0$. Tada je $((\alpha J)^m - A^m)x = (\alpha^m \cdot J - A^m)x$

$= \alpha^m \cdot Jx - A^m x = \alpha^m x - 0x = \alpha^m x - 0 = \alpha^m \cdot x \neq 0 \Rightarrow$ operator

$(\alpha J)^m - A^m$ je regularan.

$((\alpha J)^m - A^m) = (\alpha J - A)((\alpha J)^{m-1} + \dots + A^{m-1})$ Ako bi oper.

$\alpha J - A$ bio sing. tada bi operator $(\alpha J)^m - A^m$ bio sing.

(kao proizvod singularnog sa nekim drugim oper.) a to nije tačno. Ostaje da je $\alpha J - A$ regul. op za svako $\alpha \neq 0$

7. Dokazati da za operator $A: X \to X$ važi $T_A \subseteq N_A$ akko $A^2 = \mathbb{O}$ ($\mathbb{O}$ - nula operator)

$\Rightarrow$ Neka je $T_A \subseteq N_A$. Neka je $x \in X$ proizvoljno. Tada $Ax \in T_A \subseteq N_A \Rightarrow A(Ax) = 0$ $A^2x = 0$ $A^2x = \mathbb{O}x$, $\forall x \in X \Rightarrow A^2 = \mathbb{O}$

$\Leftarrow$ Neka je $A^2 = \mathbb{O}$. Neka je $y \in T_A$ proizvoljno. Tada postoji $x \in X$ t.d. je $y = Ax$ $Ay = A(Ax) = A^2x = \mathbb{O}x = 0 \Rightarrow y \in N_A$

$(\forall y \in T_A)$ $y \in N_A \Rightarrow T_A \subseteq N_A$

$V = M \dot{+} N$ $\forall x \in V$ x možemo na jedinstven način razložiti u sumu $x = u + v$, $u \in M$, $v \in N$

$P: V \to M$ $x \in V$ $x = u + v$ $Px = u$ P je projektovanje na M paralelno sa N

$Px = v$ P je projektovanje na N paralelno sa M $P: V \to N$

8. Dokazati da je $P: V \to V$ operator projektovanja akko je $P^2 = P$

$\Rightarrow$ Neka je P projekcija. To znači da postoji razlaganje prostora $V = M \dot{+} N$ i P djeluje kao projekcija na M paralelno sa N. Neka je $x \in V$ proizvoljno. Tada postoji jedinstveno razlaganje $x = u + v$, $u \in M$, $v \in N$ $Px = u$

$P^2x = P(Px) = Pu = u = P(u + 0) = Px$ $P^2x = Px$ $\forall x \in X \Rightarrow P^2 = P$

$\Leftarrow$ Neka je $P^2 = P$. Neka je $M = \{x \in V \mid Px = x\}$ $N = \{x \in V \mid Px = 0\}$

$1°$ $M + N \subseteq V$ $2°$ Neka je $x \in V$ proizvoljno. Tada je $x = \underbrace{Px}_{u} + \underbrace{(J-P)x}_{v}$

Neka je $u = Px$ $v = (J - P)x$

a) $Pu = P(Px) = P^2x = Px = u \Rightarrow u \in M$

b) $Pv = P((J-P)x) = P(Jx - Px) = P(x - Px) = Px - Tx = Px - Px = 0$
$\Rightarrow v \in N$ $(\forall x \in V)$ $x \in M + N \Rightarrow V \subseteq M + N$

a) i b) $\Rightarrow x = u + v$, $u \in M$, $v \in N$

Iz $1°$ i $2°$ $\Rightarrow V = M + N$

Dokažimo da je suma direktna:

$x \in M \cap N \Rightarrow x \in M \land x \in N \Rightarrow Px = x$ $Px = 0$ $x = 0$ $M \cap N = \{0\}$

Dokažimo da je P projekcija M paralelno sa N
Neka je $x \in V$ proizvoljno. Tada postoji jedinstv. razlaganje
t.d. $x = u + v$, $u \in M$, $v \in N$. $Px = P(u+v) = Pu + Pv = u + 0 = u$.