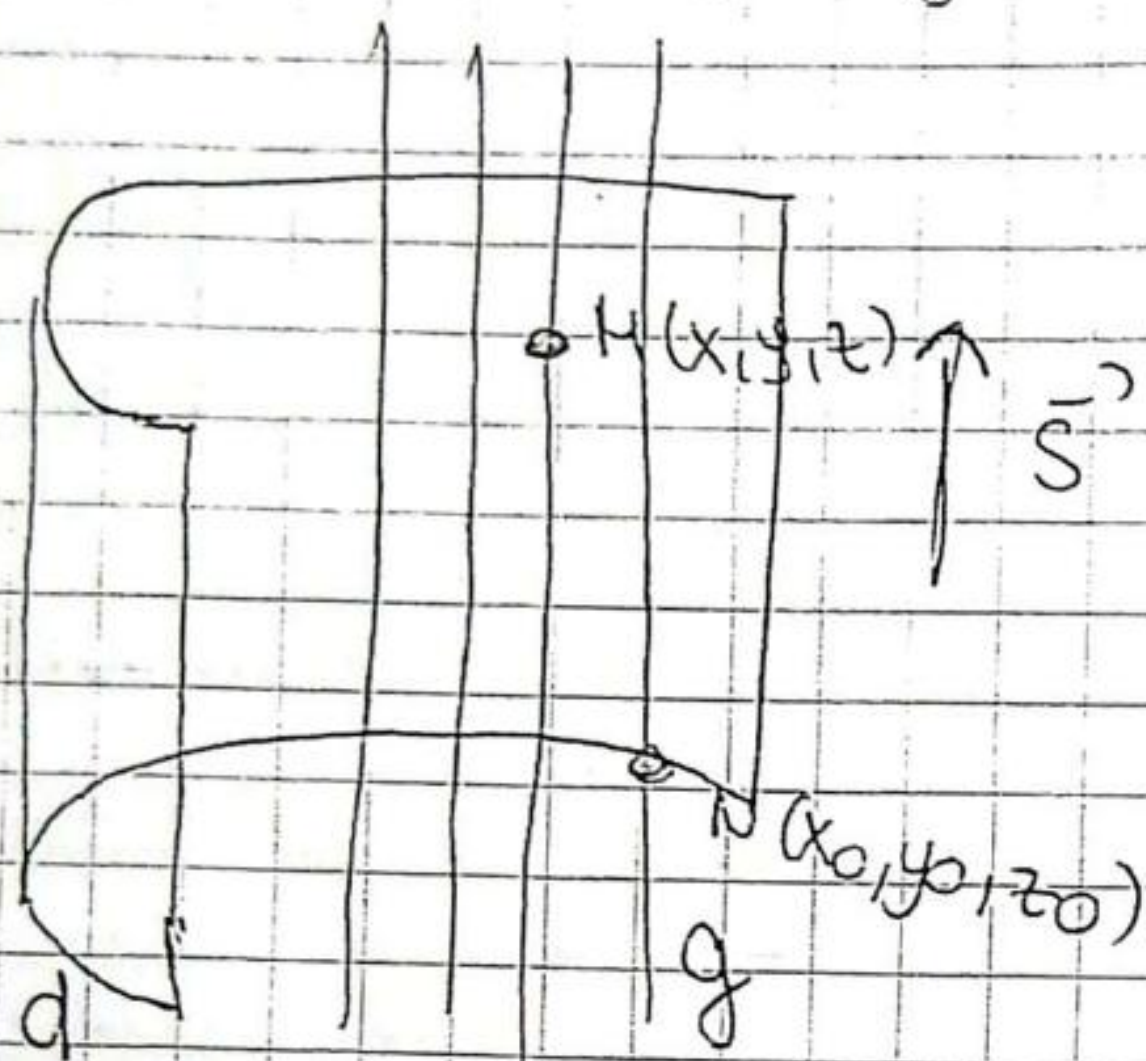


Cilindrične plosni

Ako plosna pravca g stalnog pravca (stalno je paralelna sa osom S') uvijek siječe neparivne krive d u jednoj tački, ta obrazložje plosi koju nazivamo cilindričnom.

g - generatriksa (izvodnica)

d - direktrijsa (vodiča)



$$d: \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$S' = (m, n, p)$$

Jednačina generatrikse je

$$g: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

$$g: \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

$$N(x_0, y_0, z_0) \in d$$

$M(x, y, z)$ - tačka cilindrične plosni

Uvrštavanjem x_0, y_0, z_0 i t iz gorešnjih jednačina dobijemo jednu jednačinu $F(x, y, z) = 0$, to je jednačina cilindrične plosi.

1) Očivid je da je cilindrična plosi ako je njena direktrijsa d a generatriksa g ortogonalna na ravni direktrijske.

$$R_{11} \quad \Pi: x - 2z = 0 \rightarrow \text{ravna direktrijsa}$$

$$\vec{n}_{\Pi} = (1, 0, -2)$$

S' - vektor pravca generatrikse

$$g \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{s} = \lambda \vec{v} \quad , \text{ za } \lambda=1, \vec{s}=(1,0,-2)$$

$U(x_0, y_0, z_0)$ e d' p'riavop'na tačka d'v'etke
jedn'ice generat'ice $\vec{s}$

$$g: \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{-2}$$

$$g: \begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \\ z = z_0 - 2t \end{cases}$$

$$x_0 = x - t$$

$$y_0 = y$$

$$z_0 = z + 2t$$

$$Ned \Rightarrow Ne \pi$$

$$x_0 = 2z_0$$

$$x - t = 2(z + 2t)$$

$$x - t - 2z - 4t = 0$$

$$5t = x - 2z$$

$$t = \frac{x - 2z}{5}$$

$$x_0 = x - \frac{x - 2z}{5} = \frac{4x + 2z}{5}$$

$$y_0 = y$$

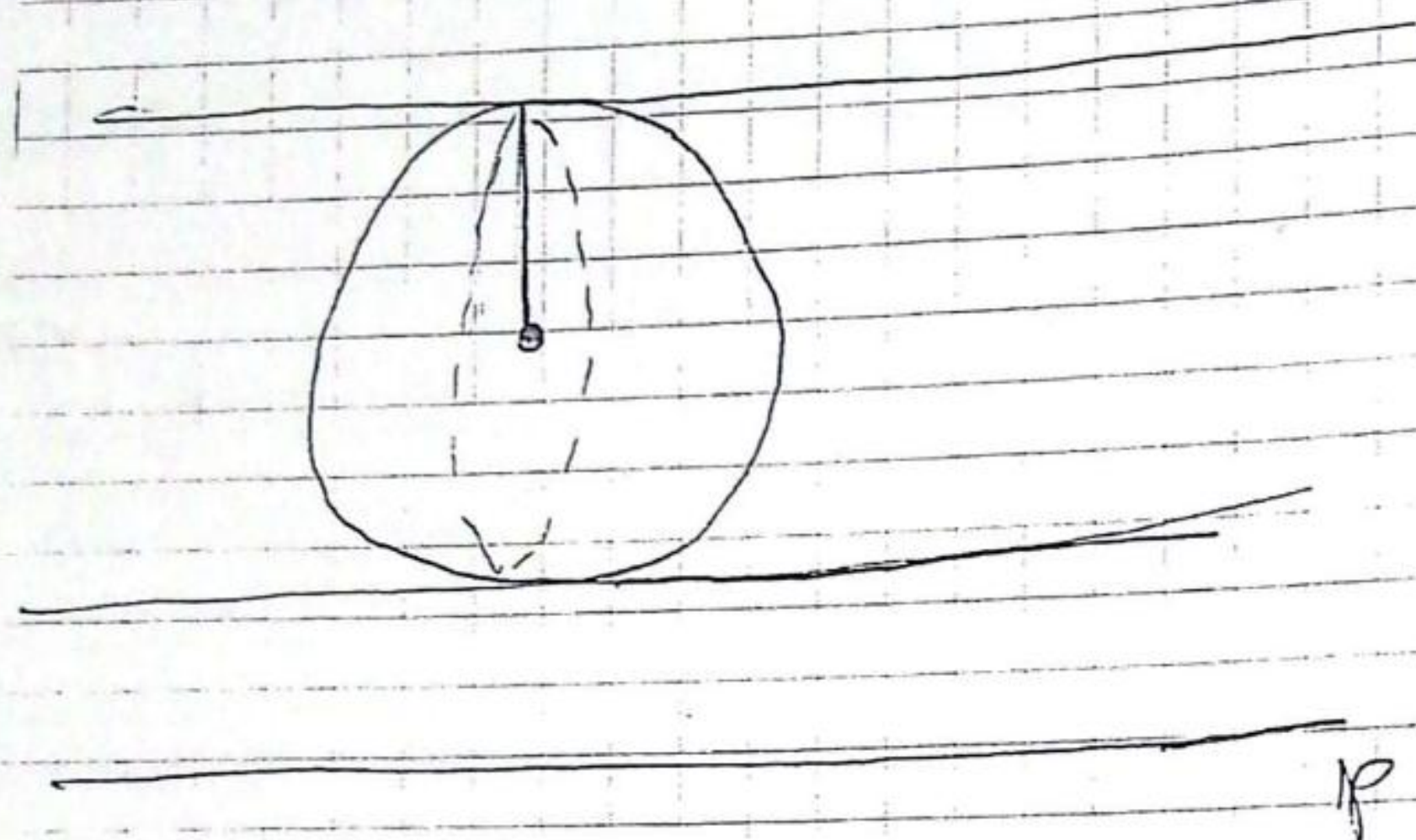
$$z_0 = z + 2 \cdot \frac{x - 2z}{5} = z + \frac{2x - 4z}{5} = \frac{2x + z}{5}$$

$$Ned \Rightarrow x_0 = y_0^2 + z_0^2$$

$$\frac{4x + 2z}{5} = y^2 + \frac{4x^2 + 4xz + z^2}{25}$$

$\Rightarrow$ jednáciha elipsoidu
povera

*
 2) Sfera $S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ Osvjetljena je tačkom
 gdje su paralelni pravci $p: x=y=z$. Naći oblik sjene na
 ravnini xOy .



$C(1,1,1) \rightarrow$ centar sfere

$R=1 \rightarrow$ poluprečnik sfere

Žranci koji tangiraju sferu po centralnom kugli formiraju
 eliptičnu površ. Presjek te površi i ravnini xOy daje nam
 sjenu.

π -ravni koja sadrži sferu C i ortogonalna na pravcu p

$$p \perp \pi \Rightarrow \vec{n}_{\pi} = \lambda \cdot \vec{sp}$$

$$\text{Za } \lambda=1, \vec{n}_{\pi} = (1,1,1).$$

$$\pi: C(1,1,1) \quad \vec{n}_{\pi} = (1,1,1)$$

$$\pi: (x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$$

$$\pi: x+y+z-3=0.$$

Direktna eliptična površ je $d: \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$

$$g \parallel p \Rightarrow \vec{s} = \lambda \vec{sp}$$

$$\vec{s} = (1,1,1)$$

$$N(10|10|20) \in Q_d$$

$$g: \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{1} = \frac{z-z_0}{1}$$

$$g: \begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = x - t \\ y_0 = y - t \\ z_0 = z - t \end{cases}$$

$$Ned \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 - 3 = 0$$

$$x - t + y - t + z - t - 3 = 0$$

$$3t = x + y + z - 3$$

$$t = \frac{x + y + z - 3}{3}$$

$$x_0 = x - \frac{x + y + z - 3}{3} + 1 = \frac{2x - y - z}{3} + 1$$

$$y_0 = y - \frac{x + y + z - 3}{3} + 1 = \frac{-x + 2y - z}{3} + 1$$

$$z_0 = z - \frac{x + y + z - 3}{3} + 1 = \frac{-x - y + 2z}{3} + 1$$

$$Ned \Rightarrow (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 1)^2 = 1$$

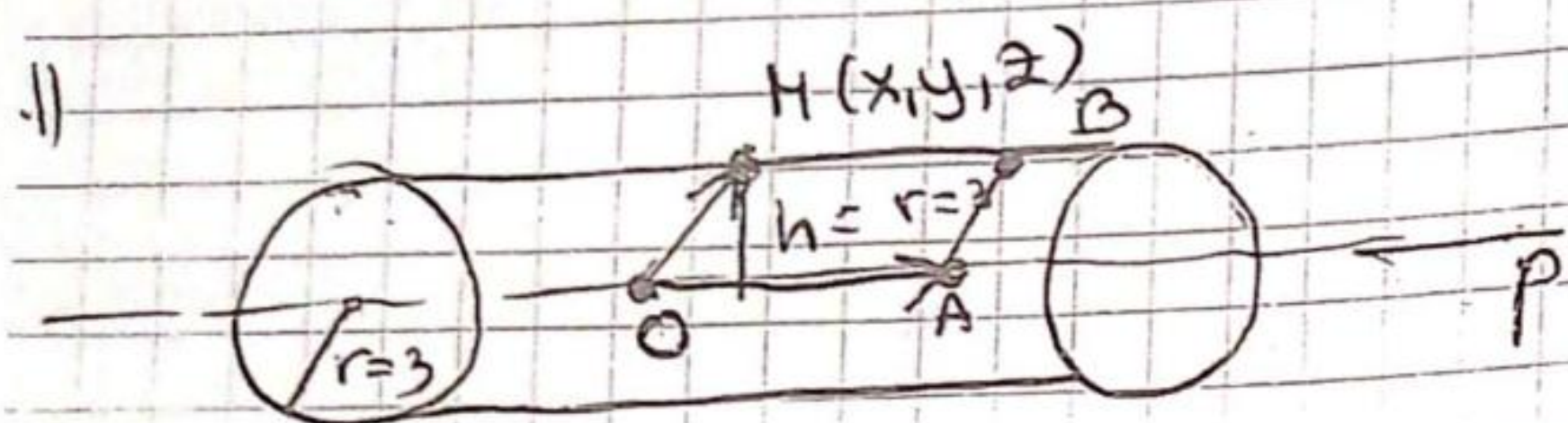
$$\left(\frac{2x - y - z}{3}\right)^2 + \left(\frac{-x + 2y - z}{3}\right)^2 + \left(\frac{-x - y + 2z}{3}\right)^2 = 1$$

je jednačina cilindrične površi.

Slika je presjek cilindrične površi i ravni xOy , odnosno

$$\begin{cases} \left(\frac{2x - y - z}{3}\right)^2 + \left(\frac{-x + 2y - z}{3}\right)^2 + \left(\frac{-x - y + 2z}{3}\right)^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

3) Odrediti jednačinu kružnog cilindra: ako je osa prava
 $p: \frac{x}{1} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2}$ i poluprečnik $r=3$.



$$\vec{sp} = (1, 5, 2)$$

$$O(0,0,0) \in p$$

$$A \in p, \vec{OA} = \vec{sp}$$

$M(x, y, z)$ proizvoljna tačka cilindrične površi

Nad vektorima $\vec{OA}, \vec{OM}$ konstruišemo paralelogram $OA BM$.

Visina iz temena M na stranici OA je poluprečnik cilindra.

P -površina paralelograma

$$P = |\vec{OA} \times \vec{OM}| = |\vec{sp} \times \vec{OM}| \quad \Rightarrow \quad |\vec{sp} \times \vec{OM}| = r |\vec{sp}| \quad (*)$$

$$P = |\vec{OA}| \cdot r$$

$$\vec{sp} \times \vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (5z - 2y)\vec{i} - (z - 2x)\vec{j} + (y - 5x)\vec{k}$$

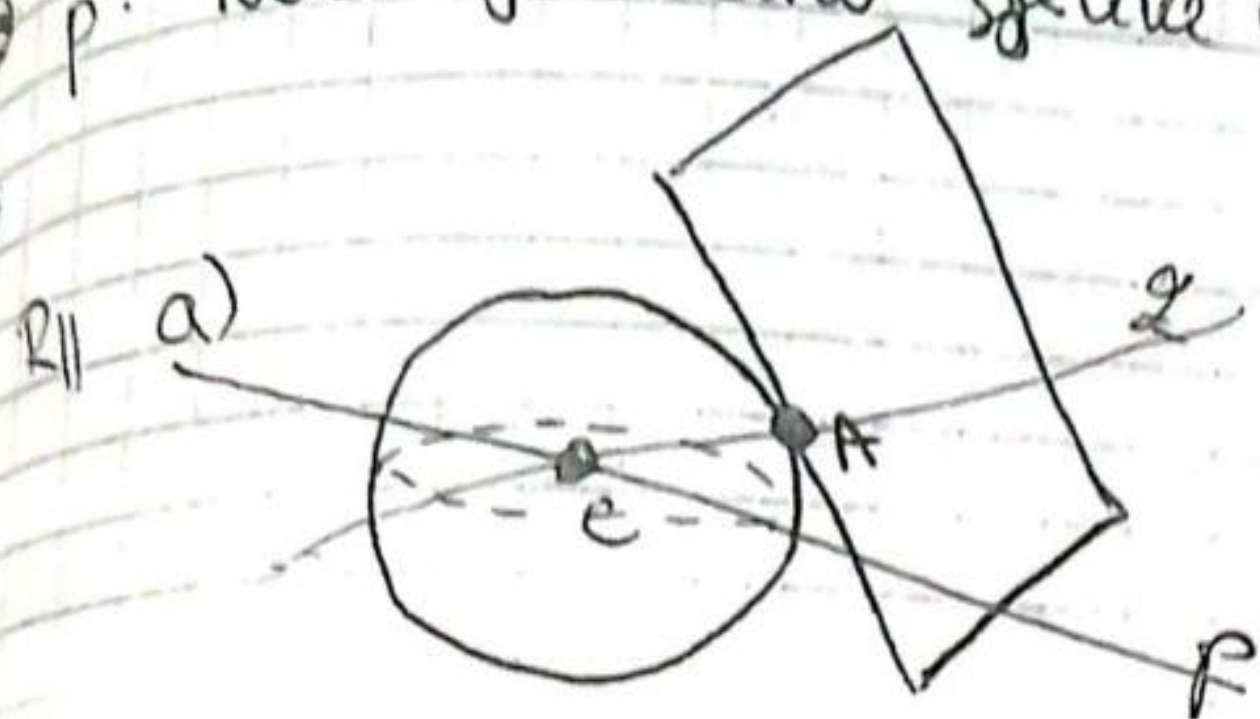
$$\vec{sp} \times \vec{OM} = (5z - 2y, 2x - z, y - 5x)$$

$$(*) \Rightarrow \sqrt{(5z - 2y)^2 + (2x - z)^2 + (y - 5x)^2} = \sqrt{1 + 25 + 4} \cdot 3$$

$$(5z - 2y)^2 + (2x - z)^2 + (y - 5x)^2 = 270$$

je jednačina
cilindrične površi.

- a) Napišati jednačinu sfere S koja dodiruje ravan $\pi: x+y+z=1$ u tački $A(0,1,0)$ a centar joj je u tački na pravoj $P: \begin{cases} \pi: 2x-y-z=1 \\ \sigma: x+y-z-2=0 \end{cases}$
- b) Sfera je osvjetljena zrakama koji su paralelni pravoj P . Naći jednačinu sfere u koordinatnom sistemu xOy .



g -pravu koja sadrži tačku A i ortogonalnu na ravni π .

$$S\vec{g} = \lambda n\vec{\pi}$$

$$\lambda = 1 \quad S\vec{g} = (1, 1, 1)$$

$$g: A(0, 1, 0) \quad S\vec{g} = (1, 1, 1)$$

$$g: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

U presjeku pravih P i g dobijamo centar sfere.

$$g: \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$$

$$2t - 1 - t - t + 1 = 0$$

$$0 = 0$$

$$t + 1 + t - t - 2 = 0$$

$$t - 1 = 0$$

$$t = 1$$

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = 1$$

Dobili smo centar $C(1, 2, 1) \rightarrow$ centar sfere.

R -poluprecnik sfere

$$R = d(C, A) = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

Jednačina sfere je: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$

b) Znači koji tangiraju sferu formiraju cilindričnu površ.

$$\text{Odredimo } S\vec{p}, \quad S\vec{p} = \lambda(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2), \quad \vec{n}_1 = (2, -1, -1)$$

$$\vec{n}_2 = (1, 1, -1)$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - (-1)\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (2, 1, 3)$$

$\vec{S}$ - vector pârca generatoare $\vec{S} = \lambda \vec{S}'$

$$\vec{S}' = (2, 1, 3)$$

d - raia raji sferii centar sfere i ortogonalu $\vec{p}$ na

$$\vec{S}, \vec{p}, \vec{n} = \lambda \vec{S}'$$

$$\text{Ia } \lambda = 1 \quad \vec{n} = (2, 1, 3)$$

$$C(1, 2, 1)$$

$$d: C(1, 2, 1) \quad \vec{n} = (2, 1, 3)$$

$$2(x-1) + 1(y-2) + 3(z-1) = 0$$

$$2x + y + 3z - 7 = 0$$

Dreptele alinatiei pârca $\vec{p}$

$$d: \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3 \\ 2x + y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$$

Ecuaia generatoare

$$g: \frac{x-x_0}{2} = \frac{y-y_0}{1} = \frac{z-z_0}{3} \quad N(x_0, y_0, z_0) \in d$$

$$g: \begin{cases} x = x_0 + 2t \Rightarrow x_0 = x - 2t \\ y = y_0 + t \Rightarrow y_0 = y - t \\ z = z_0 + 3t \Rightarrow z_0 = z - 3t \end{cases}$$

$$N(x_0, y_0, z_0) \in d \Rightarrow 2x_0 + y_0 + 3z_0 - 7 = 0$$

$$2x - 4 + y - t + 3z - 9t - 7 = 0$$

$$2x + y + 3z - 14t - 7 = 0$$

$$t = \frac{(2x + y + 3z - 7)}{14}$$

$$x_0 = x - 2t = x - \frac{2x + y + 3z - 7}{7} = \frac{5x - y - 3z + 7}{7}$$

$$y_0 = y - t = \frac{2x + y + 3z - 7}{14} = \frac{-2x - 13y - 3z + 7}{14}$$

$$z_0 = z - 3t = \frac{3(2x + y + 3z - 7)}{14} = \frac{-6x - 3y + 5z + 21}{14}$$

$$(x_0-1)^2 + (y_0-2)^2 + (z_0-1)^2 = 3$$

$$\left(\frac{5x-y-3z}{7}\right)^2 + \left(\frac{-2x-13y-3z-21}{14}\right)^2 + \left(\frac{-6x-3y+5z+7}{14}\right)^2 = 3$$

=> nessuna condizione possi

giura :

$$\left(\frac{5x-y}{7}\right)^2 + \left(\frac{-2x-13y-21}{14}\right)^2 + \left(\frac{-6x-3y+7}{14}\right)^2 = 3$$

$z=0$