Površi

Pretpostavimo da je u prostoru E zadat koordinatni sistem $Oxyz$. Posmatraćemo skupove tačka prostora E koji su zadati jednačinom oblika $F(x,y,z) = 0$, gdje je F funkcija definisana na E.

Jednačina sfere

Sferom poluprečnika $r > 0$ i centrom u tački $C(a,b,c)$ nazivamo skup tačaka prostora E, koje su na rastojanju r od tačke C. Primijetimo da je rastojanje $d(C,M)$ od tačke C do proizvoljne tačke $M(x,y,z)$ jednako

$$d(C,M) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

Ako sferu označimo sa Σ, tada

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow d(M,C) = r,$$

odnosno

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$$

odakle dobijamo jednačinu sfere Σ

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Konusne površi

U prethodnom primjeru površ (sferu) smo prvo opisali geometrijski a onda našli njenu jednačinu. Površ se može zadati i na neke druge načine. Jedan od tih načina je ukazivanje na neku krivu G koja se kreće, klizeći po jednoj ili više fiksiranih krivih $D_1, D_2, \ldots$, kretanjem opisuje neku površ. Krivu koja se kreće na opisani način nazivao **generatrisom** (ili izvodnicom) te površi, a krive po kojima generatrisa klizi nazivamo **direktrisama**.

Površ čija je generatrisa G prava naziva se *pravolinijskom površi.* Ako se pritom generatrisa kreće tako da prolazi kroz fiksiranu tačku, označimo je sa T, tada se površ koju generatrisa G formira naziva *konusnom površi.* Neka je Σ konusna površ cije je tjeme $T(a,b,c)$ a direktrisa kriva zadata kao presjek dvije površi

$$D = \{(x,y,z) \in E : f(x,y,z) = 0,\ g(x,y,z) = 0\}.$$

Neka je $P(X,Y,Z)$ proizvoljna tačka površi Σ. Prema definiciji pravolinijske površi postoji prava nastala kretanjem generatrise G koja sadrži tačku P. Ta generatrisa siječe direktrisu D u nekopj tački $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Tada možemo napisati kanonske jednačine generatrise G koja prolazi tačke T i P_0.

$$G : \frac{x - x_0}{a - x_0} = \frac{y - y_0}{b - y} = \frac{z - z_0}{c - z_0}.$$

s obzirom da tačka P pripada generatrisi G, imamo da važi:

$$\frac{X-x_0}{a-x_0}=\frac{Y-y_0}{b-y}=\frac{Z-z_0}{c-z_0}=t.$$

odakle slijedi

$$x_0=\frac{X-ta}{1-t},\ y_0=\frac{Y-tb}{1-t},\ z_0=\frac{Z-ta}{1-t}.$$

Pošto tačka P_0 pripada direktrisi D, slijedi da je

$$f\left(\frac{X-ta}{1-t},\frac{Y-tb}{1-t},\frac{Z-ta}{1-t}\right)=0,\ g\left(\frac{X-ta}{1-t},\frac{Y-tb}{1-t},\frac{Z-ta}{1-t}\right)=0.$$

Iz ove dvije jednačine možemo izraziti t na dva načina:

$$t=h_1(X,Y,Z),\ t=h_2(X,Y,Z).$$

Odavde slijedi

$$h_1(x,y,z)-h_2(x,y,z)=0.$$

Može se dokazati da svaka tačka čije kooridinate zadovoljavaju prethodnu jednačinu pripada površi Σ. U ovom koraku se češće odredjuje vrijednost prametra t rješavajući jednu od ovih jednačina po t i uvrštavajući, dobijeno t u drugu jednačinu.

U svakom slučaju, na opisani način dobijamo jednačinu površi Σ tipa $F(x,y,z)=0$.

Primjer. Opisani postupak ćemo prezentirati na primjeru konusne površi čije je tjeme $T(0,0,0)$ a direktrisa je presjek sfere $x^2+y^2+z^2=1$ i ravni $x+y+z=1$. Neka je $P_0(x_0,y_0,z_0)$ tačka na direktrisi D. Tada je $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1, x_0+y_0+z_0=1$. Jednačina generatrise G glasi:

$$\frac{x-x_0}{-x_0}=\frac{y-y_0}{-y_0}=\frac{z-z_0}{-z_0}=t.$$

Slijedi da

$$x_0=\frac{x}{1-t},\ y_0=\frac{y}{1-t},\ z_0=\frac{z}{1-t}.$$

Odavde, s obzirom da tačka $P_0(x_0,y_0,z_0)$ slijedi da je

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=1,\ x_0+y_0+z_0=1.$$

pa uvrštavanjem u prethodne jednačine dobijamo

$$\frac{x^2}{(1-t)^2}+\frac{y^2}{(1-t)^2}+\frac{z^2}{(1-t)^2},=1\ \text{ i }\ \frac{x}{1-t}+\frac{y}{1-t}+\frac{z}{1-t}=1.$$

Eliminacijom parametra t dobijamo jednačinu

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2\Leftrightarrow xy+xz+yz=0.$$

Primjer. Pretpostavimo da je direktrisa D konusne površi elipsa, koja je u izabranom Dekartovom ortonormiranom koordinatnom sistemu zadata jednačinama:

$$D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = c,$$

i čije je tjeme $T(0,0,0)$. Ovu konusnu površ nazivamo *eliptičkim konusom.* Pretpostavimo da je $P_0(x_0, y_0, z_0)$ tačka direktrise. Tada je

$$D : \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \; z_0 = c.$$

Jednačina generatrise glasi, koja sadrži tjeme T i tački P_0., glasi

$$\frac{x - x_0}{-x_0} = \frac{y - y_0}{-y_0} = \frac{z - z_0}{-z_0} = t.$$

Odavde skijedi, kao i u prethodnom slučaju

$$x_0 = \frac{x}{1-t}, \; y_0 = \frac{y}{1-t}, \; z_0 = \frac{z_0}{1-t}.$$

i dalje da je

$$\frac{x^2}{a^2(1-t)^2} + \frac{y^2}{b^2(1-t)^2} = 1, \frac{z}{1-t} = c$$

Eliminacijom prametra t dobijamo jednačinu u izabranom koordinatnom sistemu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Ovu jednačinu nazivamo kanonskom jednačinom eliptičkog konusa.

Cilindrične površi

Posebnu klasu površi čine *cilindrične površi.*

Ako se kod pravolinijske popvrši Σ generatrisa G kreće tako da ostane paralelne fiksiranom vektoru $\vec{a} = (l, m, n)$, (disektrisa može biti bilo koja kriva), tada ta generatrisa formira površ koja se naziva *cilindričkom površi.* Pretpostavimo da je direktrisa D zadata kao presjek dvije površi:

$$D = \{(x, y, z) \in E : f(x, y, z) = 0, \; g(x, y, z) = 0.\}.$$

Ako je $M(X, Y, Z)$ proizvoljna tačka površi Σ, tada generatrisa koja prolazi kroz tačku M, prolazi i kroz neku tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$ koja pripada direktrisi D. Jednačina te generatrise je

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Tačka $M(X, Y, Z)$ pripada generatrisi, pa je

$$\frac{X - x_0}{l} = \frac{Y - y_0}{m} = \frac{Z - z_0}{n} = t.$$

$$x_0 = X - lt,\ y_0 = Y - mt,\ z_0 = Z - nt.$$

Ako ove formule uvrstimo u jednačine direktrise, dobićemo

$$f(X - tl, Y - tm, Z - tn) = 0,\ \ g(X - tl, Y - tm, Z - tn) = 0.$$

Rješavajući ove jednačine po t, slično kao kod konusnih površi dobijamo

$$t = g_1(X, Y, Z),)\ t = g_2(X, Y, Z),$$

odnosno uvrštavanjem t iz jedne od ovih jednačina u drugu, dobijamo jednačinu oblika

$$F(x, y, z) = 0,$$

odakle, s obzirom da je $M(X, Y, Z)$ proizvoljna tačka površi Σ, slijedi da svaka tačka ove površi zadovoljava jednačinu $F(x, y, z) = 0$. Može se dokazati i obrnuto tvrdjenje: Svaka tačka $M(x, y, z)$ čije koordinate zadovoljavaju jednačinu $F(x, y, z) = 0$ pripada površi Σ. Ukupno,

$$F(x, y, z) = 0$$

je jednačina površi Σ.

Na sljedećem primjeru ilustrovaćemo opisani metod izvodjenja jednačine cilindrične površi.

Primjer. Izvešćemo jednačinu cilindrične površi Σ, čija je direktrisa kružnica zadata kao presjek dvije površi: $x^2+y^2+z^2 = 1, x+y = 0$, a generatrsa je prva paralelna vektoru $\vec{p} = (1, 1, 0)$. Primijetimo da je jednčina generatrise koja prolazi kroz tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$, direktrise glasi:

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{0} = t.$$

Ako je $M(X, Y, Z)$ proizvoljna tačka površi, tada je

$$\frac{X - x_0}{1} = \frac{Y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{0} = t.$$

Slijedi, odavde $x_0 = X - t, y_0 = Y - t, z_0 = z$. Uvrstimo u jednačine direktrise. Imamo

$$(X - t)^2 + (Y - t)^2 + Z^2 = 1,\ \ X - t + Y - t = 0.$$

Pošto je $M(X, Y, Z)$ proizvoljna tačka površi Σ, pa dakle, da možemo u posljeednjim jednačinama oznake X, Y, Z za promjenljivu tačku površi, zamijeniti sa x, y, z. Odavde dobijamo $t = \frac{x+y}{2}$, Uvrstimo t u jednačinu $(X - t)^2 + (Y - t)^2 + Z^2 = 1$, dobijamo da proizvoljna tačka) $M(x, y, z)$, koja pripada cilindričnoj površi Σ zadovoljava jednačinu

$$\left(x - \frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{x+y}{2}\right)^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow (x - y)^2 + 2(z^2 - 1) = 0.$$

Na osnovu ranijih razmatranja i napomena zaključujemo da je $(x - y)^2 + 2(z^2 - 1) = 0$ jednačina površi Σ.

Primjer. Pretpostavimo da je direktrisa D ciklindrične površi Σ kriva u ravni Oxy zadata jednačinom $\phi(x, y) = 0$, i da je generatrisa paralrelna $z-$osi. Tada tačka $M(x, y, z)$ pripada površi Σ ako i samo ako njena ortogonalna projekcija M' pripada direktrisi D. To znači da $M(x, y, z) \in \Sigma$ ako samo ako njene koordinate x i y zadovoljavaju jednačinu direktrise. tj. ako i samo ako je $\phi(x, y) = 0$. Dakle, tada je

$$\Sigma = \{M(x, y, z) \in E : \phi(x, y) = 0\}.$$

Za ovu jednačinu kažemo da je jednačina cilindrične površi čija je generatrisa paralelna $z-$osi.

Specijalno, ako je

(a) $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsa tada kažemo da je to *eliptički cilindar.*

(b) $D : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbola tada kažemo da je to *hiperbolički cilindar.*

(c) $D : y^2 = 2px$ parabola tada kažemo da je to *parabolicki cilindar.*