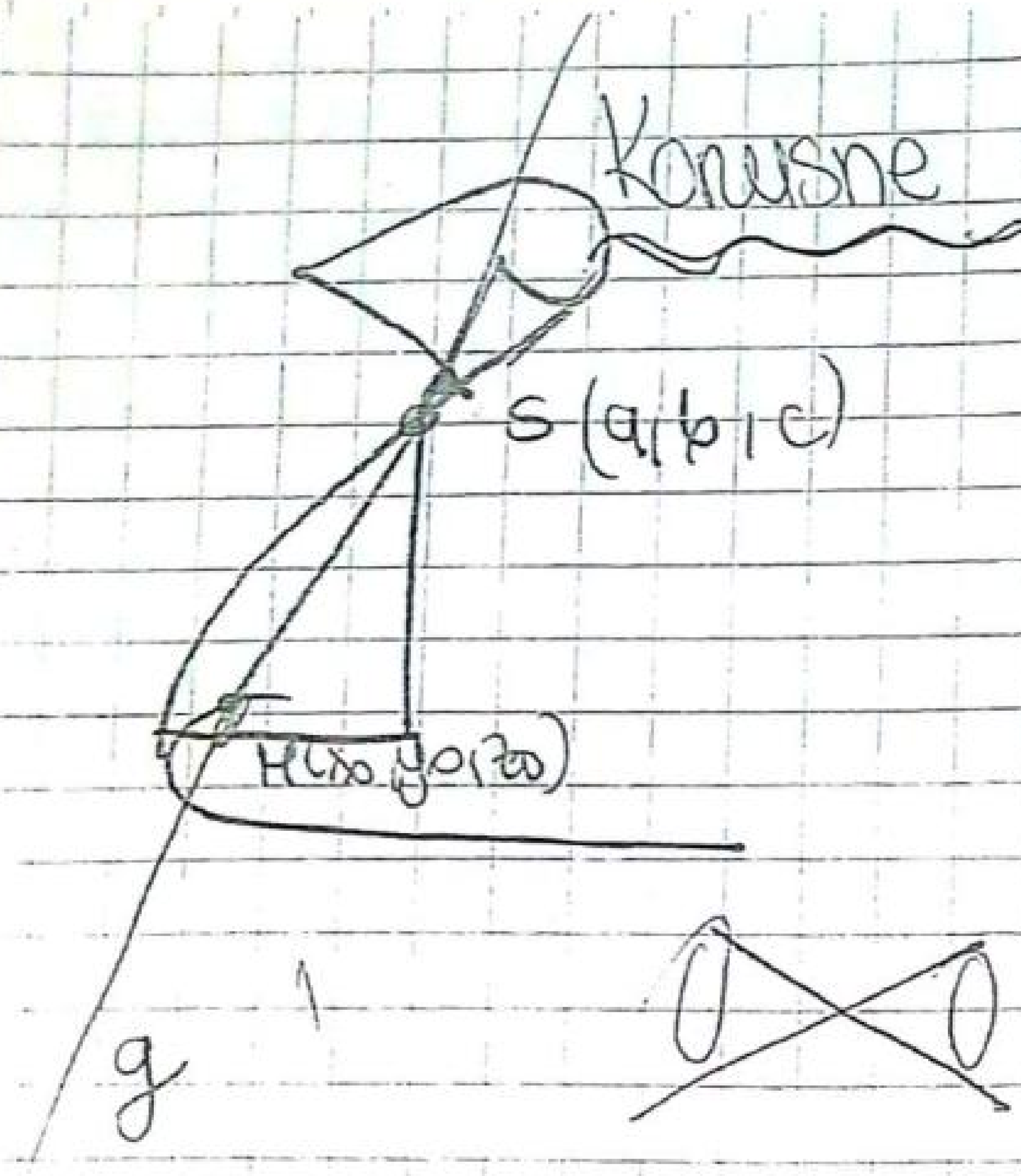
Konusne površi



$$d: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

$N(x_0,y_0,z_0) \in d$

$$g: \frac{x-a}{x_0-a} = \frac{y-b}{y_0-b} = \frac{z-c}{z_0-c}$$

$$g: \begin{cases} x = a+(x_0-a)t \\ y = b+(x_0-b)t \\ z = z+(z_0-c)t \end{cases}$$

Eliminisanjem x_0, y_0, z_0 dobijamo jednu jednačinu $F(x,y,z)=0$ to je jednačina konusne površi.

1) Odrediti jednačinu konusa čiji je vrh tačka $S(0,-a,0)$ a direktrisa $d: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y+z=a. \end{cases}$

$d: \begin{cases} y^2-2x=0 \\ z=0 \end{cases}$ $S(0,1,-1)$

1) $N(x_0,y_0,z_0) \in d$

Jednačina generatrise je

$$g: \frac{x}{x_0} = \frac{y+a}{y_0+a} = \frac{z}{z_0}$$

$$x_0 = \frac{x}{t}$$

$$y_0 = \frac{y+a}{t} - a$$

$$z_0 = \frac{z}{t}$$

$$g: \begin{cases} x = x_0 t \\ y = -a+(y_0+a)t \\ z = z_0 t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} t=0 & \\ x=0 & S(0,-a,0) \\ y=-a & \\ z=0 & \end{pmatrix}$$

Ned $\Rightarrow$ $y_0 + z_0 = a$

$$\frac{y+a}{t} - a + \frac{z}{t} = a$$

$$\frac{y+z+a}{t} = 2a$$

$$t = \frac{y+z+a}{2a}$$

$$x_0 = \frac{2ax}{y+z+a}$$

$$y_0 = \frac{(y+a)2a}{y+z+a} - a = \frac{ay+a^2-az}{y+z+a} = \frac{a(y+a-z)}{y+z+a}$$

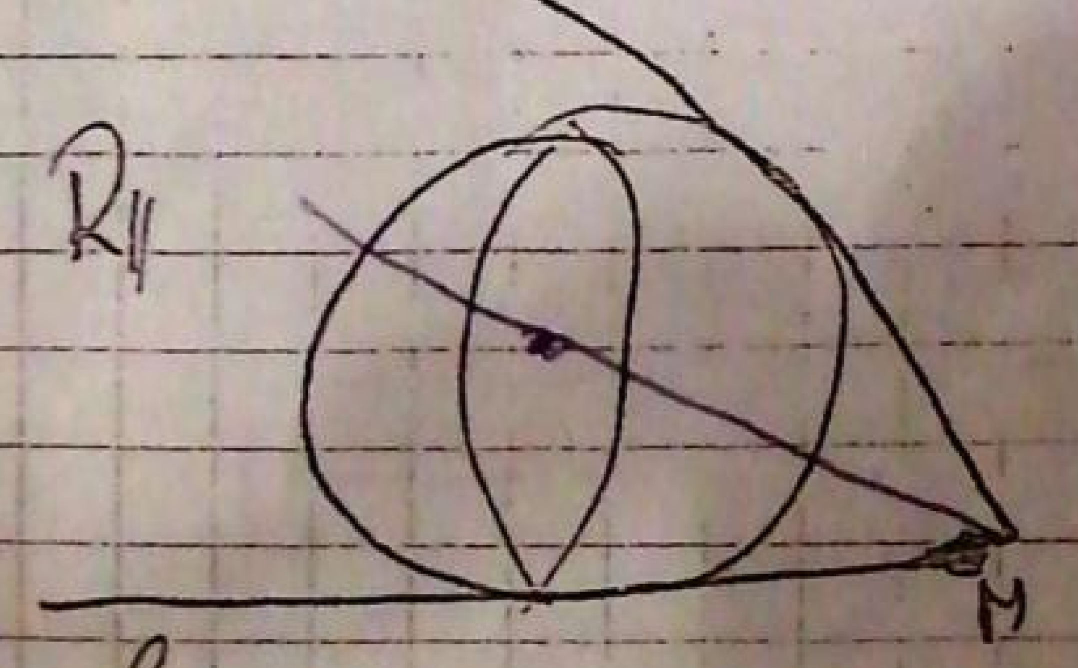
$$z_0 = \frac{2az}{y+z+a}$$

Ned $\Rightarrow$ $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = a^2$

$$\left(\frac{2ax}{y+z+a}\right)^2 + \left(a\,\frac{y+a-z}{y+z+a}\right)^2 + \left(\frac{2az}{y+z+a}\right)^2 = a^2$$

$x^2 + z^2 - yz - az = 0$ $\Rightarrow$ jednačina traženog konusa.

(2) Sfera $x^2+y^2+z^2=9$ osvjetljena je svjetlošću čiji se izvor nalazi u tački $M(5,0,0)$. Naći oblik sjenke u ravni yOz.



Zraci koji tangiraju sferu formiraju konusnu površ. Neka je l proizvoljan takav zrak i neka je $\vec{s_l} = (m,n,p)$

$$l = \frac{x-5}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$$

Nađimo $l \cap (S)$

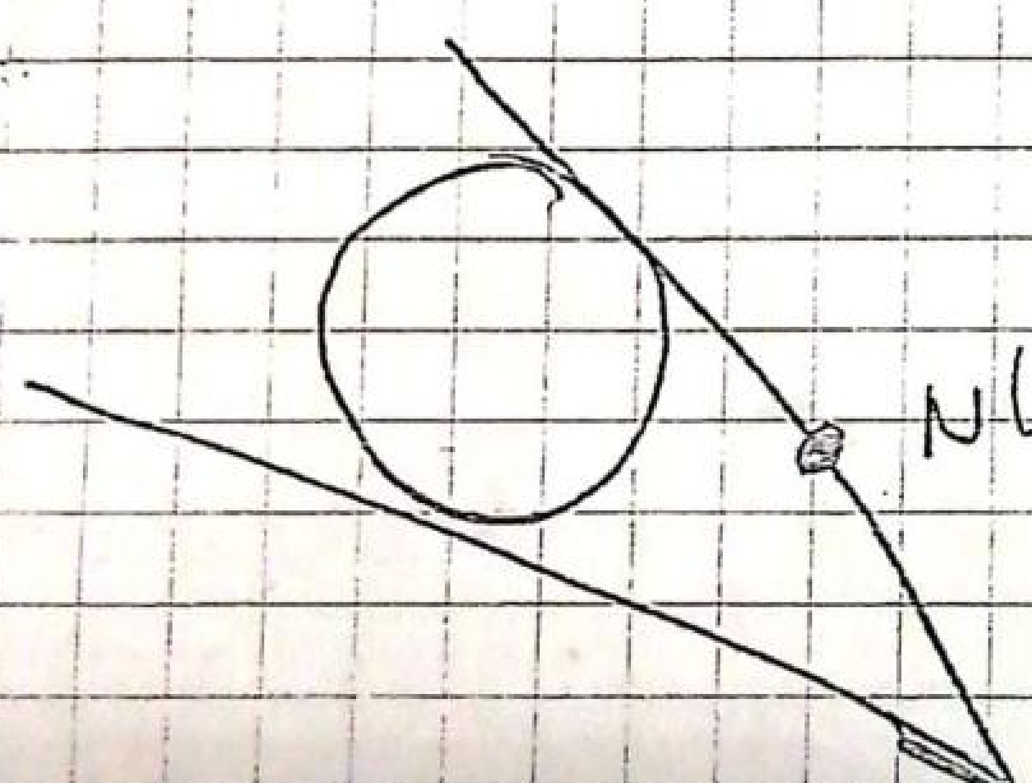
$$l: \begin{cases} x = 5 + mt \\ y = nt \\ z = pt \end{cases}$$

$$(5+mt)^2 + n^2t^2 + p^2t^2 = 9$$
$$(m^2+n^2+p^2)t^2 + 10mt + 16 = 0$$

Jednačina ima samo jedno rješenje pa je $D=0$, odavde slijedi:

$$100m^2 - 4(m^2+n^2+p^2)\cdot 16 = 0$$
$$9m^2 - 16n^2 - 16p^2 = 0 \quad (*)$$

Vektor pravca proizvoljnog zraka koji tangira sferu zadovoljava ~~...~~ jednačinu (*).



Neka je $N(x,y,z)$ proizvoljna tačka konusne površi.

Zrak određen tačkama M i N ima vektor pravca $\vec{MN} = (x-5, y, z)$

Ovaj vektor zadovoljava jednačinu (*).

$$9(x-5)^2 - 16y^2 - 16z^2 = 0 \rightarrow \text{jednačina konusne površi}$$

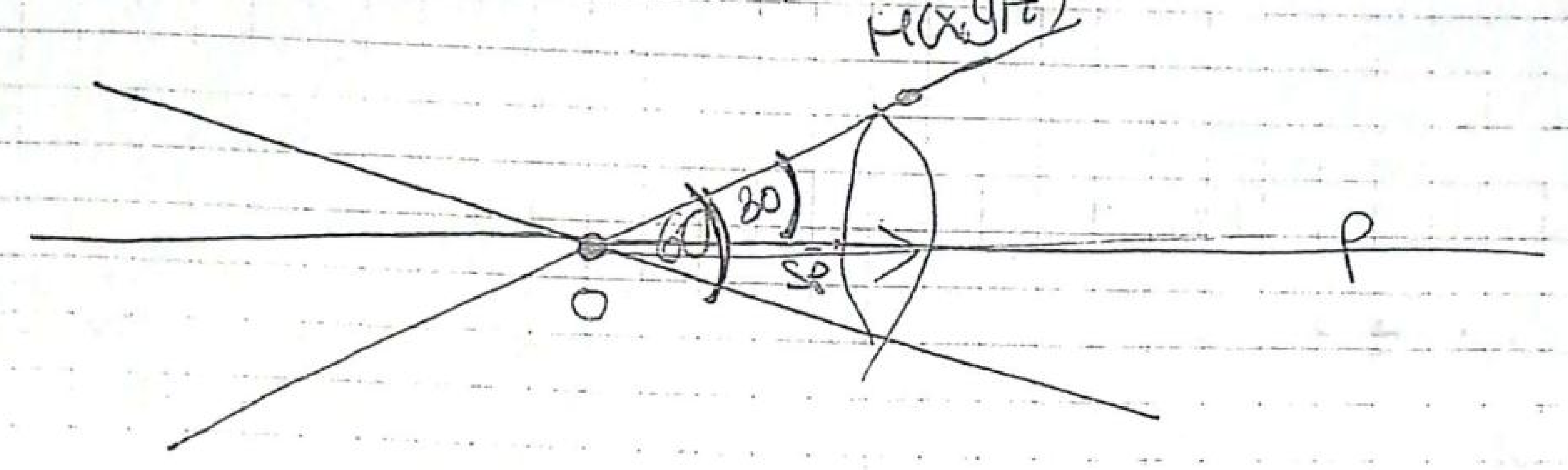
Sjenka je

$$\begin{cases} 9(x-5)^2 - 16y^2 - 16z^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16y^2 + 16z^2 = 225 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ubaciti H 3. zadatak, zeleni

③ Napisati jednačinu konusne površi kojoj je osa prava $p: \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}$ vrh u tački $O(0,0,0)$, a ugao otvora pri vrhu $2\alpha=60°$.

R/



$\alpha=30°$. Ugao između izvodnice $l(OM)$ i ose p je ugao α, tj. to je ugao između vektora $\vec{sp}$ ili $-\vec{sp}$ i vektora $\vec{OM}$.

$$\alpha = \angle(\vec{OM}, \pm\vec{sp}) \qquad \vec{OM}=(x,y,z)$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{\vec{OM}\cdot\vec{sp}}{|\vec{OM}||\vec{sp}|} \qquad \vec{sp}=(2,3,6)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \pm\frac{2x+3y+6z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{4+9+36}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \pm\frac{2x+3y+6z}{7\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Big/ 14\sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$$

$$\left(x^2+y^2+z^2=0 \iff x=y=z=0\right)$$

$$7\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2(2x+3y+6z) \Big/^2$$

$$147(x^2+y^2+z^2) = 4(2x+3y+6z)^2$$

$\Rightarrow$ jednačina konusne površi.

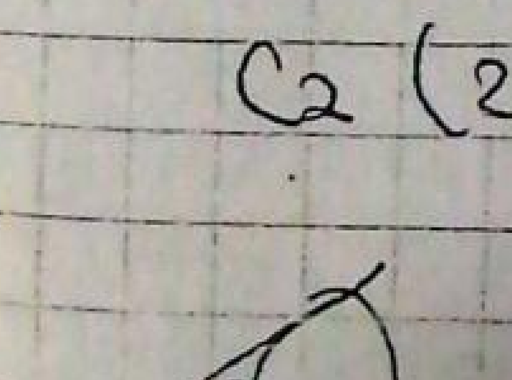
④ Odrediti jednačinu konusne površi koja je opisana oko sfera:

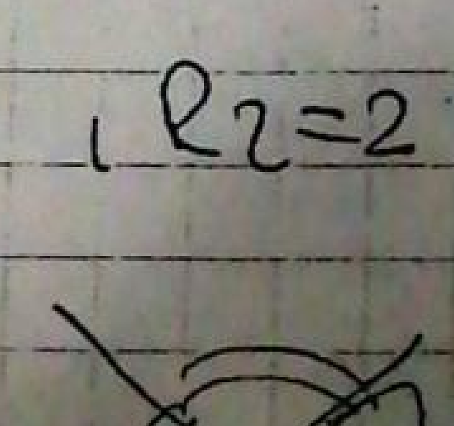
$S_1: x^2+y^2+z^2=1$

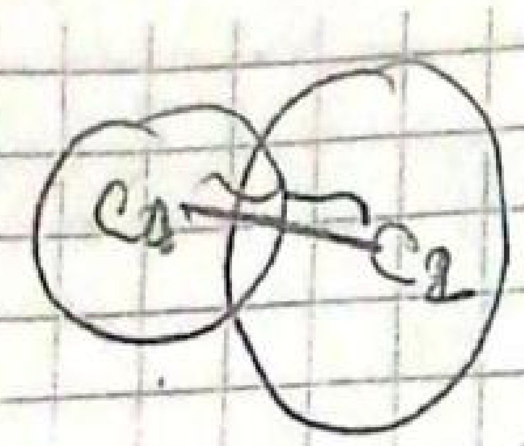
$S_2: (x-2)^2+y^2+z^2=4$

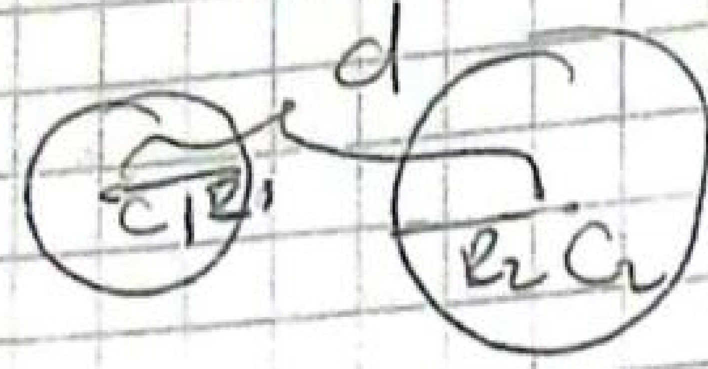
R/ $C_1(0,0,0)$ $R_1=1$

$C_2(2,0,0)$, $R_2=2$









$R_1 + R_2 > d$

sijeku se

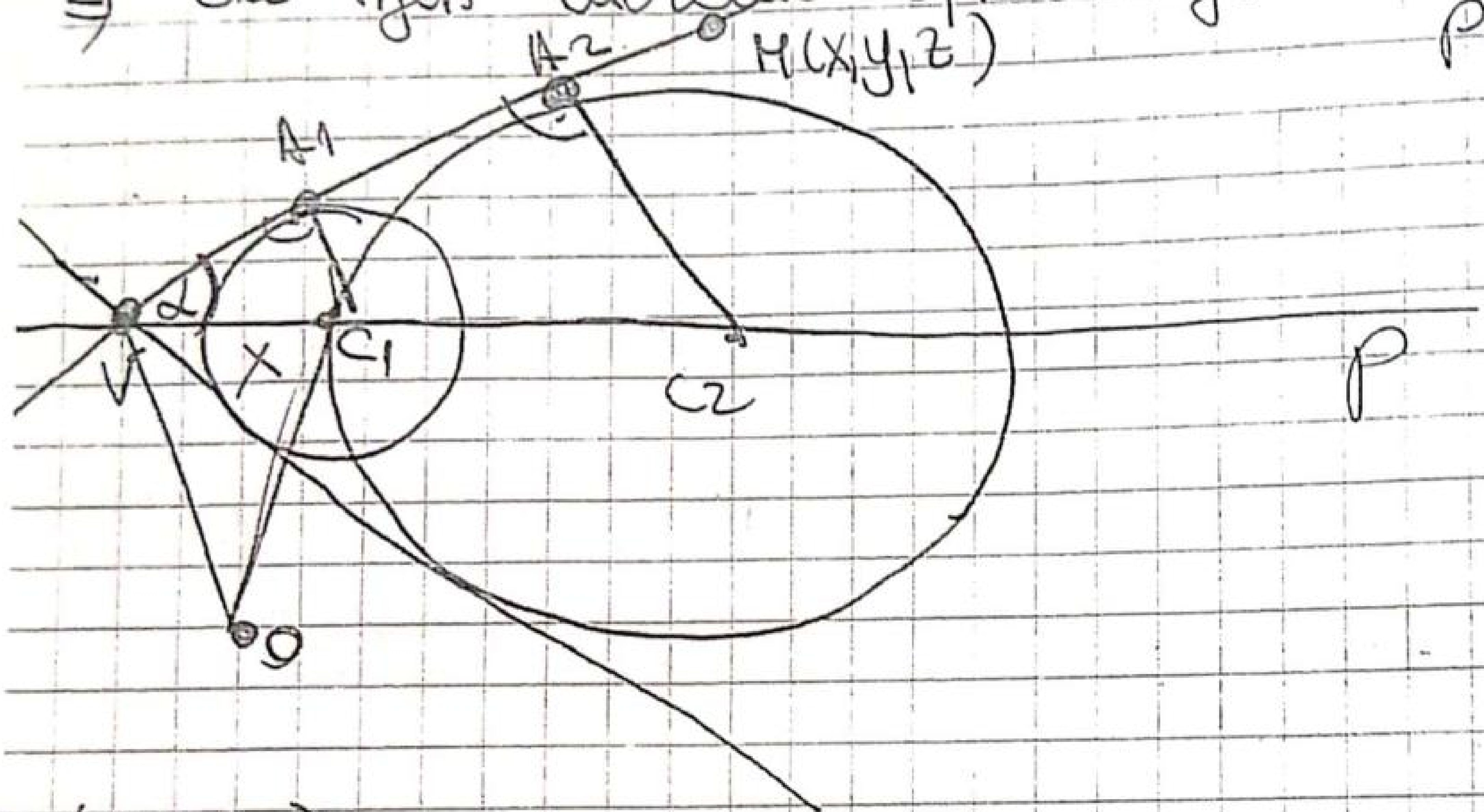
$R_1 + R_2 < d \Rightarrow$ ne sijeku se

$1 = d(C_1, C_2) = \sqrt{4+0+0} = 2$

$R_1 + R_2 = 3$

$R_1 + R_2 > d \Rightarrow$ sfere se sijeku $\left(\begin{array}{l} \text{Uočimo da } C_1 \in S_2 \\ (0-2)^2 + 0^2 = 0^2 = 4 \Rightarrow \text{sijeku se} \\ 4 = 4 \end{array} \right)$

$\Rightarrow$ oko njih možemo opisati jednu konusnu površ.



$p(C_1, C_2) =$

A_1 tačka u kojoj izvodnica dodiruje sferu S_1

A_2 —||— —||— S_2

Uočimo da je $|\overrightarrow{C_1A_1}| = R_1$

$|\overrightarrow{C_2A_2}| = R_2$

$|\overrightarrow{VC_1}| = x$.

trouglovi VC_1A_1 i VC_2A_2 su slični $\left(\begin{array}{l} \measuredangle C_1VA_1 = \measuredangle C_2VA_2 = \alpha \\ \measuredangle C_1A_1V = \measuredangle C_2A_2V = 90^\circ \end{array} \right)$

$$\frac{|\overrightarrow{VC_1}|}{|\overrightarrow{C_1A_1}|} = \frac{|\overrightarrow{VC_2}|}{|\overrightarrow{C_2A_2}|} \qquad \frac{x}{R_1} = \frac{x+d}{R_2}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{x+2}{2}$$

$$2x = x + 2$$

$\vec{OV} = \vec{OC_1} + \vec{C_1V}$

$\vec{OV} = \vec{OC_1} + x \cdot \frac{1}{|\vec{C_2C_1}|} \vec{C_2C_1}$

$\vec{OV} = \vec{0} + \frac{2}{2} \cdot (-2,0,0)$

$\vec{OV} = (-2,0,0) \Rightarrow V = (-2,0,0)$

(* Napomena: $p: \frac{x}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0} \Rightarrow V(-a,0,0)$, ako p je $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$)

$\Delta VC_1A_1:\quad \sin\alpha = \frac{|\vec{C_1A_1}|}{|\vec{VC_1}|}$

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{6} \quad \alpha = 30°$

Neka je $M(x,y,z)$ proizvoljna tačka konusa. Ugao između izvodnice $l(VM)$ i ose p je ugao α, a to je ugao između vektora $\vec{VM}$ i vektora $\vec{s_p}$ $(-\vec{s_p})$

$\alpha = \sphericalangle(\vec{VM}, \pm\vec{s_p})$

$\cos\alpha = \pm \frac{\vec{VM} \cdot \vec{s_p}}{|\vec{VM}||\vec{s_p}|}$

$\vec{VM} = (x+2, y, z)$

$\vec{s_p} = (1,0,0)$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \pm \frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2} \cdot 1}$

$4(x+2)^2 = 3(x+2)^2 + 3y^2 + 3z^2$ → jednačina konusne površi.