æ ■

Glava V

RIEMANNOV INTEGRAL

1. Prsten skupova

1.1. Uvod. Naši matematički preci, na primjer Arhimed i Newton, nijesu postavljali pitanje šta su to površina i zapremina već kako ih izračunati. Integral se pojavio kao apstrakcija njihovog metoda računanja. Opisnim jezikom govoreći, radi se o sljedećem. Neka je A skup tačaka u E^3. Uzmimo proizvoljnu ravan $E^2 \subset E^3$ i kroz svaku tačku $x \in E^2$ postavimo pravu R_x ortogonalnu na E^2. Pretpostavimo da je skup A takav da za svaki $x \in E^2$, $R_x \cap A$ prazan skup ili unija konačno mnogo zatvorenih intervala. Zbir dužina intervala koji odgovaraju tački $x \in E^2$ označimo sa $f(x)$. Neka je D skup onih $x \in E^2$ za koje je $f(x) \neq 0$. Zapreminu skupa A označimo sa $\int_D f$. Iz očiglednih razloga od funkcije $(D, f) \longmapsto \int_D f$ očekujemo da ima sljedeća svojstva:

Slika 26.

(a) $\displaystyle\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g;\ \ \int_D (\alpha f) = \alpha \int_D f.$

(b) Ako je $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, onda je $\displaystyle\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$

(c) Ako je $f \leq g$, onda je $\displaystyle\int_D f \leq \int_D g$.

(d) $\displaystyle\int_D \kappa_D = \mu(D)$,

gdje je κ_d karakteristična funkcija skupa D a $\mu(D)$ njegova površina.

(Relacija (d) znači: kada je visina jednaka 1, onda je zapremina tijela jednaka površini baze).

Bilo bi idealno kad bi se preslikavanje $(D, f) \longmapsto \int_D f$ sa svojstvima (a)–(d) moglo definisati za sve skupove $D \subset \mathbf{R}^n$ i sve funkcije $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. U Glavi VI ćemo vidjeti da je poredak stvari u prirodi takav, da to nije moguće učiniti na zadovoljavajući način, što znači da se mora zahtijevati neka pravilnost od skupova i funkcija koji se razmatraju.

Prirodan zahtjev je da unija, presjek i razlika mjerljivih skupova bude mjerljiv skup. Minimum aksioma koje to objezbeđuje navodimo u sljedećoj definiciji.

1.2. Definicija. Familija $\mathcal{R}$ podskupova od X naziva se *prstenom* na X ako:

(1) $$\text{iz } A \in \mathcal{R} \text{ i } B \in \mathcal{R} \text{ slijedi } A \cup B \in \mathcal{R} \text{ i } A - B \in \mathcal{R}.$$

Ako je pritom $X \in \mathcal{R}$, za $\mathcal{R}$ se kaže da je *prsten s jedinicom* ili *algebra*.

Iz $\varnothing = A - A$, $A \cap B = A - (A - B)$ i (1) slijedi da prsten $\mathcal{R}$ sadrži prazan skup i da su unija i presjek konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{R}$ ponovo elementi iz $\mathcal{R}$.

Motiv za izbor naziva prsten treba dovesti u vezu sa zadatkom 1.

Dalje ograničenje za familiju mjerljivih skupova bio bi zahtjev da, na primjer, intervali, ili šire, sve standardne geometrijske figure budu mjerljivi skupovi. U vezi s tim dokažimo sljedeće tvrđenje.

1.3. Lema. *Za svaku familiju $\mathcal{P}$ podskupova od X postoji minimalni (u odnosu na inkluziju) prsten $\mathcal{R}$ na X koji sadrži elemente iz $\mathcal{P}$.*

Dokaz. Presjek proizvoljne familije prstena na X je prsten na X. Presjek $\mathcal{R}$ svih prstena na X koji sadrže elemente iz $\mathcal{P}$ je najmanji takav prsten na X.

1.4. Definicija. *Intervalom* u $\mathbf{R}^n$ naziva svaki skup I^n_{ab} takav da je $\overset{\circ}{I}{}^n_{ab} \subset I^n_{ab} \subset \overline{I}{}^n_{ab}$, gdje su $\overset{\circ}{I}{}^n_{ab} = (a^1, b^1) \times \cdots \times (a^n, b^n)$ i $\overline{I}{}^n_{ab} = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^n, b^n]$ otvoreni i zatvoreni interval određen tačkama $a = (a^1, \ldots, a^n)$, $b = (b^1, \ldots, b^n)$, $a^i \leq b^i$, $i = 1, \ldots, n$. Ako je $b^1 - a^1 = \cdots = b^n - a^n$, onda se I^n_{ab} naziva (n-dimenzionalnim) kubom.

Pošto unija dva intervala u $\mathbf{R}^n$ ne mora biti interval, intervali u $\mathbf{R}^n$ ne čine prsten. Familija intervala u $\mathbf{R}^n$ ima svojstva iz sljedeće definicije, koja se koriste pri konstrukciji najmanjeg prstena na $\mathbf{R}^n$ koji sadrži sve intervale.

1.5. Poluprsten. Familija $\mathcal{P}$ podskupova skupa X naziva se *poluprstenom* na X ako ima sledeća svojstva:

(a) $\varnothing \in \mathcal{P}$.

(b) Ako je $A \in \mathcal{P}$ i $B \in \mathcal{P}$, onda je $A \cap B \in \mathcal{P}$.

(c) Za svaka dva skupa $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ postoji konačno mnogo disjunktnih skupova $C_1, \dots, C_m$ iz $\mathcal{P}$, takvih da je $A - B = C_1 \cup \cdots \cup C_m$.

Lako je vidjeti da je svaki prsten istovremeno i poluprsten.

1.6. Lema. *Familija $\mathcal{P}$ koju čine prazan skup i svi intervali u $\mathbf{R}^n$ čini poluprsten.*

(Ovaj poluprsten zvaćemo *poluprstenom intervala* i u daljem označavati sa $\mathcal{I}$).

Dokaz. Ako je $I_1^n = [a_1^1, b_1^1] \times \cdots \times [a_1^n, b_1^n]$, $I_2^n = [a_2^1, b_2^1] \times \cdots \times [a_2^n, b_2^n]$, onda je $I_1^n \cap I_2^n = ([a_1^1, b_1^1] \cap [a_2^1, b_2^1]) \times \cdots \times ([a_1^n, b_1^n] \cap [a_2^n, b_2^n])$ i za dokaz tvrđenja (b) ostaje da se primijeti da je presjek dva intervala u polju realnih brojeva takođe interval. Dalje iz $I_1^n - I_2^n = I_1^n - (I_1^n \cap I_2^n)$ i dokazanog svojstva (b) slijedi da možemo pretpostaviti da je $I_2^n \subset I_1^n$. Tada je $[a_1^k, b_1^k] = [a_2^k, b_2^k] \cup U \cup V$, gdje je svaki od skupova u uniji interval ili prazan skup, pri čemu su skupovi $[a_2^k, b_2^k], U, V$ disjunktni. Neka je $I_i^{n-1} = [a_i^1, b_i^1] \times \cdots \times [a_i^{n-1}, b_i^{n-1}]$, $i = 1, 2$. Slijedi da je

$$\begin{aligned} I_1^n = I_1^{n-1} \times [a_1^n, b_1^n] &= \big(I_1^{n-1} \times [a_2^n, b_2^n]\big) \cup \big(I_1^{n-1} \times U\big) \cup \big(I_1^{n-1} \times V\big), \\ I_1^n - I_2^n &= \big([I_1^{n-1} - I_2^{n-1}] \times [a_2^n, b_2^n]\big) \cup \big(I_1^{n-1} \times U\big) \cup (I_1^{n-1} \times V) \end{aligned}$$

i dokaz tvrđenja za $\mathbf{R}^n$ sveden je na dokaz da tvrđenje važi u $\mathbf{R}^{n-1}$. Indukcijom, dokaz se svodi na slučaj $n = 1$, a tamo se dokazuje trivijalno.

Evo karakterizacije najmanjeg prstena koji sadrži intervale.

1.7. Lema. *Ako je $\mathcal{P}$ poluprsten na X, onda je familija $\mathcal{E}$ svih konačnih unija elemenata iz $\mathcal{P}$ najmanji prsten koji sadrži elemente iz $\mathcal{P}$.*

Iz 1.9 slijedi da se $\mathcal{E}$ može okarakterisati i sa: elementi iz $\mathcal{E}$ su konačne unije disjunktnih elemenata iz $\mathcal{P}$.

Dokaz. Ako je $A = \bigcup_{i=1}^m C_i$, $B = \bigcup_{j=1}^n D_j$, $C_i \in \mathcal{P}$, $D_j \in \mathcal{P}$, onda je $A \cup B = \bigcup_{k=1}^{m+n} E_k$, gdje je $E_i = B_i$ za $1 \le i \le m$, $E_{m+j} = D_j$, $1 \le j \le n$. To znači da je $A \cup B$ unija konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{P}$, tj. $A \cup B \in \mathcal{E}$. Dalje,

$$A - B = \bigcup_{i=1}^m C_i - \bigcup_{j=1}^n D_j = \bigcup_{i=1}^m \Big(C_i - \bigcup_j D_j\Big) = \bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^n (C_i - D_j).$$

S obzirom da je $C_i \in \mathcal{P}$, $D_j \in \mathcal{P}$, iz (c) slijedi da je $C_i - D_j \in \mathcal{P}$, te da je $A - B$ unija elemenata iz $\mathcal{P}$ a time i $A - B \in \mathcal{E}$.

1.8. Elementarni skupovi. Skup $E \subset \mathbf{R}^n$ naziva se *elementarnim* ako je unija konačne familije intervala. Iz 1.7 slijedi da elementarni skupovi u $\mathbf{R}^n$ čine prsten. Označavaćemo ga sa $\mathcal{E}$.

Dokažimo da je svaki elementarni skup unija konačno mnogo disjunktnih intervala.

1.9. Lema. *Za svaku najviše prebrojivu familiju $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ elemenata poluprstena $\mathcal{P}$ postoji familija (B_m) disjunktnih elemenata iz $\mathcal{P}$ takva da je $\bigcup_n A_n = \bigcup_m B_m$. Pritom se skupovi B_m mogu izabrati tako da je za svaki m, $B_m \subset A_n$ za neki n. Ako je $\mathcal{P}$ prsten, onda se može staviti $m = n$.*

Dokaz. Za $A_i \in \mathcal{P}$, $i = 1, \dots, n$, $(n \geq 2)$ definišemo $\widetilde{B}_1 = A_1$, $\widetilde{B}_i = A_i - (A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1})$ za $2 \leq i \leq n$. Očigledno, $\widetilde{B}_i \cap \widetilde{B}_j = \varnothing$ za $i \neq j$, $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \widetilde{B}_1 \cup \ldots \cup \widetilde{B}_n$. (Ako je $\mathcal{P}$ prsten, dokaz se ovdje završava). Dokažimo da je svaki $\widetilde{B}_i$ unija disjunktnih elemenata iz poluprstena $\mathcal{P}$. S obzirom da je

$$A_i - (A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1}) = (\cdots((A_i - A_1) - A_2) - \cdots A_{i-1}),$$

$$A_i - A_1 = \bigcup_{j=1}^{k} C_j, \quad C_j \in \mathcal{P},$$

jasno je da je dovoljno dokazati da je za proizvoljne disjunktne skupove $C_1, \dots, C_k$ iz $\mathcal{P}$ i proizvoljan $A \in \mathcal{P}$ postoje disjunktni skupovi $D_1, \dots, D_l \in \mathcal{P}$ takvi da je $\bigcup_{j=1}^k C_j - A = \bigcup_{i=1}^l D_i$. No to slijedi trivijalno iz reprezentacije $\bigcup C_j - A = \bigcup (C_j - A)$ i svojstva (c) iz definicije 1.5 poluprstena.

1.10. Zadaci za vježbu

1. Neka je $\mathcal{R}$ prsten na X, a $+$ i $\cdot$ operacije na X definisane sa $A + B = A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ (*simetrična razlika* skupova A i B), $A \cdot B = A \cap B$. Dokazati da je $(X, +, \cdot)$ prsten čija je nula $\varnothing$ (a jedinica X ako je $X \in \mathcal{R}$).
2. Dokazati da je presjek proizvoljne kolekcije prstena prsten.

2. Produženje aditivne funkcije skupa s poluprstena na minimalni prsten

2.1. Funkcija skupa. *Funkcijom skupa* zvaćemo svako preslikavanje $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbf{R}}$ čiji je domen neka familija $\mathcal{P}$ skupova, a kodomen prošireni skup realnih bro jeva $\overline{\mathbf{R}}$.

Funkcija skupa $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbf{R}}$ naziva se:

(i) *aditivnom*, ako iz $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, $A \cup B \in \mathcal{P}$, $A \cap B = \varnothing$ slijedi

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{1}$$

(ii) *monotonom*, ako iz $A \subset B$ slijedi $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Pošto nas prije svega interesuju aditivne funkcije skupa, (jer mi generalizujemo geometrijsku predstavu o površini, zapremini i masi), po definiciji se pretpostavlja da funkcija skupa može uzimati samo jednu od vrijednosti $\pm\infty$. (Tako se obezbjeđuje da relacija (i) uvijek ima smisla). Takođe po definiciji, isključuju se funkcije skupova koje imaju samo vrijednosti $+\infty$ ili $-\infty$.

Iz (1) slijedi da je $\mu(\varnothing) = \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing)$, što znači da je

$$\mu(\varnothing) = 0, \tag{2}$$

ako je $\mu(\varnothing) \neq \pm\infty$. Dalje, iz (1) indukcijom dobijamo da $A_i \in \mathcal{P}$, $i = 1, \ldots, k$, $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{P}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ za $i \neq j$, implicira

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_k). \tag{3}$$

Slijedi da je $\mu(A \cup B) = \mu(A - (A \cap B)) + \mu(B - (A \cap B)) + \mu(A \cap B)$, odakle dobijamo

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{4}$$

Ako je $B \subset A$ i $\mu(B) \neq \pm\infty$, onda je

$$\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B). \tag{5}$$

Na kraju, ako je μ aditivna i nenegativna iz (1) slijedi da je μ monotona.

2.2. Primjer. (Zapremina intervala). Ako je I^n_{ab} interval u smislu definicije 1.4, onda se *zapreminom* intervala I^n_{ab} naziva broj $\mu(I^n_{ab}) = (b^1 - a^1) \cdot \ldots \cdot (b^n - a^n)$.

Podvucimo da po ovoj definiciji i zatvoreni i otvoreni i poluotvoreni intervali određeni tačkama a, b imaju istu zapreminu. Zapremina intervala $\mu : \mathcal{I} \to \mathbf{R}$ je aditivna funkcija skupa na familiji $\mathcal{I}$ svih intervala u $\mathbf{R}^n$. Zaista, iz $(b^i - a^i)x = (b^i - c^i)x + (c^i - a^i)x$ i $I^n = I^n_1 \cup I^n_2$, $I^n_1 \cap I^n_2 = \varnothing$ slijedi da je

$$\mu(I^n) = \mu(I^n_1) + \mu(I^n_2).$$

2.3. Primjer. Neka je $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ proizvoljna neopadajuća funkcija. Tada postoji $g(x+0) = \lim_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} g(x + \varepsilon)$, $g(x-0) = \lim_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} g(x - \varepsilon)$. Za interval I u $\mathbf{R}$ čije su krajnje tačke a i b, $a < b$, definišemo

$$\mu_g((a, b)) = g(b - 0) - g(a + 0),$$
$$\mu_g([a, b)) = g(b - 0) - g(a - 0),$$

$$\mu_g([a,b]) = g(b+0) - g(a-0),$$
$$\mu_g((a,b]) = g(b+0) - g(a+0).$$

Funkciju skupa μ_g (definisanu ovim relacijama na familiji svih intervala realne prave), koristićemo docnije pri konstrukciji jedne mjere na $\mathbf{R}$. Funkcija μ_g je aditivna. Zaista, ako je $a < c < b$, onda je, na primjer,

$$\begin{aligned}\mu_g([a,c) \cup [c,b]) &= \mu_g([a,b]) = g(b+0) - g(a-0)\\ &= [g(c-0) - g(a-0)] + [g(b+0) - g(c-0)]\\ &= \mu_g([a,c)) + \mu_g([c,b]).\end{aligned}$$

Kada je definisana zapremina intervala 2.4, onda se sama od sebe nameće definicija zapremine elementarnog skupa. U vezi s tim dokažimo sljedeće tvrđenje:

2.4. Teorema (o proširenju). *Neka je $\mathcal{P}$ poluprsten i $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbf{R}}$ aditivna funkcija skupa. Tada na minimalnom prstenu $\mathcal{E}$ koji sadrži elemente iz $\mathcal{P}$ postoji tačno jedna aditivna funkcija skupa koja je ekstenzija funkcije μ.*

Dokaz. Ako ekstenzija postoji, onda na osnovu 1.7 i 2.1 ona mora biti definisana ovako: ako je $E \in \mathcal{E}$ i

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \tag{6}$$

jedna reprezentacija skupa E takva da je $A_i \in \mathcal{P}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ za $i \neq j$ (vidi 1.7 i 1.9), onda je

$$\widetilde{\mu}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i). \tag{7}$$

(To istovremeno znači da je $\widetilde{\mu}(A) = \mu(A)$ za $A \in \mathcal{P}$). Treba dokazati da suma na desnoj strani relacije (7) ne zavisi od reprezentacije (6) i da je $\widetilde{\mu}$ aditivna funkcija skupa. Neka je

$$E = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$$

još jedna reprezentacija takva da je $B_k \cap B_l = \varnothing$, $B_j \in \mathcal{P}$. Pošto je svaki A_i prekriven elementima familije $\{B_j\}$, važi $E = \bigcup_{i,j}(A_i \cap B_j)$, pri čemu je $A_i \cap B_j \in \mathcal{P}$. Po pretpostavci μ je aditivna na $\mathcal{P}$, pa je:

$$\sum_i \mu(A_i) = \sum_i \sum_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_j \sum_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_j \mu(B_j).$$

Dokazali smo da je definicija (7) korektna. Dokažimo da je $\widetilde{\mu}$ aditivna. Neka je

$$E = \bigcup_i E_i,$$

pri čemu je sada $E_k \cap E_l = \varnothing$ za $k \neq l$. Za svaki i postoji familija $\{A_{ij}\}_{1 \leq j \leq n_i}$ disjunktnih elemenata A_{ij} iz $\mathcal{P}$ takvih da je

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} A_{ij}.$$

Pritom je $A_{ij} \cap A_{kl} = \varnothing$ ako je $k \neq i$ ili $l \neq j$ i

$$E = \bigcup_{i,j} A_{ij}, \quad \widetilde{\mu}(E) = \sum_{i,j} \mu(A_{ij}).$$

Koristeći aditivnost funkcije μ na $\mathcal{P}$ dobijamo:

$$\widetilde{\mu}(E) = \sum_i \sum_j \mu(A_{ij}) = \sum_i \mu(E_i),$$

što je trebalo dokazati.

2.5. Zapremina elementarnog skupa. Na osnovu 2.4, na prstenu $\mathcal{E}$ elementarnih skupova postoji tačno jedna aditivna funkcija skupa iz $\mathcal{E}$ u $\mathbf{R}$, koja na intervalima $I^n \in \mathcal{I} \subset \mathcal{E}$ uzima vrijednost $\mu(I^n)$ — zapremina intervala. Zvaćemo je *zapreminom*, (a od paragrafa 4 pa dalje i *Jordanovom mjerom*) elementarnih skupova i označavati sa μ.

2.6. Zadaci za vježbu

1. Neka je I^n interval i $x^i = b^i - a^i$ dužina njegove i-te stranice. Tada je $\mu(I^n) = x^1 \cdot \ldots \cdot x^n$, tj. polinom. Dokazati da za svaki interval I^n i svaki $\varepsilon > 0$ postoje intervali I_1^n i I_2^n takvi da je $I_1^n \subset I^n \subset I_2^n$ i dužine njihovih stranica su racionalni brojevi.
2. Neka je $\mu(I^m)$ zapremina m-dimenzionalnog, a $\mu(I^n)$ zapremina n-dimenzionalnog intervala. Ako je $I^{m+n} = I^m \times I^n$, dokazati da je $\mu(I^{m+n}) = \mu(I^m)\mu(I^n)$.

3. Prsten skupova mjerljivih po Jordanu

Prsten $\mathcal{E}$ elementarnih skupova ne obuhvata čak ni figure koje se sretaju u elementarnoj geometriji, kao što su trougao, krug itd. (zadatak 1). Zato je opravdano nastaviti sa proširivanjem familije mjerljivih skupova. Pošto je $\mathcal{E}$ prsten, proširivanje nije moguće učiniti pravljenjem konačnih unija, presjeka i razlika, jer se na taj način ponovo dobijaju elementi iz $\mathcal{E}$.

Ideja koju slijedimo u ovom paragrafu je ideja o aproksimaciji, koja je u vezi sa prvobitnim zadatkom o izračunavanju površine i zapremine figura u elementarnoj geometriji. Naime, familiji $\mathcal{E}$ dodaćemo podskupove od $\mathbf{R}^n$ koji se mogu dobro aproksimirati elementima iz samog $\mathcal{E}$. Za mjeru aproksimacije skupa A elementarnim skupom E uzećemo infimum zapremina svih elementarnih skupova koji pokrivaju skup $(A - E) \cup (E - A)$. Obavićemo zato sljedeću proceduru. Za svaki skup A koji se može prekriti elementarnim skupovima E, tražimo infimum mjera svih elementarnih skupova u kojima leži A.

3.1. Lema. *Neka je $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbf{R}}$ nenegativna funkcija skupa, takva da je $\mu(\varnothing) = 0$ i $\mathcal{R}$ familija skupova A koji imaju svojstvo da se mogu pokriti sa po konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{P}$. Tada je $\mathcal{R}$ prsten a funkcija $\mu^* : \mathcal{R} \to \mathbf{R}$ definisana sa*

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{m} \mu(E_i) : E_i \in \mathcal{P},\ \bigcup_{i=1}^{m} E_i \supset A\right\} \tag{1}$$

ima sljedeća svojstva:

(a) *Ako $A_i \in \mathcal{R}$ za $i = 1, \ldots, k$, onda je*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \mu^*(A_i). \tag{2}$$

(b) *Ako je $A \subset B$ onda je $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*

(c) $\mu^*(\varnothing) = 0$.

(Za funkciju skupa koja ima svojstvo (a) kaže se da je *subaditivna*).

Dokaz. Svojstvo (c) je očigledno. Svojstvo (b) postaje očigledno ako se primjeti da je za $A \subset B$, svaki pokrivač od B istovremeno i pokrivač od A. Dokažimo tvrđenje (a): Neka je $\varepsilon > 0$ i $A_1, \ldots, A_k$ niz elemenata iz $\mathcal{R}$. Za svaki $i = 1, \ldots, k$ postoji niz (E_{ij}) takav da je

$$A_i \subset \bigcup_{j=1} E_{ij}, \quad \sum_{j=1} \mu(E_{ij}) \leq \mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}. \tag{3}$$

Dvojni niz (E_{ij}) tada pokriva skup $\bigcup_i A_i$, pa iz (1) i (3) slijedi da je:

$$\mu^*\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_{i,j} \mu(E_{ij}) = \sum_i \sum_j \mu(E_{ij}) \leq \sum_i \left(\mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right),$$

odnosno

$$\mu^*\Big(\bigcup_i A_i\Big) \le \sum_i \mu^*(A_i) + \varepsilon. \tag{4}$$

Pošto (4) važi za svaki $\varepsilon > 0$, važi (2) i dokaz je završen.

Nas prije svega interesuje slučaj kada je $\mathcal{P}$ poluprsten intervala $\mathcal{I}$ ili $\mathcal{P} = \mathcal{E}$ prsten elementarnih skupova u $\mathbf{R}$ a μ zapremina intervala, odnosno elementarnog skupa. (Tada je $\mathcal{R}$ prsten ograničenih skupova u $\mathbf{R}$). To odmah nameće pitanje na koje imamo sljedeći odgovor:

3.2. Lema. *Ako je pod uslovima leme* 3.1 $\mathcal{P}$ *poluprsten a* $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbf{R}}$ *aditivna funkcija skupa i* $\mu : \mathcal{E} \to \overline{\mathbf{R}}$ *njeno jedinstveno aditivno produženje na minimalni prsten* $\mathcal{E} \supset \mathcal{P}$ *(vidi* 2.4*), onda obje te funkcije primjenom leme* 3.1 *generišu istu funkciju* μ^*. *Osim toga relaciji* (1) *se može dati oblik*:

$$\mu^*(A) = \inf\big\{\mu(E) : E \in \mathcal{E}, E \supset A\big\}. \tag{5}$$

Dokaz. Koristeći monotonost funkcija μ i relaciju (7) lako je vidjeti da je:

$$\begin{aligned}\inf\Big\{\sum_i \mu(I_i) : A \subset \bigcup I_i, I_i \in \mathcal{P}\Big\} &= \inf\big\{\mu(E) : A \subset E, E \in \mathcal{E}\big\} \\ &= \inf\Big\{\sum_i \mu(E_i) : \bigcup E_i \supset A, E_i \in \mathcal{E}\Big\}.\end{aligned}$$

3.3. Posljedica. *Pod uslovima leme* 3.2 *je*

$$\mu^*(E) = \mu(E)$$

za svaki E *iz minimalnog prstena* $\mathcal{E}$ *koji sadrži elemente iz* $\mathcal{P}$.

Dokaz. Tvrđenje slijedi trivijalno iz (5).

3.4. Definicija. Ako je $\mathcal{P}$ poluprsten na X i $\mu : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ nenegativna aditivna funkcija skupa, onda se za skup $A \subset X$ kaže da je *mjerljiv po Jordanu* (u odnosu na par $(\mathcal{P}, \mu)$) ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji E iz minimalnog prstena $\mathcal{E} \supset \mathcal{P}$ takav da je $E \triangle A \in \mathcal{R}$ (u smislu 3.1) i

$$\mu^*(E \triangle A) < \varepsilon.$$

Familiju skupova mjerljivih po Jordanu u odnosu na par $(\mathcal{P}, \mu)$ označavaćemo sa $\mathcal{J}_{(\mathcal{P},\mu)}$, a ako je $\mathcal{P} = \mathcal{I}$ poluprsten intervala u $\mathbf{R}^n$ i μ zapremina intervala, onda, kratko, sa $\mathcal{J}$. U ovoj glavi često ćemo govoriti mjerljiv, umjesto mjerljiv po Jordanu.

(U glavi VI, naziv mjerljiv po Jordanu nećemo skraćivati, jer će tada *mjerljiv* značiti mjerljiv po Lebesgueu).

Očigledno, $\mathcal{E} \subset \mathcal{J}_{(p,\mu)}$, što nam je i bio cilj. Ostaje da se dokaže da je $\mathcal{J}_{(p,\mu)}$ prsten i da je restrikicja na $\mathcal{J}_{(p,\mu)}$ od ekstenzije μ^* (vidi 3.3) aditivna.

3.5. Lema. *Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) *A je mjerljiv po Jordanu.*

(b) *Za svaki $\varepsilon > 0$ postoje skupovi E_1, E_2 iz minimalnog prstena $\mathcal{E}$ koji sadrži $\mathcal{P}$, takvi da je*

$$E_1 \subset A \subset E_2 \quad i \quad \mu(E_2 - E_1) < \varepsilon. \tag{6}$$

Dokaz. Uslov 3.4 ekvivalentan je sa: za svaki $\varepsilon > 0$ postoje elementarni skupovi E' i E'' takvi da je

$$(A - E') \cup (E' - A) \subset E'' \quad \text{i} \quad \mu(E'') < \varepsilon. \tag{7}$$

Ako važi (7) i $E' \cap A = \varnothing$, onda (7) važi i za $E' = \varnothing$, pa važi i (6) za $E_1 = \varnothing$, $E_2 = E''$. Ako je $E' \cap A \neq \varnothing$, neka je $E_2 = E' \cup E''$, $E_1 = E_2 - E''$. Tada je $E_1 \subset A \subset E_2$, $E_2 - E_1 \subset E''$ i iz (7) ponovo slijedi (6). Obratno, ako važi (6), onda važi i (7) sa $E' = E_1$, $E'' = E_2 - E_1$.

3.6. Spoljna i unutarnja Jordanova mjera. Tvrđenje (b) leme 3.5 pokazuje da se skupovi mjerljivi po Jordanu, mogu podjednako dobro aproksimirati i spolja i iznutra skupovima prstena $\mathcal{E}$. Zato se, pod uslovima definicije 3.4, $\mu^*(A)$ naziva *spoljnom* a

$$\mu_*(A) = \big\{\mu(E) : E \in \mathcal{E}, E \subset A\big\}.$$

unutarnjom Jordanovom mjerom skupa $A \in \mathcal{R}$.

Očigledno,

$$\mu_*(A) \leq \mu^*(A).$$

3.7. Lema. (a) *Skup $A \subset X$ je mjerljiv po Jordanu (u odnosu na par $(\mathcal{P}, \mu)$), ako i samo ako je $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.*

(b) *Ako je $A \cap B = \varnothing$, onda je*

$$\mu_*(A \cup B) \geq \mu_*(A) + \mu_*(B).$$

Dokaz. (a) Iz 3.5 slijedi da je A mjerljiv po Jordanu ako i samo ako je $\mu^*(A) - \mu_*(A) < \varepsilon$ za svaki $\varepsilon > 0$.

Slika 27.

(c) Ako je $E_1 \subset A$, $E_2 \subset B$, onda je $E_1 \cup E_2 \subset A \cup B$ i $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Slijedi da je

$$\mu_*(A \cup B) \geq \mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$$

(za svaki $E_1 \subset A$, $E_2 \subset B$). Odatle slijedi (8).

3.8. Teorema. (a) *Familija $\mathcal{J}_{(\mathcal{P},\mu)}$ skupova mjerljivih po Jordanu generisana parom $(\mathcal{P},\mu)$ čini prsten koji sadrži minimalni prsten $\mathcal{E} \supset \mathcal{P}$ kao svoj podprsten.*

(b) *Restrikcija spoljne Jordanove mjere μ^* na $\mathcal{J}_{(\mathcal{P},\mu)}$ je nenegativna aditivna funkcija skupa takva da je*

$$\mu^*(E) = \mu(E) \quad \text{za } E \in \mathcal{E}. \tag{9}$$

(Zvaćemo je *Jordanovom mjerom* i označavati takođe sa μ (kao i funkcijama $\mathcal{E}$ čija je ekstenzija)).

Dokaz. (a) Ako je $A \in \mathcal{J}_{(\mathcal{P},\mu)}$, $B \in \mathcal{J}_{(\mathcal{P},\mu)}$ i E_1', E_2' i E_1'', E_2'' parovi skupova iz $\mathcal{E}$ koji zadovoljavaju uslov (6), (redom u odnosu na A i B), neka je $E_1 = E_2' - E_1''$, $E_2 = E_2' - E_1''$. Tada je $E_1 \subset A - B \subset E_2$ i $E_2 - E_1 \subset (E_2' - E_1') \cup (E_2'' - E_1'')$. Odatle slijedi da $A - B$ zadovoljava uslov (b) leme 3.5, tj. $A - B \in \mathcal{J}_{(\mathcal{P},\mu)}$. Analogno se dokazuje da je $A \cup B \in \mathcal{J}_{(\mathcal{P},\mu)}$. Relacija $\mathcal{E} \subset \mathcal{J}_{(p,\mu)}$ zadovoljena je po definiciji 3.4.

(b) Aditivnost funkcije μ^* na $\mathcal{J}_{(\mathcal{P},\mu)}$ slijedi iz leme 3.7 i subaditivnosti spoljne Jordanove mjere μ^* (tvrđenje 3.1(a)). Relacija (9) dokazana je u 3.3.

3.9. Lema. *Spoljna i unutarnja Jordanova mjera koje generiše poluprsten $\mathcal{I}$ intervala u $\mathbf{R}^n$ i zapremina μ intervala, definisane su na klasi ograničenih podskupova od $\mathbf{R}^n$, i osim svojstava navedenih u* 3.7*, imajui sljedeća svojstva*:

(a) *$\mu^*(A) - \mu_*(A) = \mu^*(\partial A)$, gdje je ∂A granica skupa A.*

(b) *μ^* i μ_* su invarijantne u odnosu na translacije*:

$$\mu^*(A + x) = \mu^*(A), \quad \mu_*(A + x) = \mu_*(A).$$

Dokaz. Za elementaran skup E, skupovi $\overline{E}$, $\operatorname{Int} E$ su elementarni i

$$\mu(\overline{E}) = \mu(\operatorname{Int} E) = \mu(E).$$

Ako je $E_1 \subset A \subset E_2$, onda je $\partial A \subset \overline{E}_2 - \operatorname{Int} E_1$ i

$$\begin{aligned} \mu^*(\partial A) &\leq \mu^*(\overline{E}_2 - \operatorname{Int} E_1) = \mu(\overline{E}_2 - \operatorname{Int} E_1) \\ &= \mu(\overline{E}_2) - \mu(\operatorname{Int} E_1) \\ &= \mu(E_2) - \mu(E_1). \end{aligned}$$

(Pritom je korišćeno da je $\mathcal{J}_{\mathcal{R}}$ prsten, a μ aditivna i monotona funkcija skupa na $\mathcal{J}_{\mathcal{R}}$). Iz (6) slijedi da je $\mu(E_1) + \mu^*(\partial A) \leq \mu(E_2)$. Fiksirajući E_1, dobijamo $\mu(E_1) + \mu^*(\partial A) \leq \mu^*(A)$ a odatle $\mu_*(A) + \mu^*(\partial A) \leq \mu^*(A)$, odnosno

$$\mu^*(\partial A) \leq \mu^*(A) - \mu_*(A). \tag{10}$$

Dalje, pošto je A ograničen, postoji interval I takav da je $A \subset I$. Neka je $E \supset \partial A$ elementaran skup. Tada je $I - E$ elementaran skup i zato unija konačno mnogo disjunktnih intervala, definicija 1.8). Unija onih među njima koji su podskupovi od A je neki elementaran skup E_1. Imamo da je $E_1 \subset A \subset E_2 = E_1 \cup E$,

$$\mu(E_1) \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A) \leq \mu(E_2) = \mu(E_1) + \mu(E).$$

Slijedi da je

$$\mu^*(A) - \mu_*(A) \leq \mu(E)$$

za svaki elementaran skup $E \supset \partial A$, a odatle

$$\mu^*(A) - \mu_*(A) \leq \mu^*(\partial A).$$

Iz (10) i (11) konačno se dobija (a).

(b) Translacijom se interval prevodi u interval iste zapremine, disjunktni intervali u disjunktne intervale. Slijedi da je $E + x \in \mathcal{E}$ ako i samo ako je $E \in \mathcal{E}$ i pritom je $\mu(E + x) = \mu(E)$. Otuda trivijalno slijedi (b).

3.10. Teorema. *Ako je $\mathcal{J}$ prsten skupova u $\mathbf{R}^n$ mjerljivih po Jordanu, onda:*

(i) *$A \in \mathcal{J}$ ako i samo ako A je ograničen i $\mu^*(\partial A) = 0$,*

(ii) *$A \in \mathcal{J}$ ako i samo ako $A + x \in \mathcal{J}$,*

(iii) *$\mathcal{J} \neq \mathcal{E}$, (tj. postoje skupovi mjerljivi po Jordanu koji nijesu elementarni).*

Jordanova mjera $\mu : \mathcal{J} \to \mathbf{R}$ ima i sljedeća svojstva:

(a) *μ je invarijantna u odnosu na translacije:*

$$\mu(A + x) = \mu(A),$$

(b) *Ako je $\widetilde{\mu} : \mathcal{J} \to \mathbf{R}$ proizvoljna nenegativna aditivna funkcija skupa invarijantna u odnosu na translacije, onda postoji $c > 0$ takav da je $\widetilde{\mu}(A) = c\mu(A)$ za svaki $A \in \mathcal{J}$.*

(Primijetimo da iz (i) slijedi: 1° $A \in \mathcal{I}$ ako i samo ako $\overline{A} \in \mathcal{I}$; 2° ako je $A \in \mathcal{I}$, onda je $\overline{A}$ kompaktan i $\mu(\overline{A}) = \mu(A)$).

Dokaz. Tvrđenja (i), (ii) i (a) su trivijalne posljedice leme 3.9. Za dokaz tvrđenja (iii) dovoljno je provjeriti da se lopta u euklidskom prostoru ne može predstaviti kao unija konačno mnogo disjunktnih intervala, a to prepuštam čitaocu (zadatak 1). Mi ćemo dokazati tvrđenje (b).

Neka je $I_1^n = [0,1]^n$ jedinični kub u $\mathbf{R}^n$ i c realan broj određen sa $\widetilde{\mu}(I_1^n) = c\mu(I_1^n)$. Diobom stranica kuba na m jednakih djelova dobijamo m^n kubova čije stranice imaju dužinu $1/m$. Pošto je $\widetilde{\mu}$ aditivna, i invarijantna u odnosu na translacije, slijedi da je

$$\widetilde{\mu}(I_{1/m}^n) = \frac{1}{m^n}\widetilde{\mu}(I_1^n) = c \cdot \frac{1}{m^n}\mu(I_1^n) = c\mu(I_{1/m}^n)$$

gdje je $I_{1/m}^n$ kub čija stranice imaju dužinu jednaku $1/m$. Odatle lako slijedi da je $\widetilde{\mu}(I^n) = \mu(I^n)$ za svaki interval koji ima svojstvo da su dužine njegovih stranica racionalni brojevi. Pošto je $\widetilde{\mu}$ monotona, dobija se da je $\widetilde{\mu}(I^n) = \mu(I^n)$ za svaki interaval I^n, a iz aditivnosti funkcije $\widetilde{\mu}$ i 2.4 da je $\widetilde{\mu}(E) = \mu(E)$ za svaki elementaran skup E. Konačno, pošto je $\widetilde{\mu}$ monotona, dobijamo da je $\mu(E_1) \subset \widetilde{\mu}(A) \subset \mu(E_2)$ za svaki svaki par elementarnih skupova E_1 i E_2 takvih da je $E_1 \subset A \subset E_2$. Odatle slijedi (b).

3.11. Primjeri. (a) Intervali i elementarni skupovi su mjerljivi po Jordanu, (lema 3.2 ili teorema 3.7). Konačni skupovi u $\mathbf{R}^n$ su takođe mjerljivi po Jordanu, jer imaju spoljnu Jordanovu mjeru (zapreminu) jednaku nuli (dokažite!). Ograničeni skup A u $\mathbf{R}^n$ koji leži u nekom od afinih potprostora $x^i = \text{const.}$ ima Jordanovu mjeru jednaku nuli, jer leži u intervalu čija je ivica duž ose x^i proizvoljno male dužine. Specijalno, stranice intervala I^n kao i cijela granica ∂I^n je skup mjere nula u $\mathbf{R}^n$.

Dokazaćemo sada da su skupovi kao što su paralelopipedi (ne samo intervali), kružnica ili sfera redom u $\mathbf{R}^2$ i u $\mathbf{R}^3$ (primjer (c) dolje), skupovi Jordanove mjere nula, i sve figure koje se sretaju u elementarnoj geometriji, mjerljivi skupovi.

(b) Neka je $A \subset \mathbf{R}^n$, $\mu(A) = 0$ i $f : U \to \mathbf{R}^n$ zadovoljava Lipschitzov uslov u nekoj okolini zatvaranja $\overline{A}$, (tj. postoji $M > 0$ takav da je $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$ za svaki $x \in U$ i svaki $y \in U$). Tada je $\mu(f(A)) = 0$.

Budući da linearno preslikavanje $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ zadovoljava Lipshitzov uslov, a paralelopiped P čije su ivice vektora $v_1, \ldots, v_n$ je slika intervala I^m pomoću linearnog preslikavanja određenog sa $Ae_i = v_i$, slijedi da su stranice i čitava granica svakog paralelopipeda skupovi Jordanove mjere nula i da je svaki paralelopiped skup mjerljiv po Jordanu.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Skup A možemo pokriti sa konačno mnogo kubova $C_1, \ldots, C_k$ takvih da je

$$\sum_i \mu(C_i) < \frac{\varepsilon}{(M\sqrt{n})^n} \tag{12}$$

gdje je $M > 0$ takav da je

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\| \quad \text{za } x, y \in \bigcup C_i. \tag{13}$$

(Pokrivač skupa $\overline{A}$ od konačno mnogo kubova za koje važi (12) postoji jer je $\mu(\overline{A}) = 0$. Usitnjavajući takve kubove na potkubove čija je dijagonala $< d(\overline{A}, \partial U)$ prelazimo na kubove $C_1, \ldots, C_k$ za koje važi (13)). Neka je $r_i/2$ dužina dijagonale kuba C_i. Iz (13) slijedi da skup $f(C_i \cap A)$ leži u kubu S_i čija je dijagonala $\leq Mr_i\sqrt{n}$. Slijedi da je $\mu(S_i) \leq (M\sqrt{n})^n \mu(C_i)$ i iz (12) dobijamo da je

$$\mu(C) \leq \sum_i \mu(C_i) < \varepsilon.$$

To znači da $f(A)$ ima Jordanovu mjeru jednaku nuli.

(c) Ako je A ograničen skup u $\mathbf{R}^m$, $m < n$ i $f : A \to \mathbf{R}^n$ zadovoljava Lipschitzov uslov u nekoj okolini od $\overline{A}$, onda je $f(A)$ Jordanove mjere nula. Specijalno, ako je $f : U \to \mathbf{R}^n$ preslikavanje iz klase C^1, A kompaktan podskup otvorenog skupa $U \subset \mathbf{R}^m$ i $m < n$, onda je Jordanova mjera skupa $f(A)$ jednaka nuli.

(Ovo obuhvata slučaj kružnice u $\mathbf{R}^2$ i sfere u $\mathbf{R}^3$. Odnosno opštije, glatke kompaktne krive u $\mathbf{R}^2$ i kompaktne površi u $\mathbf{R}^3$. (Definiciju krive i površi dajemo u Glavi VIII). To istovremeno znači da su standardne geometrijske figure i tijela skupovi mjerljivi po Jordanu).

Dokaz. Neka je $i : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ potapanje prostora $\mathbf{R}^m$ u m-dimenzionalan koordinatni podprostor od $\mathbf{R}^n$. Skup $i(A)$ ima Jordanovu mjeru nula u $\mathbf{R}^n$, jer leži u koordinatnom potprostoru. Neka je $g : f(A) \to \mathbf{R}^n$ definisano sa $g(f(x)) = f(x)$. Pošto je i izometrija, preslikavanje g zadovoljava Lipschitzov uslov u nekoj okolini od $\overline{f(A)}$. Iz (b) slijedi da $f(A) = g(f(A))$ ima Jordanovu mjeru nula.

(d) Ako je U otvoren skup u $\mathbf{R}^m$, $m \leq n$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ C^1-preslikavanje, $\overline{A} \subset U$ i $\mu(A) = 0$ ako je $m = n$, (A je ograničen ako je $m < n$), onda je $\mu(f(A)) = 0$.

Dokaz. Pošto je $\overline{A}$ kompaktan, možemo ga pokriti sa konačno mnogo otvorenih kubova čija zatvaranja leže u U. Zato je dovoljno dokazati da je za svaki zatvoreni kub C koji leži u U slika skupa $C \cap A$ skup mjere nula. To je posljedica primjera (a) (odnosno primjera (b)) i činjenice da neprekidno diferencijabilno preslikavanje f na kompaktnom konveksnom skupu zadovoljava Lipschitzov uslov (vidi II.8.14).

(e) Ako je U otvoren skup u $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}^n$ C^1-preslikavanje, $A \subset \mathbf{R}^n$ mjerljiv po Jordanu takav da je $\overline{A} \subset U$ i $\det f' \neq 0$ na unutrašnjosti od A, onda je $f(A)$ mjerljiv po Jordanu.

Dokaz. Iz $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \partial A$ slijedi da je $f(\overline{A}) = f(\operatorname{Int} A) \cup f(\partial A)$. S druge strane, iz teoreme o inverznom preslikavanju slijedi da je $f(\operatorname{Int} A) \subset \operatorname{Int} f(\overline{A})$. Odatle dobijamo da je $\partial f(\overline{A}) \subset f(\partial A)$. Ostaje da primijetimo da je $\partial A = \partial \overline{A}$ i da primijenimo (c) i 3.10(i) na skup ∂A.

U sljedećoj teoremi daje se geometrijsko značenje apsolutne vrijedosti determinante linearnog preslikavanja.

3.12. Teorema. *Ako je $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ linearno preslikavanje i D mjerljiv skup, onda je i AD mjerljiv i*

$$\mu(AD) = |\det A| \mu(D). \tag{11}$$

Dokažimo najprije sljedeće tvrđenje iz linearne algebre.

3.13. Lema. *Svako nesingularno linearno preslikavanje $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ može se predstaviti kao kompozicija linearnih preslikavanja koja u odnosu na standardnu bazu $(e_1, \dots, e_n)$ imaju jednu od sljedećih reprezentacija:*

(i) $e_i \longmapsto \alpha e_i$, $e_j \longmapsto e_j$ *za* $j \neq i$,

(ii) $e_j \longmapsto e_i + e_j$, $e_k \longmapsto e_k$ *za* $k \neq j$,

Ili u koordinatnoj formi:

$$(\dots, x^i, \dots) \xmapsto{T^i_\alpha} (\dots, \alpha x^i, \dots),$$
$$(\dots, x^i, \dots) \xmapsto{S_{ij}} (\dots, x^i + x^j, \dots),$$

pri čemu je oba puta upisana samo koordinata koja se mijenja.

Dokaz. Dokažimo najprije da se preslikavanje koje vrši permutaciju vektora $(e_1, \dots, e_n)$ može predstaviti kao kompozicija preslikavanja (i) i (ii). Dovoljno je dokazati da preslikavanje koje vrši transpoziciju dva vektora, e_i i e_j ima takvu reprezentaciju. Upisujući samo koordinate koje se mijenjaju imamo da je:

$$\begin{aligned}(\dots, x^i, \dots, x^j, \dots) &\xmapsto{S_{ij}} (\dots, x^i + x^j, \dots, x^j, \dots) \\ &\xmapsto{T^i_{-1}} (\dots, -x^i - x^j, \dots, x^j, \dots)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\xmapsto{S_{ji}} (\dots, -x^i - x^j, \dots, -x^i, \dots)\\
&\xmapsto{T^j_{-1}} (\dots, -x^i - x^j, \dots, x^i, \dots)\\
&\xmapsto{S_{ij}} (\dots, -x^j, \dots, x^i, \dots)\\
&\xmapsto{T^i_{-1}} (\dots, x^j, \dots, x^i, \dots).
\end{aligned}
$$

Neka je sada L proizvoljno linearno preslikavanje za koje je $\det L \neq 0$. Tada bar jedna kvartalna podmatrica od $[L]$, reda $n-1$, ima determinantu različitu od nule. Permutacijom koordinata, (tj. primjenom preslikavanja (i) i (ii)), možemo sa L preći na linearno preslikavanje kod kojeg se elementi te podmatrice nalaze u presjeku prvih $(n-1)$ vrsta i $(n-1)$ kolona. Ta podmatrica ima podmatricu reda $n-2$ čija je determinanta različita od nule. Poslije konačno mnogo dopuna preslikavanjima tipa (i) i (ii), prelazi se na preslikavanje $\widetilde{L}$ čija matrica (A^i_j) je takva, da je svaka podmatrica na dijagonali (A^j_i), $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, nesingularna. Pošto se povratak sa $\widetilde{L}$ na L može obaviti pomoću preslikavanja tipa (i) i (ii), (jer $(T^i_\alpha)^{-1} = T^i_{\alpha^{-1}}$, $S^{-1}_{ij} = T^j_{-1} \circ S_{ij} \circ T^j_{-1}$), ostalo je da se dokaže da se preslikavanje $\widetilde{L}$ može predstaviti kao kompozicija preslikavanja tipa (i) i (ii). Za $n = 3$ taj dokaz izgleda ovako:

$$
\begin{aligned}
(x^1, x^2, x^3) &\longmapsto (a^1_1 x^1, x^2, x^3)\\
&\xmapsto{a^1_2 \neq 0} (a^1_1 x^1, a^1_2 x^2, x^3)\\
&\longmapsto (a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2, a^1_2 x^2, x^3)\\
&\longmapsto (a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2, x^2, x^3)\\
&\xmapsto{a^1_3 \neq 0} (a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2, x^2, a^1_3 x^3)\\
&\longmapsto (a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1_3 x^3, x^2, a^1_3 x^3)\\
&\longmapsto (a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1_3 x^3, x^2, x^3),
\end{aligned}
$$

pri čemu se pravi „skok“ iz prvog u četvrti red ako je $a^1_2 = 0$, odnosno iz četvrtog u sedmi ako je $a^1_3 = 0$.

Uvedimo oznaku $y^1 = a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1_3 x^3$, pa produžimo:

$$
\begin{aligned}
(y^1, x^2, x^3) &\xmapsto{a^2_1 \neq 0} \left(\frac{a^2_1}{a^1_1} y^1, x^2, x^3\right)\\
&\longmapsto \left(\frac{a^2_1}{a^1_1} y^1, \frac{-a^2_1 a^1_2 + a^1_1 + a^2_2}{a^1_1} x^2, x^3\right)\\
&\longmapsto \left(\frac{a^2_1}{a^1_1} y^1, \frac{a^2_1}{a^1_1} y^1 + \frac{-a^2_1 a^1_2 + a^1_1 + a^2_2}{a^1_1} x^2, x^3\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{a_1^2}{a_1^1}y^1, a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \frac{a_1^2}{a_1^1}x^3, x^3\right)\\
&\longmapsto \left(y^1, a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \frac{a_1^2}{a_1^1}x^3, x^3\right)\\
&\longmapsto \left(y^1, a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \frac{a_1^2}{a_1^1}x^3, \frac{-a_1^2 + a_3^2a_1^1}{a_1^1}x^3\right)\\
&\longmapsto (y^1, a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + a_3^2x^3, x^3).
\end{aligned}
$$

(Ponovo se prave direktni „skokovi“, ako je $a_1^2 = 0$ ili $a_3^2 = 0$). Analogno se izvrši i transformacija koordinate x^3 (bez mijenjanja y^1 i $y^2 = a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + +a_3^2x^3$). Dokaz za $n > 3$ se razlikuje od slučaja $n = 3$ time što su zapisivanja duža.

Dokaz teoreme 3.12. Ako je $\det A = 0$, onda AD leži u nekoj hiperravni prostora $\mathbf{R}^n$ i primjenom 3.11 lako slijedi da je slika mjerljivog skupa mjerljiv skup, pri čemu su obje strane jednakosti (11) jednake nuli.

Ako je $\det A \neq 0$ i D mjerljiv, onda iz 3.11 slijedi da je i AD mjerljiv, (jer je operator A ograničen i zato zadovoljava Lipschitzov uslov). Funkcija $\widetilde{\mu}$ definisana na klasi mjerljivih skupova sa

$$\widetilde{\mu}(D) = \mu(AD)$$

je invarijantna u odnosu na translacije, jer je

$$\widetilde{\mu}(D + x) = \mu(A(D + x)) = \mu(AD + Ax) = \mu(AD) = \widetilde{\mu}(D).$$

Na osnovu 3.10 postoji $c(A) > 0$ takav da je

$$\widetilde{\mu}(D) = c(A)\mu(D). \tag{12}$$

za svaki mjerljiv skup D.

Za $A = A_1 \circ A_2$ (12) dobijamo da je:

$$\mu(AD) = \mu(A_1(A_2D)) = c(A_1)\mu(A_2D) = c(A_1)c(A_2)\mu(D),$$

tj.

$$c(A_1A_2) = c(A_1)c(A_2).$$

Budući da je determinanta kompozicije linearnih preslikavanja jednaka proizvodu njihovih determinanti (I 12.8), ostaje da se dokaže da je $c(A) = |\det A|$ kad je A jedno od preslikavanja iz leme 3.13.

Ako je A tipa (i), onda je $\det A = \alpha$ i slika od kuba $[0, 1]^n$ je paralelopiped čije su sve stranice, osim i-te, segment $[0, 1]$ na j-toj osi, a i-ta $[0, \alpha]$ ili $[\alpha, 0]$, zavisno od toga da li je $\alpha > 0$ ili $\alpha < 0$. Zapremina toga kuba je $|\alpha|$, pa je $c(A) = |\alpha|$, tj. $c(A) = |\det A|$.

Ako je A tipa (ii), onda je $\det A = 1$ i slika n-torke $(x^1, \dots, x^n)$ je n-torka $(y^1, \dots, y^n) = (\dots, x^i + x^j, \dots)$. Pošto je $0 \le x^j \le 1$ to znači da je slika kuba $[0,1]^n$ skup čije koordinate zadovoljavaju uslove:

$$0 \le y^k \le 1 \quad \text{za } k \ne j, \qquad y^i \le y^j \le y^i + 1.$$

(Nacrtajte sliku). Neka je E skup onih tačaka iz $A([0,1]^n)$ kod kojih je $1 \le y^j \le y^i + 1$. Preostali dio od $A([0,1]^n)$ označimo sa E_2. Neka je $E_1 - e_j$ skup koji se dobija translacijom skupa E_1 za $-e_j$. Tada je $(E_1 - e_j) \cap E_2 = \varnothing$ i

$$[0,1]^n = (E_1 - e_j) \cup E_2.$$

Slijedi da je

$$\mu(A([0,1]^n)) = \mu(E_1) + \mu(E_2) = \mu(E_1 - e_j) + \mu(E_2) = \mu([0,1]^n)$$

i zato $c(A) = 1$, tj. ponovo $c(A) = |\det A|$ i dokaz teoreme je završen.

3.14. Posljedica. *Neka je $\mu(v_1, \dots, v_n)$ mjera paralelepipeda u $\mathbf{R}^n$ čije su ivice vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$. Tada je*

$$\mu(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$$

(pri čemu se determinanta računa u odnosu na bilo koju ortonormiranu bazu u $\mathbf{R}^n$).

Dokaz. Neka je $(e_1, \dots, e_n)$ proizvoljna ortonormirana baza u $\mathbf{R}^n$ i $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ linearno preslikavanje određeno sa $Le_i = v_1$, $i = 1, \dots, n$. Tada je paralelepiped $(v_1, \dots, v_n)$ slika $L([0,1]^n)$ paralelepipeda-intervala $[0,1]^n$. Tvrđenje sada slijedi neposredno iz 3.12.

3.15. Posljedica. *Za mjeru $\mu(v_1, \dots, v_n)$ paralelopipeda $(v_1, \dots, v_n)$ važi*

$$\mu(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{\det G(v_1, \dots, v_n)}$$

gdje je $\det G(v_1, \dots, v_n)$ Gramova determinanta vektora $v_1, \dots, v_n$ (I.13.15.5).

Dokaz. Neka je A matrica čiju j-tu kolonu čine koordinate vektora x_j u odnosu na neku ortonormiranu bazu u $\mathbf{R}^n$ i A^{T} njoj transponovana matrica. Tada je

$$A^{\mathrm{T}} \cdot A = \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n^1 & \dots & v_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^n & \dots & v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix},$$

tj. $A^{\mathrm{T}} \cdot A = G(v_1, \ldots, v_n)$. Tvrđenje je sada posljedica relacije $\det(A^{\mathrm{T}} \cdot A) = (\det A)^2$ i tvrđenja 3.14.

Komentar. Ako je V^k k-dimenzionalan afini potprostor vektorskog prostora E^n, onda euklidska struktura E^n generiše euklidsku strukturu na V^k. Potprostor V^k sa generisanom euklidskom strukturom označimo sa E^k. Ta struktura generiše na E^k Jordanovu mjeru. Mjera paralelepipeda $(v_1, \ldots, v_k)$ u E^k određena je sa $\mu(v_1, \ldots, v_n) = |\det_{\mathcal{B}_k}(v_1, \ldots, v_k)|$ u odnosu na proizvoljnu ortonormiranu bazu u E^k. Relacija

$$\mu(v_1, \ldots, v_n) = \sqrt{\det G(v_1, \ldots, v_n)}$$

omogućava računanje k-dimenzionalne mjere paralelepipeda $(v_1, \ldots, v_k)$ u potprostoru E^k pomoću koordinata vektora $v_1, \ldots, v^k$ u odnosu na koordiantne sisteme okolnog prostora E^n.

3.16. Posljedica. *Ako je $A \in \mathcal{J}$ i $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$, onda je $\lambda A \in \mathcal{J}$ i $\mu(\lambda A) = |\lambda|^n \mu(A)$.*

3.17. Posljedica. *Ako je $A \in \mathcal{J}$ i $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ izometrija, onda je $LA \in \mathcal{J}$ i $\mu(LA) = \mu(A)$.*

Dokaz. Izometrija euklidskog prostora je kompozicija translacije i linearne izometrije. Za translaciju važi 3.10(a), a determinanta izometrije jednaka je 1.

3.18. Posljedica. *Pojam Jordanove mjere u afinom euklidskom prostoru E^n ne zavisi od izbora ortonormiranog koordinatnog sistema $(0, e_1, \ldots, e_n)$, (u odnosu na koji se definiše).*

Dokaz. Svaki koordinatni sistem u E^n je, u stvari, bijekcija $h : E^n \to \mathbf{R}^n$, $h(x) = (x^1, \ldots, x^n)$, koja na E^n prenosi prsten mjerljivih skupova i Jordanovu mjeru: $A \subset E^n$ je mjerljiv po Jordanu ako i samo ako je $h(A) \subset \mathbf{R}^n$ mjerljiv po Jordanu i

$$\mu_{E^n}(A) = \mu_{\mathbf{R}^n}(h(A)).$$

Ako su $h_1 : E^n \to \mathbf{R}^n$, $h_2 : E^n \to \mathbf{R}^n$ dva koordinatna sistema u E^n, onda je preslikavanje $L = h_2 \circ h_1^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ izometrija i $L(h_1(A)) = h_2(A)$, pa iz 3.17 slijedi da je

$$\mu_{1\,E^n}(A) = \mu_{\mathbf{R}^n}(h_1(A)) = \mu_{\mathbf{R}^n}(L(h_1(A))) = \mu_{\mathbf{R}^n}(h_2(A)) = \mu_{2\,E^n}(A).$$

3.19. Zadaci za vježbu

1. (a) Dokazati da je granica elementarnog skupa u $\mathbf{R}^n$ unija konačno mnogo $(n-1)$-dimenzionalnih paralelepipeda koji su paralelni koordinatnim hiperravnima pri čemu su ivice tih paralelepipeda paralelne koordinatnim osama.

(b) Dokazati da sfera u euklidskom prostoru $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, nije elementaran skup.

2. Dokazati da je lopta u $\mathbf{R}^n$ skup mjerljiv po Jordanu. Uputstvo: Kako je sfera $S^2(0,r)$ slika u $\mathbf{R}^3$ kompaktnog skupa $[0,2\pi] \times [0,\pi] \subset \mathbf{R}^2$ pomoću C^1-preslikavanja $(\varphi,\theta) \longmapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$, to slijedi iz 3.11(a). Dokaz za $n > 3$ je analogan.
3. Neka je X topološki prostor i $A \subset X$, $B \subset X$. Dokazati da je $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, $\partial(A - B) \subset \partial A \cup \partial B$, pa potom još jednom dokazati da skupovi mjerljivi po Jordanu u $\mathbf{R}^n$ čine prsten.
4. Neka je k površina (Jordanova mjera) jediničnog kruga u euklidskoj ravni. Dokazati da je tada površina elipse čije su poluose a i b jednaka abk. Uputstvo: Elipsa čije su poluose a i b je slika jediničnog kruga pomoću linearnog preslikavanja A za koje je $\det A = ab$. (Da je $k = \pi$ dokazaćemo u 7.9).
5. Neka je A skup iracionalnih brojeva u $B = [0,1]$. Dokazati da skupovi A i $B - A$ nijesu mjerljivi po Jordanu na $\mathbf{R}$. Uputstvo: To slijedi iz 3.10.(1) i činjenice $\partial A = \partial B = [0,1]$.
6. Da li je Cantorov skup mjerljiv po Jordanu?
7. Ako je $\mu_n(v_1,\dots,v_n)$ mjera n-dimenzionalnog paralelepipeda čije su ivice $v_1,\dots,v_n$ i $\mu_{n-1}(v_1,\dots,v_{n-1})$ mjera $(n-1)$-dimenzionalnog paralelepipeda u $(n-1)$-dimenzionalnom euklidskom potprostoru E^{n-1} u kojem leže ivice $v_1,\dots,v_{n-1}$, dokazati da je
$$\mu_n(v_1,\dots,v_n) = h\,\mu_{n-1}(v_1,\dots,v_{n-1}),$$
gdje je h visina paralelepipeda $(v_1,\dots,v_n)$ koja odgovara bazi $(v_1,\dots,v_{n-1})$ (tj. h je određeno sa $v_n = v' + hv''$, $v' \in E^{n-1}$, $v'' \in (E^{n-1})^\perp$, $\|v''\| = 1$). Uputstvo:
$$\det G(v_1,\dots,v_n) = \det G(v_1,\dots,v_{n-1},hv'') = h^2 \det G(v_1,\dots,v_{n-1}),$$
(I 13.15.5(c)).
8. Neka je K kompaktan skup u $\mathbf{R}^n$ mjerljiv po Jordanu i $f : K \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija. Dokazati da grafik G funkcije f ima u $\mathbf{R}^{n+1}$ Jordanovu mjeru jednaku nuli.

4. Riemannov integral i klasa $\mathcal{R}$-integrabilnih funkcija

Kao što smo već rekli u Uvodu 1.1, svojstva (a)–(d) koja očekujemo od preslikavanja $(D,f) \longmapsto \int_D f$, uslovljavaju da familija skupova koja se razmatra bude prsten, a familija funkcija vektorski prostor. Uslov 1.1(d) traži da skup funkcija sadrži karakteristične funkcije svih mjerljivih skupova, a time i sve njihove linearne kombinacije. Pošto te linearne kombinacije čine vektorski prostor, to značida svaki prsten generiše najmanji vektorski prostor $\mathcal{S}$ funkcija, koji mora biti potprostor svakog prostora funkcija za koje će integral biti definisan. Svako proširenje prstena skupova generiše proširenje njemu odgovarajućeg minimalnog prostora funkcija, ali priroda odnosa te dvije klase ostaje uvijek ista i mi ćemo je sada opisati. Sadržajno, naša pažnja je posvećena najširem prstenu kojim trenutno raspolažemo — prstenu $\mathcal{J}$ skupova mjerljivih po Jordanu, ali bi bilo korisno da čitalac u drugom čitanju za $\mathcal{J}$ uzme proizvoljni prsten i proizvoljnu aditivnu funkciju skupa μ na njemu, i tako nađe mjesta na kojima je pretpostavka da skupovi leže u euklidskom prostoru, bitna.

4.1. Proste funkcije. Funkcija $s : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ naziva se *prostom* ako postoji konačno mnogo disjunktnih skupova $E_1, \ldots, E_m$ iz prstena $\mathcal{J}$ i realni brojevi $c_1, \ldots, c_m$ takvi da je

(1)
$$s(x) = \begin{cases} c_i, & x \in E_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ 0, & x \notin \bigcup_{i=1}^m E_i. \end{cases}$$

Ekvivalent uslov:

(2)
$$s(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \kappa_{E_i}$$

gdje je $\kappa_{E_i} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ karakteristična funkcija skupa E_i.

Prosta funkcija ima više reprezentacija (1), ali samo jednu takvu reprezentaciju kod koje je $c_i \neq c_j$ za $i \neq j$, tj. $E_i = f^{-1}(c_i)$. Tu reprezentaciju zvaćemo *kanonskom*.

Ako se prsten $\mathcal{J}$ zamijeni prstenom $\mathcal{E}$ elementarnih skupova u $\mathbf{R}^n$, onda se prosta funkcija naziva *stepenastom*.

4.2. Integral proste funkcije. Neka je $\mathcal{S}$ vektorski prostor prostih funkcija koji je generisan prstenom $\mathcal{J}$. Ako postoji preslikavanje $\int : \mathcal{J} \times \mathcal{S} \to \mathbf{R}$ koje ima svojstva 1.1(a)–(d), onda iz (a), (b), (d) slijedi da bi ono moralo biti određeno sa:

(3)
$$\int_D s = \sum_{i=1}^{m} c_i \mu(D \cap E_i),$$

gdje su c_i iz (bilo koje) reprezentacije (2). Provjerimo najprije da je sa (3) zaista definisano jedno preslikavanje iz $\mathcal{J} \times \mathcal{S}$ u $\mathbf{R}$, tj. da desna strana relacije (3) ne zavisi od izbora reprezentacije (2). Neka je $\{\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_k\}$ skup vrijednosti funkcije s i $A_j = s^{-1}(\widetilde{c}_j) = \bigcup_{c_i = \tilde{c}_j} E_i$. Pošto je μ aditivna, slijedi da je

$$\widetilde{c}_j \mu(A_j \cap D) = \sum_{c_i = \tilde{c}_j} \mu(E_i \cap D) = \sum_{c_i = \tilde{c}_j} c_i \mu(E_i \cap D),$$

što znači da je suma u (3) za proizvoljnu reprezentaciju (2) jednaka sumi za kanonsku reprezentaciju.

4.3. Definicija. *Integralom proste funkcije* $s : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ (koja ima reprezentaciju (2)) na (ili po) mjerljivom skupu D, zvaćemo broj $\int_D s$ određen relacijom (3).

4.4. Teorema. *Integral proste funkcije* $\int : \mathcal{J} \times \mathcal{S} \to \mathbf{R}$ *ima sljedeća svojstva*:

(a) $\displaystyle\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g;\ \int_D \alpha f = \alpha \int_D f,$

(b) *ako je* $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, *onda je* $\displaystyle\int_{D_1 \cup D_2} = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f,$

(c) *ako je* $f \le g$, *onda je* $\int_D f \le \int_D g$,

(d) $\displaystyle\int_D \kappa_D = \mu(D)$, *gdje je* $\mu(D)$ *— Jordanova mjera skupa* D.

Dokaz. Neka su $\{A_1, \dots, A_m\}$ i $\{B_1, \dots, B_k\}$ skupovi koji se pojavljuju u kanonskim reprezentacijama (2) redom stepenastih funkcija f i g. Tada su skupovi $E_1, \dots, E_p$ dobijeni kao presjeci $A_i \cap B_j$ i razlike $A_i - B_j$ i $B_j - A_i$ mjerljivi, pa f i g imaju reprezentacije:

$$f = \sum_{i=1}^{p} a_i \kappa_{E_i}, \quad g = \sum_{i=1}^{p} b_i \kappa_{E_i}.$$

Slijedi da je

$$\alpha f + \beta g = \sum (\alpha a_i + \beta b_i) \kappa_{E_i},$$

a odatle svojstvo (a). Dokaz svojstva (c) prepuštam čitaocu uz uputstvo, da je uz prisustvo svojstva (a) relacija $\int_D f \ge \int_D g$ ekvivalentna sa $\int_D (f-g) \ge 0$. Na kraju, za $D_1, D_2 \in \mathcal{J}$, po definiciji 4.3 je

$$\int_{D_2} \kappa_{D_1} = \mu(D_1 \cap D_2).$$

4.5. Gornji i donji integral. Sljedeći cilj nam je da proširimo klasu funkcija za koje možemo definisati preslikavanje $(D, f) \longmapsto \int_D f$ u okviru tehnike takozvanog Riemannovog integrala. Preslikavanje $(D, f) \longmapsto \int_D f$ definisano na $\mathcal{J} \times \mathcal{S}$ moguće je proširiti na klasu funkcija koje se mogu dobro aproksimirati prostim funkcijama. Geometrijska intuicija i relacije (a), (b), (c) i (d) iz uvoda u 1.1, čine osnovu ideje koju ćemo realizovati.

4.6. Definicija. Neka je $D \subset \mathbf{R}^n$ skup mjerljiv po Jordanu i $f : D \to \mathbf{R}$ ograničena funkcija. *Gornjim* i *donjim integralom od* f *na* (*po*) D nazivaju se redom brojevi

$$\overline{\int_D} f = \inf_{f \le s} \int_D s, \quad \underline{\int_D} f = \sup_{s \le f} \int_D s,$$

gdje $f \leq s$ znači $f(x) \leq s(x)$ za svaki $x \in D$ i analogno za $s \leq f$.

Ako je $D \in \mathcal{J}$, $D \subset A$ i $f : A \to \mathbf{R}$ ograničena na D, onda se *gornjim* i *donjim integralom funkcije* f *na skupu* D nazivaju redom brojevi $\overline{\int}_D f = \overline{\int}_D f_{|D}$, $\underline{\int}_D f = \underline{\int}_D f_{|D}$, gdje je $f_{|D}$ restrikcija od f na D.

Ako je $s = \sum c_i \kappa_{D_i}$, $\widetilde{s} = \sum c_i \kappa_{D_i \cap D}$, onda je $\widetilde{s}(x) = 0$ za $x \notin D$. Međutim, $\int_D s = \int_D \widetilde{s}$. To znači da se u definiciji gornjeg (donjeg) integrala možemo ograničiti na proste funkcije čiji nosač leži u D. (*Nosačem* funkcije s naziva se skup $\operatorname{supp} s = \overline{\{x : s(x) \neq 0\}}$).

Ako je s prosta funkcija, onda je, očigledno,

$$\underline{\int}_D s = \overline{\int}_D s = \int_D s,$$

(tj. i gornji i donji integral su ekstenzije integrala proste funkcije).

Da bi mogli da posmatramo gornji i donji integral kao preslikavanja definisana na skupu (raznih) parova (D, f) nama će ponekad odgovarati da za sve funkcije u razmatranju podrazumijevamo da su definisane i ograničene na svakom skupu mjerljivom po Jordanu. Taj uslov izdvaja sve funkcije definisane na $\mathbf{R}^n$ koje su ograničene na svakom ograničenom podskupu od $\mathbf{R}^n$. Te funkcije zvaćemo *lokalno ograničenim*. Funkciju f koja je prvobitno definisana samo na skupu D (i ograničena), uključujemo u tu klasu tako što f zamijenimo njenom ekstenzijom $\widehat{f}$, koja je definisana

$$\widehat{f} = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

i ekstenziju ponovo označimo sa f. Takvo poistovjećivanje funkcija f i $\widehat{f}$ je opravdano, jer je

$$\underline{\int}_D f = \underline{\int}_D \widehat{f}, \quad \overline{\int}_D f = \overline{\int}_D \widehat{f}.$$

(To se dobija trivijalno ako se, saglasno gornjoj napomeni, definicija primijeni sa prostim funkcijama čiji nosač leži u D — zadatak 1).

4.7. Napomena. 1. Familija $\{D_1, \dots, D_m\}$ disjunktnih skupova takvih da je $D = \bigcup_{i=1}^m D_i$ naziva se *podjelom* ili *razbijanjem skupa* D. (Svaka reprezentacija $s = \sum_{i=1}^m c_i \kappa_{\tilde{D}_i}$ proste funkcije s generiše familiju $D_1, \dots, D_m$, $D_i = D \cap \widetilde{D}_i$ koja je jedno razbijanje skupa D). Za svaku podjelu $P = \big\{D_1, \dots, D_m\big\}$ skupa D i funkciju f ograničenu na D, neka je

$$(4) \qquad M_i = \sup_{x \in D_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in D_i} f(x), \quad u_P = \sum_{i=1}^m M_i \kappa_{D_i}, \quad l_P = \sum_{i=1}^m m_i \kappa_{D_i}.$$

Ako je podjela P generisana nekom reprezentacijom proste funkcije s, onda ćemo u_P i l_P označavati i sa u_s i l_s. Jasno je da je u $u_s(x) \geq s(x)$ (respektivno $s(x) \geq l_s(x)$)

za $x \in D$. Slijedi da su funkcije u_s i l_s „bliže“ f nego s i da se u definiciji gornjeg i donjeg integrala, možemo ograničiti na familije prostih funkcija u_P i l_P koje su generisane podjelama P skupa D. Uvodi se sljedeća terminologija: Za svako razbijanje $P = \{D_1, \ldots, D_m\}$ skupa D na Jordanove skupove $D_1, \ldots, D_m$ brojevi $\overline{I}(f,P) = \int_D u_P$, $\underline{I}(f,P) = \int_D l_P$:

$$\overline{I}(f,P) = \sum_{i=1}^{m} M_i \mu(D_i), \quad \underline{I}(f,P) = \sum_{i=1}^{m} m_i \mu(D_i), \tag{5}$$

nazivaju se redom *gornjom* i *donjom integralnom sumom funkcije* f *u odnosu na podjelu* P. Saglasno malo prije rečenom o funkcijama u_s, l_s, imamo da je

$$\overline{\int_D} f = \inf_P \overline{I}(f,P), \quad \underline{\int_D} f = \sup_P \underline{I}(f,P). \tag{6}$$

(Iz (5) slijedi da relacije (6) važe i ako u definiciji podjele dopustimo da je $D_i \cap D_j \neq \varnothing$ uz uslov $\mu(D_i \cap D_j) = 0$).

Ako su P i Q dva razbijanja skupa D, onda se Q naziva *usitnjenjem* podjele P, ako je svaki element iz Q sadržan u nekom elementu iz P. Pošto $m = \inf_{x\in D} f(x)$ ne opada, a $M = \sup_{x \in D} f(x)$ ne raste kad se skup D smanjuje, a integral prostih funkcija ne zavisi od reprezentacije (2), imamo da je za usitnjenje Q podjele P

$$\underline{I}(f,P) \leq \underline{I}(f,Q) \leq \overline{I}(f,Q) \leq \overline{I}(f,P).$$

2. Neka je I^n proizvoljan interval takav da je $I^n \supset D$. Iz napomene 1, relacija (2) i (4), odnosno relacija (3) i (5), slijedi da je

$$\overline{\int_D} f = \inf_P \overline{I}(f\kappa_D, P), \quad \underline{\int_D} f = \sup \underline{I}(f\kappa_D, P), \tag{7}$$

gdje je P proizvoljno razbijanje intervala I^n, κ_D karakteristična funkcija skupa D a $\overline{I}(f\kappa_D, P)$ i $\underline{I}(f\kappa_D, P)$ gornja i donja integralna suma funkcije $f\kappa_D$ na intervalu I^n. Nije teško vidjeti da se u relaciji (7) možemo ograničiti na one podjele P čiji elementi su takođe intervali.

4.8. Lema. *Neka je $\mathcal{J}$ prsten skupova mjerljivih po Jordanu, a $\mathcal{B}$ vektorski prostor lokalno ograničenih funkcija. Gornji i donji integral $\overline{\int} : \mathcal{J} \times \mathcal{B} \to \mathbf{R}$, $\underline{\int} : \mathcal{B} \to \mathbf{R}$, imaju sljedeća svojstva:*

(a) *Ako je $D \in \mathcal{J}$, $f \in \mathcal{B}$, $g \in \mathcal{B}$, onda je*

$$\overline{\int_D} (f+g) \leq \overline{\int_D} f + \overline{\int_D} g, \quad \underline{\int_D} (f+g) \geq \underline{\int_D} f + \underline{\int_D} g,$$

$$\overline{\int_D} cf = c\overline{\int_D} f \quad \textit{ako je } c > 0, \qquad \overline{\int_D} cf = c\underline{\int_D} f \quad \textit{ako je } c < 0.$$

(b) *Ako je* $D_1 \in \mathcal{J}$, $D_2 \in \mathcal{J}$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ *i* $f \in \mathcal{B}$, *onda je*

$$\overline{\int_{D_1\cup D_2}} f \geq \overline{\int_{D_1}} f + \overline{\int_{D_2}} f, \quad \underline{\int_{D_1\cup D_2}} f \leq \underline{\int_{D_1}} f + \underline{\int_{D_2}} f.$$

(c) *Ako je* $D \in \mathcal{J}$, $f \in \mathcal{B}$, $g \in \mathcal{B}$ *i* $f(x) \leq g(x)$ *za* $x \in D$, *onda je*

$$\overline{\int_D} f \leq \overline{\int_D} g, \quad \underline{\int_D} f \leq \underline{\int_D} g.$$

(d) *Za proizvoljan skup* D *mjerljiv po Jordanu je*

$$\overline{\int_D} \kappa_D = \underline{\int_D} \kappa_D = \mu(D).$$

(d') *Za proizvoljan ograničen skup* A *i proizvoljan skup* D *mjerljiv po Jordanu takav da je* $A \subset D$, *važi*

$$\overline{\int_D} \kappa_A = \mu^*(A), \quad \underline{\int_D} \kappa_A = \mu_*(A).$$

Dokaz. (a) Ako je $s_1 \geq f$ i $s_2 \geq g$ onda je $s_1 + s_2 \geq f + g$, pa slijedi da je

$$\overline{\int_D}(f+g) \leq \int_D (s_1+s_2) = \int_D s_1 + \int_D s_2.$$

Infimum desne strane po s_1, s_2 je jednak $\overline{\int_D} f + \overline{\int_D} g$ i prvo tvrđenje za gornji integral je dokazano. Analogno se dokazuje i tvrđenje za donji integral.

Ako je $c \neq 0$, onda je s prosta funkcija ako i samo ako je cs prosta. Zato je za $c > 0$

$$\overline{\int_D} cf = \inf_{f\leq s} \int_D cs = c \inf_{f\leq s} \int_D s = c\overline{\int_D} f,$$

a za $c < 0$

$$\overline{\int_D} cf = \inf_{s\leq f} \int_D cs = c \sup_{s\leq f} \int_D s = c\underline{\int_D} f.$$

(b) Prva nejednakost slijedi iz

$$\inf_{s\geq f} \int_{D_1\cup D_2} s = \inf_{s\geq f}\left(\int_{D_1} s + \int_{D_2} s\right) \geq \inf_{s\geq f}\int_{D_1} s + \inf_{s\geq f}\int_{D_2} s.$$

Druga se dobija analogno.

(c) Ako je $g \leq s$, onda je i $f \leq s$ i zato je $\inf_{f\leq s} \int s \leq \inf_{g\leq s} \int s$ itd.

(d) κ_D je prosta funkcija kad je $D \in \mathcal{J}$, pa je

$$\underline{\int_D} \kappa_D = \overline{\int_D} \kappa_D = \int_D \kappa_D.$$

(d') Neka je je $s = \sum c_i \kappa_{E_i}$ kanonska reprezentacija proste funkcije s koja zadovoljava uslov $s(x) \geq \kappa_A(x)$ za $x \in D$. Tada je $c_i \geq 1$ za svaki E_i takav da je $E_i \cap A \neq \varnothing$ i $A \subset \bigcup \{E_i : E_i \cap A \neq \varnothing\}$. Slijedi da je

$$\mu^*(A) \leq \sum_{E_i \cap A \neq \varnothing} \mu(E_i \cap D) \leq \sum c_i \mu(E_i \cap D) = \int_D s,$$

odnosno

$$\mu^*(A) \leq \underline{\int_D} \kappa_A.$$

S druge strane, za svaki elementarni skup $E \supset A$ je $\kappa_A \leq \kappa_E$, pa koristeći (c) dobijamo da je

$$\underline{\int_D} \kappa_A \leq \underline{\int_D} \kappa_E = \mu(E \cap D) \leq \mu(E).$$

Odatle slijedi da je

$$\underline{\int_D} \kappa_A \leq \mu^*(A)$$

i dokaz tvrđenja (d), a s njim i leme, je završen.

Da se za proizvoljnu ograničenu funkciju znak $\leq$ u (a) ne može zamijeniti sa $=$, pokazuje sljedeći

4.9. Primjer. Neka je $A = \{(x^1, x^2) : x^1 - \text{racionalan}\}$, $B = \mathbf{R}^2 - A$. Neka su f i g karakteristične funkcije redom skupova A i B. Odredimo gornji i donji integral funkcija f i g na intervalu $I^2 = [0,1] \times [0,1]$. Ako je P podjela intervala I^2, onda u svakom intervalu $S \in P$ za koji je $\mu(S) \neq 0$, ima tačaka i iz A i iz B. Zato je $M_S = 1$, $m_S = 0$ za obje funkcije f i g. Slijedi da je

$$\underline{I}(f,P) = \underline{I}(g,P) = \sum_{s\in P} 0 \cdot \mu(S) = 0,$$

$$\overline{I}(f,P) = \overline{I}(g,P) = \sum_{s\in P} 1 \cdot \mu(S) = \mu(I^2) = 1$$

$$\underline{\int_{I^2}} f = \underline{\int_{I^2}} g = 0, \quad \overline{\int_{I^2}} f = \overline{\int_{I^2}} g = 1.$$

Pošto je $f + g = 1$, na osnovu 4.8(d) imamo da je

$$\underline{\int}_{I^2}(f+g) > \underline{\int}_{I^2} f + \underline{\int}_{I^2} g, \quad \overline{\int}_{I^2}(f+g) < \overline{\int}_{I^2} f + \overline{\int}_{I^2} g.$$

4.10. Riemannov integral. Iz prethodnog primjera vidimo da gornji i donji integral nemaju svojstva koja očekujemo od funkcije $(D, f) \longmapsto \int_D f$. Ako se ograničimo na klasu $\mathcal{R}$ funkcija f na kojoj gornji i donji integral imaju istu restrikciju, onda će ta restrikcija imati željena svojstva 1.1(a)–(d).

4.11. Definicija. Neka je D skup mjerljiv po Jordanu i $f : D \to \mathbf{R}$ funkcija ograničena na D (ili proizvoljna lokalno ograničena funkcija $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$). Ako je $\overline{\int}_D f = \underline{\int}_D f$, onda se kaže da je f *integrabilna na D po Riemannu* ili da je f *$\mathcal{R}$-integrabilna na D*, a zajednička vrijednost gornjeg i donjeg integrala naziva se *Riemannovim integralom funkcije f na skupu D* i označava sa $\int_D f$ ili $\int_D f(x)\,dx$. (Na osnovu 4.6 Riemannov integral je ekstenzija integrala proste funkcije. otuda ista oznaka za oba integrala).

4.12. Teorema. *Riemannov integral ima sljedeća svojstva*:

(a) *Klasa $\mathcal{R}(D)$ funkcija $f : D \to \mathbf{R}$ (ili $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$) integrabilnih na $D \in \mathcal{J}$ čini vektorski prostor, a $\mathcal{R}$-integral $f \longmapsto \int_D f$ je linearna funkcija na tom prostoru. Drugim riječima, ako su funkcije f i g integrabilna na $D \in \mathcal{J}$, onda su i funkcije $f + g$ i cf integrabilne na D i važi*

$$\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g, \quad \int_D cf = c\int_D f.$$

(b) *Ako je $f \in \mathcal{R}(D_1)$, $f \in \mathcal{R}(D_2)$ i $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, onda je $f \in \mathcal{R}(D_1 \cup D_2)$ i*

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

(c) *Ako je $D \in \mathcal{J}$, $f \in \mathcal{R}(D)$, $g \in \mathcal{R}(D)$ i $f(x) \le g(x)$ za $x \in D$, onda je*

$$\int_D f \le \int_D g.$$

(d) *Ako je $D \in \mathcal{J}$, onda je karakteristična funkcija κ_D skupa D integrabilna na D i važi*

$$\int_D \kappa_D = \mu(D).$$

(d') $\displaystyle\int_D 1 = \mu(D)$.

(e) (i) *Ako je* $D \in \mathcal{J}$ *i* $f \in \mathcal{R}(D)$, *onda je* $f \in \mathcal{R}(D')$ *za svaki skup* $D' \subset D$ *mjerljiv po Jordanu.* (*Specijalno, to znači da iz* $D_1 \in \mathcal{J}$, $D_2 \in \mathcal{J}$, $f \in \mathcal{R}(D_1)$, $f \in \mathcal{R}(D_2)$ *slijedi da je* $f \in \mathcal{R}(D_1 \cap D_2)$, $f \in \mathcal{R}(D_1 - D_2)$ *i* $f \in \mathcal{R}(D_1 \cup D_2)$. *Pritom je* $f \cdot \kappa_{D'} \in \mathcal{R}(D)$ *i važi*

$$\int_{D'} f = \int_D f\kappa_{D'}.$$

(ii) *Ako je* $f \in \mathcal{R}(D')$, $D' \subset D \in \mathcal{J}$, *onda je* $f \cdot \kappa_{D'} \in \mathcal{R}(D)$ *i važi jednakost* (i).

Dokaz. Tvrđenja (a), (b), (c) i (d) su trivijalne posljedice leme 4.8.

Tvrđenje (e) (i) je posledica tvrđenja (b) leme 4.8. Naime iz

$$\overline{\int_D} f \geq \overline{\int_{D'}} f + \overline{\int_{D-D'}} f, \quad \underline{\int_D} f \leq \underline{\int_{D'}} f + \underline{\int_{D-D'}} f$$

i pretpostavke $f \in \mathcal{R}(D)$, slijedi da je

$$\left(\overline{\int_{D'}} f - \underline{\int_{D'}} f\right) + \left(\overline{\int_{D-D'}} - \underline{\int_{D-D'}} f\right) = 0.$$

Ostaje još da primijetimo da je zbir dva nenegativna realna broja jednak nuli ako i samo ako su oba sabiraka jednaki nuli.

4.13. Klasa $\mathcal{R}$-integrabilnih funkcija. Činjenica da su gornji i donji integral neke funkcije jednaki, ne govori nam mnogo o svojstvima funkcije. Zato nam je nužna unutrašnja karakterizacija $\mathcal{R}$-integrabilnih funkcija, koja se može efektivno provjeravati.

4.14. Lema (osnovna). *Ograničena funkcija* $f : D \to \mathbf{R}$ *je integrabilna na* D *ako i samo ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoje proste funkcije* s_1 *i* s_2 *takve da je* $s_1 \leq f \leq s_2$ *i* $\int_D s_2 - \int_D s_1 < \varepsilon$.

(Iz napomene 4.7.2 slijedi da se u osnovnoj lemi možemo ograničiti na funkcije $u = \sum_{i=1}^k M_i \kappa_{D_i}$, $l = \sum_{i=1}^k m_i \kappa_{D_i}$, gdje je $P = \{D_1, \dots, D_k\}$ podjela skupa D).

Dokaz. Neka je f integrabilna i $\varepsilon > 0$. Tada postoje proste funkcije s_1 i s_2, takve da je $s_1 \leq f \leq s_2$, $\int_D s_2 < \overline{\int_D} f + \varepsilon/2$, $\int_D s_1 > \underline{\int_D} f - \varepsilon/2$. Slijedi da je $\int_D s_2 - \int_D s_1 < \varepsilon$. Obratno, ako je uslov leme zadovoljen za svaki $\varepsilon > 0$, onda iz 4.6 i 4.8(c) slijedi da je $0 \leq \overline{\int_D} f - \underline{\int_D} f < \varepsilon$ za svaki $\varepsilon > 0$. To znači da je $\overline{\int_D} f = \underline{\int_D} f$ i dokaz leme je završen.

4.15. Komentar. Za proizvoljnu podjelu P skupa $D \in \mathcal{J}$ i proizvoljni $\varepsilon > 0$ je

$$\begin{aligned}\overline{I}(f,P) - \underline{I}(f,P) &= \sum_{S\in P}(M_S - m_S)\mu(S)\\ &= \sum{}'(M_S - m_S)\mu(S) + \sum{}''(M_S - m_S)\mu(S),\end{aligned}$$

gdje je sa $\sum{}'$ označena suma po onim $S \in P$ na kojima je $M_S - m_S < \varepsilon/(2\mu(I))$, a sa $\sum{}''$ suma po ostalim $S \in P$. U prvoj sumi je $\sum{}'\mu(S) < \mu(I)$, u drugoj je $M_S - m_S < 2M$, gdje je $M > 0$ takav da je $|f(x)| < M$ za $x \in D$. Slijedi da je

$$0 \le \overline{\int_D} f - \underline{\int_D} f \le \overline{I}(f,P) - \underline{I}(f,P) < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\sum{}''\mu(S).$$

Naslućujemo da je bogatstvo skupa tačaka prekida funkcije f ono svojstvo funkcije kojim se može okarakterisati njena integrabilnost. Na primjer, očigledno, f je integrabilna ako skup njenih tačaka prekida ima svojstvo: za svaki $\varepsilon > 0$ postoji podjela P takva da je $\sum{}''\mu(S) < \varepsilon/(4M)$. Odatle lako slijedi da je f integrabilna ako taj skup ima Jordanovu mjeru nula. Međutim, u zadatku 9 dat je primjer integrabilne funkcije čiji skup tačaka prekida nije Jordanove mjere nula. To vodi k ideji da se nađe precizniji način mjerenja „malih“ skupova, nego što je spoljašnja Jordanova mjera.

4.16. Skup Lebesgueove mjere nula. Za skup $A \subset \mathbf{R}^n$ kaže se da ima *Lebesgueovu mjeru nula*, odnosno da je *Lebesgueove mjere nula*, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji niz (I_k^n) intervala takav da je

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^n \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\mu(I_k^n) < \varepsilon.$$

S obzirom da za svaki interval I_k^n postoji otvoren interval J_k^n takav da je $I_k^n \subset J_k^n$ i $\mu(J_k^n) < \mu(I_k^n) + \varepsilon/2^k$, slijedi da se u definiciji skupa (Lebesgueove) mjere nula mogu uzeti otvoreni intervali $\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon/(2^k)) = \varepsilon \right)$.

Kad je neki uslov zadovoljen svuda osim u tačkama skupa koji ima Lebesgueovu mjeru nula, kaže se da taj uslov važi *skoro svuda* (skraćeno s.s.). (Kad je neko svojstvo narušeno ma skupu Jordanove mjere nula, govorićemo, ponekad, da važi skoro svuda u odnosu na Jordanovu mjeru).

Svaki interval I^n može se razbiti na prebrojivo mnogo disjunktnih podintervala (I_k^n) takvih da je $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(I_k^n) = \mu(I^n)$. Odatle slijedi da je svaki skup Jordanove mjere nula u isto vrijeme i skup Lebesgueove mjere nula. Obratno tvrđenje ne važi kao što to pokazuje na primjer skup $\mathbf{N}$ prirodnih brojeva koji ima Lebesgueovu, ali ne i Jordanovu mjeru nula, (vidi primjere 4.17). Jasno je međutim, da kompaktan skup koji ima Lebesgueovu mjeru nula ima i Jordanovu mjeru nula. (Kad se iz prebrojivog pokrivača (I_k^n) otvorenim intervalima, ukupne zapremine $\sum \mu(I_k^n) < \varepsilon$, izdvoji konačan potpokrivač, onda i taj konačan potpokrivač ima ukupnu zapreminu $< \varepsilon$.

4.17. Primjeri. (a) Najviše prebrojiv skup ima Lebesgueovu mjeru nula.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Poređajmo elemente skupa A u niz $a_1, a_2, a_3, \dots$ i svaki a_i prekrijmo intervalom I_i^n zapremine $\mu(I_i^n) < \varepsilon/(2^i)$. Tada je $A \subset \bigcup_i I_i^n$ i $\sum_i \mu(I_i^n) < \varepsilon$.

(b) Unija najviše prebrojive familije skupova mjere nula je skup Lebesgueove mjere nula.

Dokaz. Neka je (A_k) niz skupova mjere nula. Neka je $\varepsilon > 0$. Za svaki A_k postoji pokrivač $(I_{k,m}^n)$ takav da je $\sum_m \mu(I_{k,m}^n) < \varepsilon/2^k$. Familija $(I_{k,m}^n)_{(m,k)\in \mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ je prebrojiva (jer je skup $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ prebrojiv). Pošto za red sa pozitivnim članovima važi asocijativni zakon III.4.3, slijedi da je $\sum_{m,k} \mu(I_{k,m}) < \varepsilon$.

(c) Podskup skupa mjere nula je i sam mjere nula.

(d) Interval I^n sa nepraznom unutrašnjošću nije skup mjere nula.

4.19. Teorema. (Lebesgueov kriterijum integrabilnosti). *Ograničena funkcija $f : D \to \mathbf{R}$ integrabilna je na skupu D mjerljivom po Jordanu ako i samo ako je neprekidna skoro svuda na D.*

Dokaz. Neka je $I^n \supset D$ zatvoreni interval i $\widehat{f} : I^n \to \mathbf{R}$ ekstenzija od f takva da je $\widehat{f}(x) = 0$ za $x \in I^n - D$. Tada je $f \in \mathcal{R}(D)$ ako i samo ako je $\widehat{f} \in \mathcal{R}(I^n)$, (zadatak 1). Pošto je ∂D skup (Jordanove) mjere nula a skupovi tačaka prekida funkcija f i $\widehat{f}$ se razlikuju eventualno za podskup od ∂D, slijedi da je dovoljno dokazati teoremu za slučaj $D = I^n$. Neka je $f : I^n \to \mathbf{R}$ integrabilna. Dokazaćemo najprije da skup $A_\delta = \{x \in I^n : \operatorname{osc}(x,t) \geq \delta\}$ ima Jordanovu mjeru nula. Iz osnovne leme 4.14 slijedi da postoji podjela P takva da je $\sum_{S\in P}(M_S - m_S)\mu(S) < \varepsilon \cdot \delta$. Neka je Q familija onih intervala podjele P na kojima je $M_S - m_S \geq \delta$. Q je pokrivač skupa A_δ. Slijedi da je

$$\sum_{S\in Q} \mu(S) = \frac{1}{\delta} \sum_{S\in Q} \delta \cdot \mu(S) \leq \frac{1}{\delta} \sum_{S\in Q} (M_S - m_S)\mu(S) \leq \frac{1}{\delta} \varepsilon \cdot \delta = \varepsilon.$$

Dokazali smo da se za svaki $\varepsilon > 0$, A_δ može prekriti sa konačno mnogo intervala ukupne zapremine manje od ε. To znači da je A_δ skup mjere nula. Skup A tačaka prekida funkcije f ima reprezentaciju $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_{1/n}$. Iz primjera 4.17 slijedi da A ima Lebesgueovu mjeru jednaku nuli i neophodnost uslova teoreme je dokazana.

Obratno, neka je f neprekidna skoro svuda (i ograničena). Dokazaćemo integrabilnost primjenom osnovne leme 4.14. Neka je $\varepsilon > 0$. Saglasno komentaru 4.15

treba da nađemo podjelu P takvu da bude $\sum''\mu(S) < \varepsilon/(4M)$, gdje se sumiranje vrši po onim intervalima podjele P na kojima je $M_S - m_S \geq \varepsilon/(2\mu(I^n))$. Dakle, pozabavimo se skupom $A_{\varepsilon/(2\mu(I^n))}$. Taj skup ima Lebesgueovu mjeru jednaku nuli (jer je podskup skupa svih tačaka u kojima f ima prekid). Skup $A_{\varepsilon/(2\mu(I^n))}$ je zatvoren podskup (II.18.9) kompakta I^n, pa je kompaktan. Dakle, $A_{\varepsilon/(2\mu(I^n))}$ ima Jordanovu mjeru nula. Slijedi da postoji konačno mnogo otvorenih intervala $I_1^n, \ldots, I_k^n$ koji pokrivaju skup $A_{\varepsilon/(2\mu(I^n))}$, koji imaju ukupnu zapreminu manju od $\varepsilon/(4M)$. Za svaki $x \in B = I^n - \bigcup_{i=1}^m I_i$ je $\operatorname{osc}(x,f) < \varepsilon/(2\mu(I^n))$. Postoji zato za svaki $x \in B$ otvoreni paralelopiped $J_x \ni x$ takav da je $\operatorname{osc}(f, J_x) < \varepsilon/(2\mu(I^n))$. Pošto je B kompaktan, postoji konačno mnogo ovih paralelopipeda $J_1, \ldots, J_m$ koji pokrivaju skup B. Neka je sada P proizvoljna podjela takva da je za svaki $S \in P$, $S \subset I_i^n$ za neki $i = 1, \ldots, k$ ili $S \subset J_j$ za neki $j = 1, \ldots, m$. Za $S \subset J_j$ je $M_S - m_S < \varepsilon/(2\mu(I^n))$ po izboru paralelopipeda J_j. Dalje, $\sum_{S \subset I_i} \mu(S) < \varepsilon/(4M)$. To znači da je u oznakama komentara 4.15, $\sum''\mu(S) < \varepsilon/(4M)$ i dokaz teoreme je završen.

4.20. Teorema. *Neka je $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ lokalno ograničena funkcija. Tada je f integrabilna na svakom skupu D mjerljivom po Jordanu ako i samo ako je f neprekidna skoro svuda u $\mathbf{R}^n$.*

Dokaz. Pošto je svaki interval I^n mjerljiv po Jordanu, direktno tvrđenje slijedi iz 4.19 i činjenice da se $\mathbf{R}^n$ može predstaviti kao unija prebrojive kolekcije intervala. Obratno, ako je f neprekidna s.s. na $\mathbf{R}^n$, ona je ona neprekidna s.s. na svakom skupu D mjerljivom po Jordanu (tvrđenje ponovo slijedi iz 4.19).

4.21. Zaključak. Za Riemannov integral $(D, f) \longmapsto \int_D f$ može se računati da je definisan na proizvodu $\mathcal{J} \times \mathcal{F}$ prstena $\mathcal{J}$ skupova mjerljivih po Jordanu i vektorskog prostora $\mathcal{F}$ funkcija $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ neprekidnih s.s. i lokalno ograničenih. Tada Riemannov integral ima svojstva 1.1(a)–(d) i djelimično je rješenje problema postavljenog u 1.1. (Dalje proširivanje klase skupova i klase funkcija, obavićemo u Glavi VI). To što se računa da su sve funkcije definisane na čitavom prostoru $\mathbf{R}^n$, ne umanjuje opštost razmatranja. Naime, zamjenom funkcije $f : D \to \mathbf{R}$ koja je definisana na skupu $D \subset \mathbf{R}^n$, funkcijom $\widehat{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, skup tačaka prekida se može povećati samo za neki podskup skupa ∂D koji ima Jordanovu mjeru nula, pri čemu obje funkcije $\widehat{f}$ i f imaju jednake vrijednosti (gornjeg i donjeg) integrala na skupu D.

Tehnika Riemannovog integrala ne dopušta nikakvo suštinsko proširenje klase skupova $\mathcal{J}$ i klase $\mathcal{F}$ funkcija f osim ono nesuštinsko u paragrafu 10, gdje klasa skupova prestaje da bude prsten.

4.22. Zadaci za vježbu

1. Neka je D skup mjerljiv po Jordanu, $I^n \supset D$ interval, $f : D \to \mathbf{R}$ ograničena na D i $\widehat{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definisana sa $\widehat{f}(x) = f(x)$ za $x \in D$, $\widehat{f}(x) = 0$ za $x \in \mathbf{R}^n - D$.

Dokazati da je $\overline{\int}_D f = \overline{\int}_{I^n} \widehat{f}$, $\underline{\int}_D f = \underline{\int}_{I^n} \widehat{f}$.

2. Neka je $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ograničena funkcija sa kompaktnim nosačem, a s prosta funkcija pri čemu je $s \geq f$ $(s \leq f)$. Neka je D skup mjerljiv po Jordanu. Dokazati da tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji elementaran skup $E \supset D$ $(E \subset D)$ i stepenasta funkcija s_t takva da je $s_t(x) \geq f(x)$, $(s_t(x) \leq f(x))$ za $x \in D$, $s_t(x) = 0$ za $x \in CE$ i $\left|\int_E s_t - \int_E s\right| < \varepsilon$ te da se u 4.6 možemo ograničiti na stepenaste funkcije.

3. Neka je f konstantna funkcija, $f(x) = 0$ za svaki x. Dokazati da je $\int_D f = 0$ za svaki $D \in \mathcal{J}$. Uputstvo: Iz $f + f = f$ i 4.12(a) slijedi da je $2\int_D f = \int_D f$.

4. Neka je f integrabilna na D i g ograničena na D i takva da je $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in D$ osim u tačkama skupa $A \subset D$ Jordanove mjere nula. Dokazati da je g integrabilna na D i da je $\int_D g = \int_D f$. Uputstvo: Izmjenom vrijednosti s.s. neprekidne funkcije na skupu Jordanove mjere nula dobija se ponovo s.s. neprekidna funkcija. Zbog toga je g integrabilna na D. Dalje je, $\int_D g = \int_{D-A} g + \int_A g = \int_{D-A} f = \int_{D-A} f + \int_A f = \int_D f$.

5. (**Teorema jedinstvenosti**). Neka je $\mathcal{D}$ potprsten prstena $\mathcal{J}$ skupova mjerljivih po Jordanu koji sadrži sve intervale. Neka je $\mathcal{F}$ potprostor vektorskog prostora R $\mathcal{R}$-integrabilnih funkcija koji sadrži karakteristične funkcije elemenata iz $\mathcal{D}$. Tada je restrikcija Riemannovog integrala (sa $\mathcal{J} \times \mathcal{R}$) na $\mathcal{D} \times \mathcal{F}$ jedino preslikavanje koje ima svojstva (a)–(d) teoreme 4.4, (odnosno svojstva 1.1(a)–(d)). Uputstvo: Pošto je $\mathcal{D} \subset \mathcal{J}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}$ egzistencija takvog preslikavanja ustanovljena je u teoremi 4.12. Ostaje da se dokaže njegova jedinstvenost. Neka $\widetilde{\int} : \mathcal{D} \times \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ ima navedena svojstva. Iz (d) tada slijedi da je $\widetilde{\int}_D \kappa_D = \int_D = \mu(D)$ za svaki $D \in \mathcal{D}$, a odatle i iz (a) da je $\widetilde{\int}_D s = \int_D s$ za svaku prostu funkciju s. Iz (c) i 4.6 sada se lako dobija da je $\underline{\int}_D f \leq \widetilde{\int}_D f \leq \overline{\int}_d f$ za svaki $D \in \mathcal{D}$ i svaki $f \in \mathcal{F}$. Pošto je f $\mathcal{R}$-integrabilna, slijedi da je $\widetilde{\int}_D^f = \int_D f$.

6. Dokazati, bez korišćenja Lebesgueovog kriterijuma integrabilnosti, da je svaka funkcija koja ima jedno od sljedećih svojstava $\mathcal{R}$-integrabilna na D: (a) monotona na $D = [a, b]$ (b) neprekidna na $D \in \mathcal{J}$, (c) ima konačno mnogo tačaka prekida, (d) skup tačaka prekida je Jordanove mjere nula.

7. Neka su racionalni brojevi iz $(0, 1)$ sadržani u prebrojivoj familiji intervala $\{(a_n, b_n) : n \in \mathbf{N}, (a_n, b_n) \subset (0, 1)\}$. Ako je $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < 1$ i $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, dokazati da ∂A nije Lebesgueove mjere nula.

8. Da li je karakteristična funkcija Cantorovog skupa $\mathcal{R}$-integrabilna?

9. (a) Dokazati da je funkcija f iz zadatka II.18.13.9 integrabilna na intervalu $[0, 1]$ i da je $\int_{[0,1]} f = 0$.

(b) Neka je $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ tzv. *Riemannova funkcija*:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } x \text{ iracionalan,} \\ 0 & \text{ako je } x \text{ racionalan a } y \text{ iracionalan,} \\ 1/n & \text{ako je } x = m/n, \text{ pri čemu su } m \text{ i } n \text{ relativno} \\ & \text{prosti a } y \text{ racionalan.} \end{cases}$$

Dokazati da je f integrabilna na I^2 i da je $\int_{I^2} f = 0$.

10. Neka je $C_0(\mathbf{R}^n)$ klasa svih neprekidnih funkcija sa kompaktnim nosačem a $\mathcal{R}_0(\mathbf{R}^n)$ klasa svih ograničenih funkcija sa kompaktnim nosačem koje su neprekidne s.s. Dokazati da ako neprekidna funkcionela definisana na $\mathcal{R}_0(\mathbf{R}^n)$ uzima na $C_0(\mathbf{R}^n)$ iste vrijednosti kao $\mathcal{R}$-integral, onda ona i na $\mathcal{R}_0(\mathbf{R}^n)$ uzima iste vrijednosti kao $\mathcal{R}$-integral.

11. Ako su f i g integrabilne na D, dokazati da je i fg integrabilna. Uputstvo: Skup tačaka prekida funkcije fg je podskup unije tačaka prekida funkcija f i g.

5. Još neka svojstva Riemannovog integrala

U ovom i naredna tri paragrafa razmatraju se neka svojstva Riemannovog integrala koja se koriste pri izračunavanju integrala. Svuda pretpostavljamo da su sve funkcije lokalno ograničene i neprekidne s.s., a skupovi mjerljivi po Jordanu.

5.1. Teorema. *Ako su $D_1, D_2 \in \mathcal{J}$, a $f, g \in \mathcal{R}$ onda*:

(i) $\displaystyle\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f - \int_{D_1 \cap D_2} f$ *(pri čemu se podrazumijeva $\int_\varnothing f = 0$).*

(ii) *Ako je $D \in \mathcal{J}$ i $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in D$, onda je*

$$\int_D f \geq 0.$$

(iii) *Ako je $m \leq f(x) \leq M$ za $x \in D$, onda je*

$$m\mu(D) \leq \int_D f \leq M\mu(D).$$

(iv) (**Prva teorema o srednjoj vrijednosti.**) *Pod uslovima tvrđenja* (iii) *postoji $\theta \in [m, M]$ takav da je*

$$\int_D f = \theta\mu(D).$$

Ako je D povezan i f neprekidna, onda postoji tačka $p \in D$ takva da je $\theta = f(p)$, odnosno

$$\int_D f = f(p)\mu(D).$$

(v) *$|f|$ je takođe u $\mathcal{R}$ i*

$$\left|\int_D f\right| \leq \int_D |f|.$$

(vi) *Ako je $|f(x)| \leq M$, onda je*

$$\left|\int_D f\right| \leq M\mu(D).$$

(vii) *Ako je $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ neprekidno preslikavanje, onda preslikavanje $x \longmapsto F(f(x), g(x))$ takođe pripada klasi $\mathcal{R}$. Specijalno fg, f/g ako je $g(x) \neq 0$ na D, integrabilne su na D.*

(viii) *Ako je $f(x) \geq 0$ za $x \in D$ i $\int_D f = 0$, onda je $f(x) = 0$ s.s. na D.*

Dokaz. Prva četiri tvrđenja su posljedice osnovnih svojstava 4.12 integrala. Na primjer, dokaz tvrđenja (iii) izgleda ovako: Iz svojstava (a) i (d) slijedi da je $\int_D m = m\int_D 1 = m\mu(D)$. Iz (c) dobijamo $\int_D m \leq \int_D f$ i zato $m\mu(D) \leq \int_D f$. A tvrđenja (iv) ovako: Ako je $\mu(D) = 0$ za θ se može uzeti proizvoljan element iz $[m, M]$. Ako je $\mu(D) > 0$, onda iz (iii) slijedi da je $\left(\int_D f\right)/\mu(D) \in [m, M]$. Kad je f neprekidna i D povezan, onda je i $f(D)$ povezan u $\mathbf{R}$, tj. interval I. Iz (iii) slijedi da $\left(\int_D f\right)/\mu(D) \in I$ i tvrđenje je dokazano. Dokaz tvrđenja (v) i (vi) prepuštam čitaocu, uz napomenu da $|f| \in \mathcal{R}$ slijedi iz 4.19.

Tvrđenje (vii) je posljedica teoreme 4.19: Skup tačaka prekida preslikavanja $x \longmapsto F(f(x), g(x))$ je podskup unije skupova tačaka prekida funkcija f i g. Unija dva skupa mjere nula je skup mjere nula. Podskup skupa mjere nula je skup mjere nula.

Dokažimo još tvrđenje (viii): Ako je $\mu(D) = 0$ tvrđenje je trivijalno. Ako je $\mu(D) > 0$, onda D nema unutrašnjih tačaka u kojima je f neprekidna i $\neq 0$. (U protivnom bi, na osnovu (iii), bilo $\int_D f > 0$. Slijedi da je $f(x) = 0$ skoro svuda u skupu tačaka $x \in D$ u kojima je f neprekidna. Na osnovu Lebesgueovog kriterijuma integrabilnosti to znači da je $f(x) = 0$ skoro svuda na D.

5.2. Izračunavanje integrala pomoću Riemannovih integralnih suma. Određivanje približne vrijednosti integrala $\int_D f$ u suštini je nalaženje integrala $\int_D s$ neke proste funkcije s, takve da je razlika $\int_D f - \int_D s$ mala. Po pravilu to se radi tako što se skup D razbija na (ili aproksimira sa) konačnim familijama $D_1, \ldots, D_k$

skupova dovoljno malog dijametra čije mjere se lako određuju, (najčešće su to intervali), u svakom D_i, izabere se po jedna tačka t_i i formira suma $\sum_{i=1}^{k} f(t_i)v(D_i)$. (Ta suma je integral $\int_D s$ proste funkcije $s = \sum f(t_i)\kappa_{D_i}$). Mi ćemo dokazati da se razbijanjem skupa D na sve sitnije djelove, ovakvim sumama možemo približiti integralu $\int_D f$ koliko god zaželimo.

5.3. Definicija. Ako je $P = \{D_1, \dots, D_k\}$ razbijanje mjerljivog skupa D, onda se svaka n-torka $T = \{t_1, \dots, t_k\}$ takva da je $t_i \in D_i$, naziva *označenjem podjele* P a par (P, T) *označenom podjelom* skupa D. Suma

$$S(f, P, T) = \sum f(t_i)\mu(D_i)$$

naziva se *Riemannovom integralnom sumom* funkcije f u odnosu na označenu podjelu (P, T).

Pisaćemo

$$\lim_{d(P)\to 0} S(f, P, T) = A,$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podjelu $P = \{D_1, \dots, D_k\}$ za koju je $d(P) = \max_{1\le i\le k} \operatorname{diam} D_i < \delta$ ($d(P)$ ćemo zvati *dijametrom podjele* P) važi:

$$|S(f, P, T) - A| < \varepsilon$$

(nezavisno od izbora označenja T).

5.4. Lema. *Ako je (P_k) niz razbijanja mjerljivog skupa D i $d(P_k) \to 0$ kad $k \to \infty$, onda je*

$$\lim_{k\to\infty} \overline{I}(f, P_k) = \overline{\int_D} f,$$
$$\lim_{k\to\infty} \underline{I}(f, P_k) = \underline{\int_D} f.$$

Dokaz. Po definiciji supremuma, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji razbijanje P takvo da je

$$0 \le \underline{\int_D} f - \underline{I}(f, P) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Neka je Q proizvoljno razbijanje skupa D. Elemente iz Q razvrstajmo u dva skupa: skup onih $D_i \in Q$ koji leže u nekom skupu podjele P i skup onih $\widetilde{D}_j$ koji ne leže ni u kojem elementu razbijanja P. Tada je

$$\underline{I}(f, Q) = \sum m_i\mu(D_i) + \sum m_j\mu(\widetilde{D}_j). \tag{2}$$

Neka je P' zajedničko usitnjenje razbijanja P i Q koje se dobija kad se skupovi $\widetilde{D}_j$ razbiju na djelove $\widetilde{D}_{jl}$, koji leže u skupovima podjele P. Tada je

$$\begin{aligned} 0 \le \underline{I}(f,P') - \underline{I}(f,Q) &= \sum m_{jl}\mu(\widetilde{D}_{jl}) - \sum m_j \mu(\widetilde{D}_j) \\ &= \sum_{l,j}(m_{jl}-m_j)\mu(\widetilde{D}_{jl}) \le 2M \sum_j \mu(\widetilde{D}_j), \end{aligned}$$

gdje je $M > 0$ takav da je $|f(x)| < M$ za $x \in D$. Pošto je mjera unije $\bigcup \partial D_i$ granicâ ∂D_i jednaka nuli, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takav da je $\sum_j \mu(\widetilde{D}_j) < \varepsilon/(4M)$ za $d(Q) < \delta$. Iz (3) slijedi da je za takve podjele Q

$$\underline{I}(f,P') \le \underline{I}(f,Q) + \varepsilon/2. \tag{4}$$

Pošto je P' usitnjenje i podjele P, imamo da je $\underline{I}(f,P) \le \underline{I}(f,P')$ i iz (4) slijedi da je

$$0 \le \underline{\int_D} f - \underline{I}(f,P') < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Relacije (5) i (1) zajedno daju:

$$0 \le \underline{\int_D} f - \underline{I}(f,Q) \le \underline{\int_D} f - \underline{I}(f,Q') + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{6}$$

Po pretpostavci postoji k_0 takav da je $d(P_k) < \varepsilon$ za $k \ge k_0$. Iz (6) slijedi da je

$$0 \le \underline{\int_D} f - \underline{I}(f,P_k) < \varepsilon \qquad \text{za } k \ge k_0.$$

Time je dokaz leme završen.

5.5. Teorema. *Za skup D mjerljiv po Jordanu i funkcijU $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ slijedeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $f \in \mathcal{R}(D)$ *i* $\int_D f = A$,

(b) $\lim_{d(P)\to 0} S(f,P,T) = A$.

Dokaz. Za svaku podjelu P i svako označenje T je

$$\underline{I}(f,P) \le S(f,P,T) \le \overline{I}(f,P). \tag{7}$$

Iz leme 5.4 i (7) slijedi da je

$$\underline{\int_D} f \le \varliminf_{k\to\infty} S(f,P_k,T_k) \le \varlimsup_{k\to\infty} S(f,P_k,T_k) \le \overline{\int_D} f$$

nezavisno od izbora označenja T_k podjele P_k. Ako važi (a), onda je $\underline{\int}_D f = \overline{\int}_D f = A$ i zato

$$\lim_{d(P_k)\to 0} S(f, P_k, T_k) = A,$$

nezavisno od izbora označenja T_k podjele P_k. To je ekvivalentno sa (b). Obratno, ako važi (b), onda iz leme 5.4 slijedi da je $\left|\underline{\int}_D f - A\right| < \varepsilon$ i $\left|\overline{\int}_D f - A\right| < \varepsilon$ za svaki $\varepsilon > 0$. To znači da je $\underline{\int}_D f = \overline{\int}_D f = A$ i teorema je dokazana.

5.6. Teorema. (Osnovna teorema infinitezimalnog računa). *Neka je realna funkcija f $\mathcal{R}$-integrabilna na intervalu $[a, b]$. Neka je F funkcija definisana sa*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{8}$$

Tada je funkcija F (ravnomjerno) neprekidna na $[a, b]$. Ako je f neprekidna u tački $x \in [a, b]$, onda je F diferencijabilna u x i važi

$$F'(x) = f(x).$$

(Iz osnovne teoreme infinitezimalnog računa slijedi da svaka neprekidna funkcija $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ima primitivnu na $[a, b]$. Ta posljedica, u sljedećoj formulaciji, jedan je od najvažnijih rezultata u matematici: Za svaku neprekidnu funkciju $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ diferencijalna jednačina $F'(x) = f(x)$ ima riješenje na $[a, b]$ i pritom samo jedno koje zadovoljava uslov $F(x_0) = y_0$, gdje su $x_0 \in [a, b]$ i $y_0 \in \mathbf{R}$ proizvoljni).

Dokaz. Neka je $M > 0$ takav da je $|f(x)| \le M$ za $x \in [a, b]$, (definicija 4.11). Iz 5.1(vi) slijedi (da f zadovoljava Lipschitzov uslov u $[a, b]$):

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \le M|x - y|.$$

Odatle slijedi da je F (ravnomjerno) neprekidna na $[a, b]$. Neka je u daljem f neprekidna u $x \in [a, b]$ i $\varepsilon > 0$. Onda postoji $\delta > 0$ takav da je $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ za $t \in A = [x - \delta, x + \delta] \cap [a, b]$. Za svaki $y \in A$ na osnovu 5.1(v) i 5.1(vi):

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{y - x}\int_x^y [f(t) - f(x)]\,dt\right| \\ &\le \frac{1}{|y - x|}\int_A |f(t) - f(x)|\,dt < \varepsilon.\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\lim_{y\to x}\frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x)$$

i dokaz je završen.

5.7. O odnosu diferenciranja i integraljenja. Pošto je svaka $\mathcal{R}$-integrabilna funkcija neprekidna s.s., u osnovnoj teoremi infinitezimalnog računa se, u stvari, tvrdi da relacija (2) važi s.s., tj. da je (s tačnošću s.s.) diferenciranje inverzna operacija integraljenju. Postavlja se pitanje da li je i integraljenje u istom tom smislu, inverzna operacija diferenciranja, tj. da li iz $F'(x) = f(x)$ s.s. i pretpostavke da je F neprekidna a f integrabilna na $[a, b]$, slijedi da je

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt\,?$$

Odgovor na to pitanje je negativan, kao što to pokazuje Cantorova funkcija F (primjer II.15.11.6) kod koje je $F'(x) = 0$ s.s., pa je za $f(x) = 0$, $F'(x) = f(x)$ s.s., ali je

$$\int_a^b f(t)\, dt < F(b) - F(a).$$

Dakle, da bi u (12) važila jednakost, skup na kojem se narušava odnos $F'(x) = f(x)$ mora biti siromašniji nego što je, u opštem slučaju, skup mjere nula.

U sljedećoj teoremi se dokazuje da je primitivna od f, kako je definisana u IV.10.4, u stvari, Riemannov integral funkcije f (vrijednost $F(x)$ neodređenog integrala F funkcije f u tački x je određena relacijom (13).

5.8. Teorema. (Newton-Leibnizova formula). *Neka je F neprekidna na $[a, b]$ i $D \subset [a, b]$. Ako je skup D diskretan, F diferencijabilna u $[a, b] - D$ i $F'(x) = f(x)$ za $x \in [a, b] - D$, onda je*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\, dt$$

za svaki $x \in [a, b]$.

Newton-Leibnizova formula je osnovno oruđe za efektivno izračunavanje integrala.

Dokaz. Skup $[a, b] - D$ je najviše prebrojiva unija intervala. Dokažimo da jednakost (7) važi na svakom intervalu čija unutrašnjost leži u $[a, b] - D$. Neka je P proizvoljno razbijanje odsječka $[r, s] \subset D - [a, b]$ čije su podione tačke $r = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = s$. Tada je

$$F(s) - F(t) = \sum_{i=1}^{n} \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}), \tag{14}$$

gdje je $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ takav da važi $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1})$. (Egzistencija takvih t_i slijedi iz Lagrangeove teoreme IV.8.5). Puštajući da dijametar podjele P teži nuli, na osnovu 5.5, dobijamo da je

$$F(r) - F(s) = \int_r^s f(t)\,dt. \tag{15}$$

Razmotrimo sada funkciju h definisanu sa

$$h(x) = F(x) - F(a) - \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b]. \tag{16}$$

Funkcija h je, na osnovu 5.6, neprekidna kao razlika dvije neprekidne funkcije. h je lokalno konstantna na otvorenom skupu $[a,b] - D$. Zaista, ako interval $[x,y]$ leži u $[a,b] - D$, onda iz 4.12 i (15) nalazimo da je

$$h(y) - h(x) = F(y) - F(x) - \int_x^y f(t)\,dt = 0.$$

Pošto je skup $[a,b] - D$ gust u $[a,b]$ a h neprekidna slijedi da je h lokalno konstantna na $[a,b]$. Lokalno konstantna neprekidna funkcija na povezanom skupu je konstantna. Dakle, $h(x) = h(a) = F(a) - F(a) - \int_a^a f(t)\,dt = 0$ za svaki $x \in [a,b]$. Stavljajući u (16) $h(x) = 0$ dobijamo (13) i dokaz teoreme je završen.

5.9. Napomena. Relacija (13) se često zapisuje u obliku:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(x)\Big|_a^b.$$

5.10. Teorema. *Ako niz (f_k) funkcija integrabilnih po Riemannu na skupu $D \in \mathcal{J}$ ravnomjerno konvergira ka f, onda je f $\mathcal{R}$-integrabilna na D i*

$$\int_D f = \lim_{k\to\infty} \int_D f_k. \tag{17}$$

(Topološki sadržaj tvrđenja: Klasa $\mathcal{F}$ lokalno ograničenih s.s. neprekidnih funkcija je zatvoren podskup od $(\mathbf{R})^{\mathbf{R}^n}$ u odnosu na topologiju ravnomjerne konvergencije na kompaktima).

Dokaz. Po pretpostavci teoreme, skup onih tačaka u D kojima bar jedna funkcija f_k ima prekid je unija prebrojive familije skupova mjere nula pa zato i sam mjere nula (4.17). Iz teoreme II.19.5 slijedi da je granična funkcija f lokalno ograničena, skoro svuda neprekidna pa je $f \in \mathcal{R}(D)$. Jednakost (17) je očigledna ako je $\mu(D) = 0$. Pretpostavimo zato da je $\mu(D) \neq 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Po pretpostavci postoji k_0 takav da je

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/(\mu(D)) \quad \text{za } x \in D \text{ i } k \geq k_0.$$

Tada je za $k \geq k_0$

$$\left|\int_D f_k - \int_D f\right| = \left|\int_D (f_k - f)\right| \leq \int_D |f_k - f| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(D)} \cdot \mu(D) = \varepsilon.$$

Pošto je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, slijedi (17).

Formulišimo teoremu na jeziku redova.

5.11. Teorema. *Ako je (f_k) niz funkcija integrabilnih po Riemannu na $D \subset \mathbf{R}^n$ i red $\sum f_k$ konvergira ravnomjerno na D ka f, onda je f integrabilna na D i*

$$\int_D f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_D f_k.$$

5.12. Primjer. Neka je (r_k) skup racionalnih brojeva iz $[0,1]$ poređan u niz. Neka je f_0 karakteristična funkcija skupa $[0,1]$ a f_k, $k \geq 1$, karakteristična funkcija skupa $[0,1] - \{r_1, \ldots, r_k\}$. Tada je svaka funkcija f_k integrabilna i $\int_0^1 f_k = 1$. Niz (f_k) konvergira tačka po tačka ka karakterističnoj funkciji g skupa iracionalnih brojeva, ali ne konvergira ravnomjerno. Funkcija g ima prekid u svakoj tački intervala $[0,1]$ i nije integrabilna.

Pošto prostor $\mathbf{R}^n$ ima svuda gust prebrojiv podskup mi na sličan način možemo i u $\mathbf{R}^n$, od svake neprekidne funkcije promjenom vrijednosti funkcije na skupu mjere nula, dobiti neintegrabilnu funkciju, koja je granična vrijednost niza integrabilnih funkcija. (Ako za f uzmemo karakterističnu funkciju mjerljivog skupa A koji, na primjer, ima bar jednu unutrašnju tačku, onda to znači da možemo izostavljanjem iz A skupa mjere nula, napraviti neki nemjerljiv skup).

Komentar. U duhu naše geometrijske predstave o integralu (nenegativne funkcije) kao o površini, bilo bi prirodno da funkcija g u primjeru 5.12 bude integrabilna i da joj je integral na $[0,1]$ jednak jedinici. (Iz intervala $[0,1]$ isključen je skup mjere nula).

Primjer 5.12 ilustruje osnovni nedostatak Jordanove mjere i Riemannovog integrala, da veoma slabo trpe granični proces i osjetljivi su na promjene na skupovima mjere nula. (Prirodan tok stvari bi bio da skupovi mjere nula ne utiču na integrabilnost i mjerljivost skupova).

Riemannov integral, je, u stvari, integral klase neprekidnih funkcija. On, u suštini, na toj klasi iscrpljuje sve svoje mogućnosti.

5.13. Zadaci za vježbu

1. **Druga teorema o srednjoj vrijednosti**: Ako je f monotona na $[a,b]$, onda postoji tačka $x \in [a,b]$ takva da je
$$\int_a^b f(t)\,dt = f(a)(x-a) + f(b)(b-x).$$
Uputstvo. Iz $f(a) \le \int_a^b f/(b-a) \le f(b)$ slijedi da je $\int_a^b f/(b-a) = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$, gdje je $0 \le \lambda \le 1$. Traženi x je određen jednačinom $(x-a)/(b-a) = \lambda$.
2. Dokazati sljedeće preciziranje osnovne teoreme infinitezimalnog računa. Ako je realna funkcija f $\mathcal{R}$-integrabilna na $[a,b]$, onda u svakoj tački $x \in [a,b)$ (respektivno $x \in (a,b]$, u kojoj f ima desni limes $f(x+0)$ (respektivno lijevi limes $f(x-0)$), funkcija F ima desni izvod (lijevi izvod) i važi $F'(x+0) = f(x+0)$, $(F'(x-0) = f(x-0))$. Uputstvo: Izučiti pažljivo dokaz teoreme 5.6.
3. Dokazati da Newton-Leibnizova formula važi ako se uslov da je F diferencijabilna u $[a,b] - D$ zamijeni uslovom da F ima u $[a,b) - D$ (respektivno u $(a,b] - D$) desni izvod (lijevi izvod).
4. Dati primjer funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koja je diferencijabilna u svakoj iracionalnoj tački i nije diferencijabilna ni u jednoj racionalnoj tački. Uputstvo: Koristiti zadatak 4.22.9 i osnovnu teoremu infinitezimalnog računa.
5. (a) Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ neprekidna nigdje diferencijabilna funkcija. Dokazati da je funkcija $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = x^2 f(x)$ diferencijabilna u $x = 0$ i nije diferencijabilna u $x \ne 0$.

   (b) Konstruisati funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koja je diferencijabilna samo u prebrojivo mnogo tačaka iz $\mathbf{R}$. Konstruisati takvu funkciju na kompaktnom intervalu $[a,b]$.

   (c) Konstruisati funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koja je svuda diferencijabilna osim u tačkama nekog prebrojivog skupa. Konstruisati takvu funkciju na $[a,b]$.
6. Neka je (r_n) skup racionalnih brojeva u $[0,1]$ poređan u niz i f_n karakteristična funkcija jednočlanog skupa $\{r_n\}$. Dokazati da red $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira tačka po tačka ka karakterističnoj funkciji f skupa racionalnih brojeva, ali ne konvergira ravnomjerno. Dokazati da je svaka od funkcija f_n integrabilna, $\sum_{n=0}^{\infty} \int f_n = 0$, a funkcija f nije integrabilna.
7. (**Teorema o dominantnoj konvergenciji**). Ako niz (f_n) funkcija integrabilnih po Riemannu na D konvergira tačka po tačka na D i $|f_n| \le K$ za neko $K > 0$, onda niz integrala $\left(\int_D f_n\right)$ konvergira. Ako je funkcija f integrabilna, onda $\int_D f_n \to \int_D f$.
8. Dati primjer niza (f_n) integrabilnih funkcija koji konvergira tačka po tačka ka funkciji f tako da važi: (a) f je integrabilna ali $\int f_n$ ne konvergira k $\int f$, (b) f nije integrabilna a $\int f_n$ konvergira.
9. Dokazati formulu IV 10.11.3 parcijalne integracije za Riemannov integral.

6. Uzastopne integracije

Zadatak ovog paragrafa je da da efektivni način sračunavanja integrala u $\mathbf{R}^n$, njegovim svođenjem na integrale po intervalima u $\mathbf{R}$.

6.1. Slijedeće heurističko razmatranje navodi nas na traženi rezultat. Neka su $I = [a, b]$ i $J = [c, d]$ zatvoreni intervali redom u $\mathbf{R}$ i $f : I \times J \to \mathbf{R}$ neprekidna nenegativna funkcija. Neka je V zapremina tijela ograničenog grafikom funkcije f i ravnima $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = 0$. Označimo sa $V(x)$ zapreminu koju iz tog tijela isijecaju ravni $x = a$ i njoj paralelna ravan kroz proizvoljnu tačku $x \in I$. Označimo sa $S(x)$ površinu krivolinijskog trapeza po kojem ta ravan siječe polazno tijelo: Očekujemo da za malo h bude $V(x + h) - V(x) \approx S(x)h$ odnosno $V'(x) = S(x)$. Na osnovu Newton-Leibnizove formule to je isto što i

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

S druge strane, naša predstava o integralu funkcije definisane na intervalu $[a, b]$, kao o površini ispod grafika te funkcije, znači da je

$$S(x) = \int_c^d f_x(y)\,dy,$$

gdje je $f_x(y) = f(x, y)$, odnosno

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Nameće se zaključak da važi

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy$$

odnosno

$$\int_{I\times J} f = \int_I \left(\int_J f(x, y)\,dy \right) dx = \int_J \left(\int_I f(x, y)\,dx \right) dy.$$

Sljedeću teoremu, u kojoj se dokazuje da je ovo razmatranje tačno, mi ćemo zvati *Fubinijevom teoremom*, iako je to samo specijalan slučaj teoreme VI.13.9 koja nosi taj naziv.

6.2. Teorema. *Neka su X, Y intervali redom u $\mathbf{R}^m$ i $\mathbf{R}^n$. Ako je funkcija $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ integrabilna na $X \times Y$, onda:*

(i) *Za skoro svaki $x \in X$, funkcija f_x definisana sa $f_x(y) = f(x, y)$ integrabilna je na Y.*

Slika 28.

(i') *Za skoro svaki $y \in Y$ funkcija f_y definisana sa $f_y(x) = f(x, y)$ integrabilna je na X.*

(ii) *Funkcija $x \longmapsto \displaystyle\int_Y f(x, y)\,dy$ integrabilna je na X.*

(ii') *Funkcija $y \longmapsto \displaystyle\int_X f(x, y)\,dx$ integrabilna je na Y.*

(iii) $\displaystyle\int_X \left(\int_Y f(x, y)\,dy \right) dx = \int_{X \times Y} f = \int_Y \left(\int_X f(x, y)\,dx \right) dy.$

Tvrđenja (i) i (i'), (ii) i (ii') su trivijalna kad je funkcija, f neprekidna. U opštem slučaju tvrđenje (ii) treba shvatiti ovako: Funkcija $x \longmapsto \int_Y f(x, y)\,dy$ definisana je samo skoro svuda u X. U tačkama u kojima nije definisana dopušta se da joj se pripiše bilo koja vrijednost između $\int_Y f(x, y)\,dy$ i $\int_d f(x, y)\,dy$. Prva jednakost u (iii) znači da su integrali svih na taj način dobijenih ekstenzija isti. Analogno treba tumačiti tvrđenje (ii') i drugu jednakost u (iii). Razlozi za ovakvo tumačenje tvrđenja mogu postati jasni jedino ako se izuči dokaz.

Za uzastopno integraljenje (integrale) u (iii) obično se koriste oznake

$$\int_X dx \int_Y f(x, y)\,dy \quad \text{i} \quad \int_Y dx \int_X f(x, y)\,dx.$$

Dokaz I (za slučaj kada je f neprekidna). Neka je $C(X \times Y)$ familija svih funkcija neprekidnih na $X \times Y$. Tada je sa

$$f \longmapsto \int_X \left(\int_Y f(x, y)\,dy \right) dx$$

definisano preslikavanje na $C\{X\times Y\}$ koje zadovoljava uslove teoreme jedinstvenosti 4.22.5. Slijedi da je to preslikavanje integral od f na $X\times Y$ i relacija (iii) je dokazana.

Dokaz II. Neka je P proizvoljno razbijanje skupa $X\times Y$ na intervale. Prelazeći eventualno na usitnjenje, možemo pretpostaviti da razbijanje P generiše razbijanja P_X, P_Y intervala X i Y tako da su intervali iz P oblika $S = S_X \times S_Y$, $S_X \in P_X$, $S_Y \in P_Y$. Uzimajući u obzir da je $v(S_X \times S_Y) = v(S_X)\cdot v(S_Y)$ imamo

$$
\begin{aligned}
\underline{I}(f,P) &= \sum_{S\in P} m_S(f)v(S) = \sum_{S_X,S_Y} m_{S_X\times S_Y}(f)v(S_X)v(S_Y)\\
&= \sum_{S_X}\Big(\sum_{S_Y} m_{S_X\times S_Y}(f)v(S_Y)\Big)\cdot v(S_X)\\
&\le \sum_{S_X}\Big(\inf_{x\in S_X}\sum_{S_Y} m_{S_Y}(f_x)v(S_Y)\Big)v(S_X)\\
&\le \sum_{S_X}\Big(\inf_{x\in S_X}\underline{\int}_Y f(x,y)\,dy\Big)v(S_X)\\
&\le \underline{\int}_X\Big(\underline{\int}_X f(x,y)\,dy\Big)dx\\
&\le \overline{\int}_X\Big(\underline{\int}_X f(x,y)\,dy\Big)dx\\
&\le \overline{\int}_X\Big(\overline{\int}_X f(x,y)\,dy\Big)dx\\
&\le \sum_{S_X}\Big(\sup_{x\in S_X}\Big(\overline{\int}_Y f(x,y)\,dy\Big)\Big)v(S_X)\\
&\le \sum_{S_X}\Big(\sup_{x\in S_X}\sum_{S_Y} M_{S_Y}(f_x)v(S_Y)\Big)v(S_X)\\
&\le \sum_{S_X}\Big(\sum_{S_Y} M_{S_X\times S_Y}v(S_Y)v(S_X)\Big)\\
&= \sum_{S_X\times S_Y} M_{S_X\times S_Y}v(S_X\times S_Y) \le \overline{I}(f,P).
\end{aligned}
$$

Pošto je f integrabilna, iz prethodnog niza nejednakosti i osnovne leme 4.14, slijedi da je

$$\underline{\int}_X\Big(\underline{\int}_Y f\,dy\Big)dx = \overline{\int}_X\Big(\underline{\int}_Y f\,dy\Big)dx,$$

tj. da su funkcije

$$x \longmapsto \underline{\int}_Y f(x,y)\,dy, \quad x \longmapsto \overline{\int}_Y f(x,y)\,dy \tag{4}$$

integrabilne i da je

$$(5) \qquad \int_{X\times Y} f = \int_X \Big(\underline{\int}_Y f(x,y)\,dy\Big)dx = \int_X \Big(\overline{\int}_Y f(x,y)\,dy\Big)dx.$$

Iz (5) slijedi da je

$$(6) \qquad \int_X \Big(\overline{\int}_Y f(x,y)\,dy - \underline{\int}_Y f(x,y)\,dy\Big)dx = 0.$$

Pošto je podintegralna funkcija u (6) nenegativna, na osnovu 5.1 (viii) dobijamo da je

$$\overline{\int}_Y f(x,y)\,dy = \underline{\int}_Y f(x,y)\,dy$$

za skoro svaki $x \in X$ (u odnosu na Jordanovu mjeru). Otuda slijedi tvrđenje (i). Integrabilnost funkcija (4) znači da važi tvrđenje (ii), a relacija (5) da važi prva jednakost u (iii). Potpuno analogno se dokazuju tvrđenja (i'), (ii') i druga jednakost u (iii), čime se završava dokaz teoreme.

6.3. Posljedica. *Ako je $I^n = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^n, b^n]$ i f integrabilna na I^n, onda je*

$$\int_{I^n} f = \int_{a^n}^{b^n} dx^n \int_{a^{n-1}}^{b^{n-1}} dx^{n-1} \cdots \int_{a^1}^{b^1} f(x^1, \ldots, x^n)\,dx^1.$$

6.4. Posljedica. *Neka je $E \subset \mathbf{R}^{m+n} = \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ mjerljiv skup i neka je A projekcija skupa E na $\mathbf{R}^m$, tj. skup onih $x \in \mathbf{R}^m$ za koje x-presjek $E_x = \big\{y \in \mathbf{R}^n : (x,y) \in E\big\}$ nije prazan. Tada je E_x mjerljiv za s.s. $x \in A$. Ako je A mjerljiv onda je*

$$\int_E f = \int_A dx \int_{E_x} f(x,y)\,dy.$$

Specijalno, za $f = 1$,

$$\mu_{m+n}(E) = \int_A \mu_n(D_x)\,dx,$$

gdje je μ_i Jordanova mjera u prostoru $\mathbf{R}^i$, $(i = n, m+n\,)$. Analogno tvrđenje važi za projekciju B na $\mathbf{R}^n$ i y-presjeke E_y skupa E.

Dokaz: Neka su I^m i I^n intervali u $\mathbf{R}^m$ i $\mathbf{R}^n$ takvi da je $I^{m+n} = I^m \times I^n \supset E$. Tada je $\mu_{m+n}(E) = \int_{I^{m+n}} \kappa_E$. Iz 6.2(i) slijedi da je funkcija $y \longmapsto \kappa_E(x,y)$ integrabilna za s.s. $x \in I^m$. Kako je $\kappa_{E_x}(y) = \kappa_E(x,y)$, slijedi da je κ_{E_x} integrabilna, odnosno da je E_x mjerljiv za s.s. $x \in I^n$ i dokaz prvog tvrđenja je završen. Za završetak dokaza primijetimo da je $\kappa_E(x,y) = \kappa_A(x) \cdot \kappa_{E_x}(y)$. Primjenom 6.2 dobijamo da je:

$$\int_E f = \int_{I^{m+n}} \kappa_E = \int_{I^m} dx \int_{I^n} f(x,y)\kappa_A(x)\kappa_{E_x}(y)\,dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{I^m} \kappa_A(x)\,dx \int_{I^n} f(x,y)\kappa_{E_x}(y)\,dy \\
&= \int_A dx \int_{E_x} f(x,y)\,dy.
\end{aligned}$$

6.5. Posljedica. *Ako je D skup u $\mathbf{R}^n$ mjerljiv po Jordanu, $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^{n+1} : x \in D, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$ i $f \in \mathcal{R}(E)$, onda je*

$$\int_E f = \int_D dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Dokaz: Ovo je specijalan slučaj posljedice 6.4. Sada je $E_x = [g_1(x), g_2(x)]$.

6.6. Posljedica. *Ako je $f : D \to \mathbf{R}$ integrabilna na D, $f \ge 0$, $E = \{(x,y) : x \in D, 0 \le y \le f(x)\}$, onda je*

$$\mu(E) = \int_D f.$$

Dokaz. Iz $\mu(E) = \int_E \kappa_E$ i posljedice 6.5 slijedi da je

$$\mu(E) = \int_D dx \int_0^{f(x)} dy = \int_D f(x)\,dx.$$

6.7. Primjer. Odredimo vrijednost integrala $\int_E z\,dxdydz$, gdje je E onaj dio presjeka cilindričnih tijela $x^2 + z^2 \le a^2$, $y^2 + z^2 \le a^2$ koji leži iznad xy-ravni. Lako je vidjeti da krive po kojima se sijeku cilindri $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ leže u ravnima $|y| = |x|$. Neka je $D_1 = \{(x,y) : -x \le y \le x, 0 \le x \le a\}$, $E_1 = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 < z < \sqrt{a^2 - y^2}\}$. (Nacrtajte sliku). Primjenjujući dvaput 6.5 dobijamo:

$$\begin{aligned}
\int_{E_1} z\,dxdydz &= \int_{D_1} dxdy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} z\,dz = \frac{1}{2}\int_{D_1} (a^2 - y^2)\,dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^a dx \int_{-x}^{x} (a^2 - y^2)\,dy = \frac{5a^4}{12}.
\end{aligned}$$

Lako je vidjeti da je

$$\int_E z\,dxdydz = 4\int_{E_1} z\,dxdydz = \frac{5a^4}{3}.$$

6.8. Primjer. Odredimo zapreminu $\Omega_n(R)$ n-dimenzionalne lopte $B^n(0,R)$. Na osnovu 3.16 je

$$\Omega_n(R) = R^n \Omega_n(1), \tag{8}$$

pa je dovoljno odrediti $\Omega_n(1)$. Presjek lopte $B^n(0,1)$ sa hiperravnima $x^n = c$, $-1 \leq c \leq 1$, je lopta $B^{n-1}(0, \sqrt{1-(x^n)^2})$. Iz 6.4 slijedi da je

$$\Omega_n(1) = \int_{-1}^{1} \Omega_{n-1}\Big(\sqrt{1-(x^n)^2}\Big)\, dx^n = \Omega_{n-1}(1) I_n, \tag{9}$$

gdje je

$$I_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n t\, dt, \tag{10}$$

(pri čemu je u (10) iskorišćena smjena promjenljivih $t = \sin t'$ i tvrđenje IV.10.11.2, odnosno teorema 7.1 u sljedećem paragrafu). Za integral (10) imamo da je

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \varphi\, d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2}(1-\sin^2\varphi)\, d\varphi \\ &= I_{n-2} + \frac{1}{n-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\varphi\, d\cos^{n-1}\varphi = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n, \end{aligned}$$

tj,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{11}$$

Kako je $I_1 = 2$, $I_2 = \pi/2$, iz (11) slijedi da je

$$I_{2k+1} = 2\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \quad I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\pi. \tag{12}$$

Iz (12) i (9) dobijamo da je

$$\Omega_{2k+1}(1) = \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!}\Omega_1(1), \tag{13}$$

$$\Omega_{2k}(1) = \frac{2\cdot(2\pi)^{k-1}}{(2k)!!}\Omega_2(1). \tag{14}$$

Očigledno, $\Omega_1(1) = \int_{-1}^{1} dx = 2$. Iz (9) slijedi da je $\Omega_2(1) = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$, odakle smjenom promjenljivih $x = \sin t$ (vidi IV.10.11.2 ili 7.1) nalazimo da je $\Omega_2(1) = \pi$. (Vidi, takođe, 7.9). Iz (13), (14) i (8) dobijamo da je

$$\Omega_{2k+1}(R) = 2\frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!}R^{2k+1},$$

$$\Omega_{2k}(R) = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!} R^{2k}.$$

6.9. Zadaci za vježbu

1. Odrediti $I = \int_D |xy|$, gdje je D krug radijusa a s centrom u koordinatnom početku. Uputstvo:

$$I = \int_{-a}^{a} a\,dx = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy = \frac{a^2}{4}.$$

2. Primijeniti teoremu 6.2 na funkciju iz zadatka 4.22.10.(b). Uputstvo: Funkcija f_x nije integrabilna za x racionalno, pa se mora odrediti gornji i donji integral $\underline{\int} f_x(y)\,dy$ ili $\overline{\int} f_x(y)\,dy$.
3. (**Cavalieriev princip**). Neka su A i B podskupovi od $\mathbf{R}^{n+1}$ mjerljivi po Jordanu: Neka je $A_y = \{x \in \mathbf{R}^n : (x,y) \in A\}$, $B_y = \{x \in \mathbf{R}^n : (x,y) \in B\}$. Ako su A_y i B_y mjerljivi po Jordanu i imaju istu mjeru za s.s. y u skupu onih y za koje je A_y ili B_y neprazan, dokazati da A i B imaju istu Jordanovu mjeru.

7. Zamjena promjenljivih

Dokažimo još jednom sljedeći slučaj tvrđenja IV.10.11.2.

7.1. Teorema. *Neka je g neprekidno diferencijabilno preslikavanje zatvorenog intervala I čiji su krajevi α i β, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$. Neka je f neprekidna na $g(I)$. Tada je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt. \tag{1}$$

(Pritom se podrazumijeva dogovor uveden u Glavi IV: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$).

Dokaz. Neka je $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Pomoću osnovne teoreme infinitezimalnog računa i Newton-Leibnizove formule, dobijamo:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt &= \int_\alpha^\beta F'(g(t))g'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta (F\circ g)'(t)\,dt\\ &= (F\circ g)(\beta) - (F\circ g)(\alpha) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))\\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

7.2. Napomena. (a) Ako preslikavanje g nije 1–1, onda se interval sa krajevima $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ može razlikovati od skupa $g([\alpha, \beta])$. Zato se u relaciji (1) $\int_a^b$, $\int_\alpha^\beta$ ne može zamijeniti sa $\int_{[\alpha,\beta]}$, $\int_{g([\alpha,\beta])}$. Razloge za to ilustruje sljedeći primjer: ako je $g(x) = x^2$, $f = 1$, onda je $g(-1) = g(1) = 1$ a $g([-1, 1]) = [0, 1]$, pri čemu $g(x)$ prođe dvaput kroz svaku tačku intervala $[0, 1]$: jednom sa $g'(x) < 0$, drugi put sa $g'(-x) = -g'(x) > 0$. Zato je integral na desnoj strani u (1) jednak 0, (lijevi takođe, jer je $a = b = 1$). Međutim,

$$\int_{g([-1,1])} f(x)\,dx = \int_{[0,1]} 1 = 1 \neq \int_{[-1,1]} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{[-1,1]} 2x\,dx = 0.$$

Ako je g 1–1, onda se $\int_{g([\alpha,\beta])}$ i $\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)}$ još uvijek mogu razlikovati znakom. To znači da se relacija (1) može napisati u obliku

$$\int_{g([\alpha,\beta])} f = \int_{[\alpha,\beta]} (f \circ g)|g| \tag{2}$$

ako je g 1–1.

(b) Relacija (1) se ne može direktno prenijeti u $\mathbf{R}^n$ za $n > 1$. Opisno govoreći slučajevi $n = 1$ i $n > 1$ se razlikuju u sljedećem. Ako je $t_1 < t_2$ i $g(t_1) = g(t_2)$, onda za svaku $t' \in [t_1, t_2]$ postoji $t'' \in [t_1, t_2]$ takav da $g'(t')$ i $g'(t'')$ imaju različit znak. Rezultat integracije po $g([t_1, t_2])$ (na desnoj strani u (1)) se u krajnjem ishodu poništi i mi dobijamo istu vrijednost kao da je g bilo 1–1. Za slučaj $n > 1$ moguće je da $\det g'$ ima isti znak u svim tačkama koje imaju istu sliku i zato se na desnoj strani relacije (1) pojavi višestruka vrijednost integrala na lijevoj strani.

Preciznije o tome biće riječi u Glavi VIII, a sada uopštimo relaciju (2) iz 7.2 za $n > 1$.

7.3. Heurističko izvođenje formule o zamjeni promjenljive za $n > 1$. Neka je $g : U \to V$ difeomorfizam i D mjerljiv skup takav da je $\overline{D} \subset U \subset \mathbf{R}^n$, $f : D \to \mathbf{R}$ neprekidna. Neka je $P = \{D_1, \ldots, D_k\}$ razbijanje skupa D na mjerljive povezane djelove. Tada su $g(D_i)$ mjerljivi (3.11(e)) i zato

$$\int_{g(D)} f = \sum_{D_i \in P} \int_{g(D_i)} f.$$

Na osnovu 5.1(iv) postoji $p_i \in D_i$, tako da je

$$\int_{g(D_i)} f = f(g(p_i))v(g(D_i)). \tag{4}$$

Pošto je $g \in C^1$, $g'(x)$ će se na D_i malo razlikovati od $g'(p_i)$ za podjelu P dovoljno malog dijametra. S druge strane, priraštaj diferencijabilnog preslikavanja se dobro aproksimira njegovim izvodom. Na osnovu 3.12 treba očekivati da je

$$v(g(D_i)) \approx |\det g'(p_i)|\mu(D_i). \tag{5}$$

Iz (3), (4) i (5) slijedi da je

$$\int_D f \approx \sum_{D_i \in P} f(g(p_i))|\det g'(p_i)| \cdot \mu(D_i). \tag{6}$$

Pri usitnjavanju podjele P desna strana u (4) konvergira ka $\int_D (f \circ g)|\det g'|$, (jer je $f \circ g$ neprekidna na D). Naslučujemo dakle, da važi:

$$\int_{g(D)} f = \int_D (f \circ g)|\det g'|. \tag{7}$$

Kao početni korak u pripremama za dokaz relacije (7), dokažimo najprije da je $f \circ g$ neprekidna s.s. ako je f neprekidna s.s.

7.4. Lema. *Neka je U otvoren skup u $\mathbf{R}^n$, $g : U \to V$ C^1-preslikavanje i skup $A \subset U$ ima Lebesguevu mjeru 0. Tada skup $g(A)$ ima Lebesguevu mjeru 0.*

Dokaz. Skup A možemo pokriti sa prebrojivo mnogo zatvorenih kubova koji leže u U. Pošto je unija prebrojiva familije skupova Lebesgueove mjere nula skup Lebesguove mjere nula, dovoljno je dokazati da za svaki zatvoreni kub $C \subset U$ skup $g(C \cap A)$ ima Lebesguovu mjeru nula. Neprekidno diferencijabilno preslikavanje g na konveksnom kompaktnom skupu zadovoljava Lipschitzov uslov, (IV.8.14). Ostaje još da se dokaže da preslikavanje koje zadovoljava Lipschitzov uslov skupove Lebesguove mjere nula prevodi u skupove Lebesguove mjere nula. To se dokazuje na isti način kao i tvrđenje (a) primjera 3.11, gdje su i oznake za indekse u sumama namjerno pisane tako da odgovaraju i sadašnjoj situaciji kad su prekrivanja prebrojiva.

7.5. Lema. *Ako je $g : U \to V$ difeomorfizam otvorenog skupa $U \subset \mathbf{R}$ na otvoreni skup $V \subset \mathbf{R}$ i A skup mjerljiv po Jordanu takav da je $\overline{A} \subset U$, onda je*

$$\mu(g(A)) = \int_A |\det g'|. \tag{8}$$

(*Skup $g(A)$ je mjerljiv na osnovu* 3.11(e)).

Komentar: Lema 7.5 je posljedica njenog specijalnog slučaja (njene lokalne varijante) 3.12.

Dokaz. Pošto skup mjerljiv po Jordanu koji nema unutrašnjih tačaka ima Jordanovu mjeru nula, (tada je $A = \partial A$), netrivijalno u tvrđenju leme je slučaj, kad unutrašnjost od A nije prazna.

a) Relaciju (8) dokažimo prvo za slučaj kada je $A = I^n$ interval. Neka je najprije I^n kub. Neka je P proizvoljno razbijanje kuba I^n na potkubove S_i od I^n.

Pošto difeomorfizam g disjunktne mjerljive skupove prevodi u disjunktne mjerljive skupove, biće

$$\mu(g(I^n)) = \sum_{S_i \in P} \mu(g(S_i)). \tag{9}$$

Označimo sa $\| \ \|$ max-normu na $\mathbf{R}^n$. (Kub $[-r, r]^n$ je lopta poluprečnika r u odnosu na tu normu). Sa a_i označimo centar kuba S_i. Neka je $A_i = g'(a_i)$. Dalje razmatranje je razrada sljedeće ideje: Kad je $d(P)$ dovoljno malo, onda za svaki S_i postoje kubovi C_1, C_2 takvi da je $C_1 \subset S_i \subset C_2$, $C_1 \subset A_i^{-1}(g(S_i)) \subset C_2$ pri čemu se $\mu(C_1)$ i $\mu(C_2)$ malo razlikuju od $\mu(S)$. Tada će biti $A_i(C_1) \subset g(S_i) \subset A_i(C_2)$, odnosno $|\det A_i|\mu(C_1) = |\det A_i|\mu(S_i) - \varepsilon_i \leq \mu(g(S_i)) \leq |\det A_i|\mu(C_2) = |\det A_i|\mu(S_i) + \varepsilon_i$, što daje mogućnost da se pređe na integralnu sumu. Evo preciziranja.

Neka su a i x proizvoljne tačke iz $\overline{I}^n$ i

$$\lambda(x, a) = g'(x) - g'(a).$$

Označimo $f'(a)$ sa A_a. Onda je

$$\|A_a^{-1} g'(x) - i_d\| = \|A_a^{-1} \lambda(x, a)\| \leq \|A_a^{-1}\| \, \|\lambda(x, a)\| \leq M \lambda(x, a),$$

gdje je $M = \sup_{x \in \bar{I}^n} \|(g'(x))^{-1}\|$. Neprekidno preslikavanje $x \longmapsto g'(x)$ je ravnomjerno neprekidno na kompaktu $\overline{I}^n$, pa za svaki $0 < \varepsilon < 1$ postoji $\delta > 0$ takav da je $\|\lambda(x, a)\| \leq \delta / M$ za $\|x - a\| < \delta$, tj.

$$\|A_a^{-1} g'(x) - i_d\| < \varepsilon \quad \text{za } \|x - a\| < \delta.$$

Pretpostavimo da je razbijanje P u početku bilo takvo da je $d(P) < \delta$. Iz (10) onda slijedi da je

$$\|A_i^{-1} \circ g'(x) - i_d\| < \varepsilon \quad \text{za } x \in S_i, \ A_i = Aa_i. \tag{11}$$

Ako sa r_i označimo poluprečnik kuba S_i, onda iz (10) i IV.8.13 slijedi da slika toga kuba pomoću preslikavanja $A_i^{-1} \circ g$ leži između dva kuba C_1 i C_2 čiji su poluprečnici redom $(1 - \varepsilon) r_i$ i $(1 + \varepsilon) r_i$. Tada je $A_i(C_1) \subset g(S_i) \subset A_i(C_2)$ i zato

$$(1 - \varepsilon)^n |\det A_i| \mu(S_i) \leq \mu(g(S_i)) \leq (1 + \varepsilon)^n |\det A_i| \mu(S_i).$$

odnosno

$$(1 - \varepsilon)^n S(f, P, T) \leq \mu(g(I^n)) \leq (1 + \varepsilon)^n S(f, P, T), \tag{12}$$

gdje je $S(f, P, T)$ Riemannova integralna suma koja odgovara označenju $T = (a_i)$ podjele P centrima a_i kubova-lopti S_i. Budući da je u relaciji (12) P proizvoljna podjela intervala I^n na podintervale takva da je $d(P) < \delta$, iz 5.5 slijedi da je za svaki $\varepsilon \in (0,1)$:

$$(1-\varepsilon)^n \int_{I^n} |\det g'| \leq \mu(g(I^n)) \leq (1+\varepsilon)^n \int_{I^n} |\det g'|.$$

($\det g'$ je neprekidna na $\overline{D}$). Puštajući da $\varepsilon \to 0$ dobijamo (8) (u slučaju kada je I^n kub).

Oslobodimo se sada pretpostavke da je interval I^n kub. Za svaki interval I^n takav da $I^n \subset U$, postoje elementarni skupovi E_1 i E_2, koji su sastavljeni iz disjunktnih kubova, takvi da je $E_1 \subset I^n \subset E_2$, $\overline{E}_2 \subset U$ i $\mu(E_2 - E_1) < \varepsilon/(2M)$, $M = \sup_{x \in I^n} |\det g'(x)|$. Koristeći već dokazano i pretpostavku da su E_1 i E_2 unije disjunktnih kubova, dobijamo da je

$$\begin{aligned}\left|\mu(g(I^n)) - \int_{I^n} |\det g'|\right| &\leq |\mu(g(I^n)) - \mu(g(E_1))| + \left|\mu(g(E_1)) - \int_{I^n} |\det g'|\right| \\ &\leq |\mu(g(E_2)) - \mu(g(E_1))| + \int_{I^n - E_1} |\det g'| \\ &\leq \int_{E_2 - E_1} |\det g'| + \int_{E_2 - E_1} |\det g'| \leq 2M\mu(E_2 - E_1) < \varepsilon,\end{aligned}$$

za svaki $\varepsilon > 0$.

b) Neka je sada A takav da je $\operatorname{Int} A \neq \varnothing$. Iz koraka a) slijedi da relacija (8) važi za svaki elementaran skup E takav da je $\overline{E} \subset A$. Neka je $M = \sup_{x \in \bar{A}} \|g'(x)\|$. Neka je $\varepsilon > 0$. Postoji elementaran skup E takav da je $\overline{E} \subset A$ i

$$\mu(A - E) < \varepsilon/(2M). \tag{14}$$

Iz koraka (a) lako slijedi da je za svaki $B \in \mathcal{J}$ takav da je $B \subset U$, $\mu(g(B)) \leq M\mu(B)$. Odatle i iz (14) dobijamo da je

$$\mu(g(A)) - \mu(g(E)) = \mu(g(A - E)) < M\mu(A - E) < \varepsilon/2. \tag{15}$$

Još jednom koristeći (14) imamo da je

$$\int_A |\det g'| - \int_E |\det g'| = \int_{A-E} |\det g'| \leq M\mu(A - E) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16}$$

Iz (15) i (16) konačno dobijamo:

$$\begin{aligned}\left|\mu(g(A)) - \int_A |\det g'|\right| &\leq |\mu(g(A)) - \mu(g(E))| + \left|\mu(g(E)) - \int_E |\det g'|\right| \\ &+ \left|\int_E |\det g'| - \int_A |\det g'|\right| < \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Pošto je ε proizvoljno, slijedi (8) i dokaz leme je završen.

7.6. Primjer. Odredimo površinu figure koja je ograničena linijama,

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1, \quad \sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2$$
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}, \quad 4\frac{x}{a}=\frac{y}{b}, \quad (a>0,\, b>0).$$

(Precizirajte šta to znači). Uvedimo smjenu promjenljivih $(u,v)\longmapsto(x,y)$,

$$\frac{y}{b}=u\frac{x}{a}, \quad 1\le u\le 4; \qquad \sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=v, \quad 1\le v\le 2.$$

Tada je

$$J=\frac{2abu^3}{(1+\sqrt{v})^4}$$
$$\mu(A)=\int_1^2 dv\int_1^4 |J|\,du=2ab\int_1^2\frac{dv}{(1+\sqrt{v})^4}\int_1^4 u^3\,du=\frac{65}{108}ab.$$

7.7. Teorema. *Neka je $g:U\to V$ difeomorfizam otvorenog skupa $U\subset\mathbf{R}^n$ na otvoreni skup $V\subset\mathbf{R}^n$, A skup mjerljiv po Jordanu takav da je $\overline{A}\subset U$ i $f: V\to\mathbf{R}$ realna funkcija. Tada je f integrabilna na $g(A)$ ako i samo ako je funcija $(f\circ g)|\det g'|$ integrabilna na A i (u slučaju integrabilnosti) važi*

$$\int_{g(A)} f=\int_A (f\circ g)|\det g'|. \tag{17}$$

Dokaz. Iz 7.4 slijedi da je f neprekidno s.s. ako i samo ako je preslikavanje $f\circ g$ neprekidno s.s. Pošto je g difeomorfizam imamo da je f ograničeno na kompaktima ako i samo ako je $f\circ g$ ograničeno na kompaktima. Ako je A mjerljiv po Jordanu i $\overline{A}\subset U$, slijedi da je $f\circ g$ integrabilna na A ako i samo ako je f integrabilna na $g(A)$. Dokaz relacije (17) ima tri koraka: 1° Relacija (17) je tačna za karakteristične funkcije skupova D, $\overline{D}\subset V$, mjerljivih po Jordanu:

$$\int_{g(A)}\kappa_D=\mu(g(A)\cap D)=\int_{A\cap g^{-1}(D)}|\det g'|$$
$$=\int_A \kappa_{g^{-1}(D)}|\det g'|=\int_A(\kappa_D\circ g)|\det g'|$$

(U drugom prelazu korišćeno je 7.5, a u trećem 4.12 i 4.22.3). 2° Teorema važi za svaku prostoru funkciju čiji nosač leži u V. (To slijedi iz koraka 1 i linearnosti integrala). 3° Ako su s_1 i s_2 dvije proizvoljne proste funkcije takve da je $s_1 \leq f \leq s_2$ čiji nosači leže u V, onda je

$$\int_A s_1 \circ g|\det g'| \leq \int_A f \circ g|\det g'| \leq \int_A s_2 \circ g|\det g'|$$

odnosno na osnovu 2°,

$$\int_{g(A)} s_1 \leq \int_A f \circ g|\det g'| \leq \int_A s_2.$$

Odatle slijedi da je $\underline{\int}_{g(A)} f \leq \int_A f \circ g|\det g'| \leq \overline{\int}_{g(A)} f$, što je ekvivalentno sa (17).

Lema 7.5 i teorema 7.7 važe i u sljedećoj formulaciji koja je ponekad pogodna za polarne, cilindrične i sferne koordinate.

7.8. Teorema. *Neka je U otvoren skup u $\mathbf{R}^n$, $g : U \to \mathbf{R}^n$, C^1-preslikavanje i A skup mjerljiv po Jordanu. Neka je dalje: $\overline{A} \subset U$, na unutrašnosti od A g je 1–1 i $\det g' \neq 0$, f je integrabilna na $g(A)$. Tada je $(f \circ g)|\det g'|$ integrabilna na A i*

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g)|\det g'|.$$

Dokaz. Dokaz leme 7.5, (slučaj $f = 1$ u teoremi 7.7), sada se razlikuje samo u tome što se korak a) odnosi na intervale I^n takve da je $\overline{I}^n \subset \operatorname{Int} A$. Korak b) dokaza leme 7.5 i dokaz teoreme 7.7 ostaju nepromijenjeni (u ako dijelu).

7.9. Primjer. (Polarne koordinate). Za polarne koordinate $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $g(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ je

$$g'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

i

$$\det g'(r,\varphi) = r.$$

Preslikavanje g je sirjektivno i periodično, sa osnovnom periodom $(0, 2\pi)$. Ne postoji ni jedan otvoren skup U u ravni (r,φ) na kojem bi g bilo injektivno, a čija bi slika bila čitava (x,y)-ravan. Ipak, za svaki mjerljiv skup B u ravni (x,y) postoji skup A u ravni (r,φ), takav da je $B = g(A)$ i zadovoljeni su uslovi teoreme 7.8. To je posljedica činjenice da u (r,φ) ravni postoje otvoreni skupovi na kojima je g injektivno, čija slika pokriva čitavu (x,y) ravan bez skupa koji ne utiče na rezultate integraljenja. (Takav skup je svaka traka $0 < r < \infty$ širine 2π). Na primjer, za traku

$$D = \{(r,\varphi) : 0 < r < \infty, 0 < \varphi < 2\pi\},$$

$g(D)$ je skup koji se dobija kada se iz $\mathbf{R}^2$ „izreže“ x-osa: S obzirom da je D mjerljiv po Jordanu i $g(\overline{D}) = \mathbf{R}^2$, svaki mjerljiv skup u ravni (x, y) je slika nekog mjerljivog skupa A koji leži u $\overline{D}$, u odnosu na koji g zadovoljava uslove teoreme 7.8, i zato važi:

$$\int_{g(A)} f = \int_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr d\varphi.$$

Koordinate r i φ za tačku $g(r, \varphi)$ u ravni (x, y) imaju smisao ukazan na slici 29. To omogućuje da se lakše nalaze slike i inverzne slike pomoću preslikavanja g.

Slika 29.

Na primjer, površina kruga $B^2(R)$ je

$$\mu(B^2(R)) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\, dr = \pi R^2.$$

Iz 3.12 onda slijedi da je površina elipse koja ima poluose a i b, $ab\pi$.

7.10. Primjer. (Cilindrične koordinate). Za cilindrične koordinate $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $g(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$ je

$$g'(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i

$$\det g'(r, \varphi, z) = r \neq 0 \quad \text{za } r > 0.$$

Analogija sa polarnim koordinatama u ravni je potpuna. Neka je

$$D = \{(r, \varphi, z) : 0 < r < \infty,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty\}.$$

Tada je $g(D)$ skup koji se dobija kad se iz $\mathbf{R}^3$ izreže poluravan $x \geq 0$ xz-ravni. D je mjerljiv po Jordanu, $g(\overline{D}) = \mathbf{R}^3$ i svaki mjerljivi skup u (x, y, z) prostoru je slika nekog mjerljivog skupa $A \subset \overline{D}$ koji zadovoljava uslove 7.8. Pritom važi

$$\int_{g(A)} f = \int_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r\, dr d\varphi dz.$$

(Geometrijski smisao koordinata (r, φ, z) za tačku $g(r, \varphi, z)$ u (x, y, z) prostoru je analogan onom za polarne koordinate).

7.11. Primjer. (Sferne koordinate). Za sferne koordinate $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $g(\rho, \varphi, \theta) = (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)$

$$g'(\rho, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\det g'(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2 \sin\theta.$$

Pritom je $\det g'(\rho, \varphi, \theta) \neq 0$ za $\rho \neq 0$ i $\theta \neq k\pi$. Neka je

$$D = \{(\rho, \varphi, \theta) : 0 < \rho < \infty,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \theta < \pi\}.$$

Tada je $g(D)$ skup koji se dobija kada se iz $\mathbf{R}^3$ izreže poluravan $x > 0$ xy-ravni. D je Jordanov, $g(\overline{D}) = \mathbf{R}^3$ i svaki mjerljivi skup u (x, y, z) prostoru $\mathbf{R}^3$ je slika nekog mjerljivog skupa $A \subset \overline{D}$, pri čemu A zadovoljava uslove teoreme 7.8. Pritom je

$$\int_{g(A)} f = \int_A f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta.$$

Geometrijski smisao sfernih koordinata (ρ, φ, θ) za tačku $g(\rho, \varphi, \theta)$ i značenje jakobijana, ilustrovani su na slici 30.

7.12. Primjer. Sračunajmo još jednom zapreminu (Jordanovu mjeru) n-dimenzionalne lopte $B^n(R)$ poluprečnika R. Uvedimo (n-dimenzionalne) sferne koordinate u $\mathbf{R}^n$. (Polarne koordinate često se nazivaju sfernim koodinatama u $\mathbf{R}^2$).

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho\cos\theta_1 \\ x_2 &= \rho\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_3 &= \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots\cdot\sin\theta_{n-2}\cos\varphi \end{aligned}$$

Slika 30.

$$x_n = \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{n-2} \sin\varphi.$$

Tada je

$$\det g'(u) = \rho^{n-1} \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{n-2},$$
$$\mu(B^n(R)) = \int_0^R \rho^{n-1}\, d\rho \int_0^\pi \sin^{n-2}\theta_1\, d\theta_1 \int_0^\pi \sin^{n-3}\theta_2\, d\theta_2 \times$$
$$\times \ldots \cdot \int_0^\pi \sin\theta_{n-2}\, d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

odnosno

$$\mu(B^n(R)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^n,$$

gdje Γ Eulerova gama funkcija koja će biti definisana u paragrafu 10.

Iz 3.12. slijedi da je zapremina n-dimenzionalnog elipsoida $E_n(a_1, , a_n)$ čije su poluose $a_1, \ldots, a_n$:

$$\mu(E^n(a_1, \ldots, a_n)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} a_1 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

7.13. Zadaci za vježbu

1. (a) Dokazati da lema 7.5 i teorema 7.7 sa oslabljenim uslovima 7.8 važe za unutrašnju Jordanovu mjeru skupa $g(A)$ i donji integral proizvoljne funkcije ograničene na $g(A)$. Uputstvo: Dokaz leme 7.5 i teoreme 7.7 su, u stvari, sprovedeni za unutrašnju Jordanovu mjeru i donji integral.

   (b) Pretpostavite da je u tim tvrđenjima g 1–1 i $\det g' \neq 0$ na čitavom U, pa dokažite da lema 7.5 važi za spoljašnju mjeru a teorema 7.7 i za gornji integral.

   (c) Na kraju pretpostavite da je f integrabilna i dobićete ponovo teoremu 7.7.

2. U oznakama teoreme 7.7, neka je $\mathcal{D}$ familija svih skupova D mjerljivih po Jordanu, takvih da je $D \subset g(A)$ i $\mathcal{F}$ familija svih funkcija integrabilnih na $g(A)$. Za $D \in \mathcal{D}$ i $f \in \mathcal{F}$ neka je

$$\widetilde{\int_D}^{f} = \int_A (f \circ g)|\det g'|.$$

   Dokažite da je $\widetilde{\int} = \int$, koristeći teoremu jedinstvenosti 4.22.5.

3. Odrediti vrijednost integrala $\int_D (x^2 + y^2)\, dxdydz$ gdje je D oblast ograničena (ekvipotencijalnim) površima $x^2 + y^2 - 2z = 0$, $z = 2$.

4. Nacrtati oblast integracije i odrediti

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x+2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\, dz.$$

   Uputstvo: Četvrtina tijela koje iz lopte $2 - x^2 - y^2 = z^2$ isijeca konus $x^2 + y^2 \leq z^2$ određena sa $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ je oblast integracije. $I = \int_D \rho^2 \sin\theta \rho^2 \cos^2\theta\, d\rho d\theta d\varphi = (\pi/15)(2\sqrt{2} - 1)$.

5. Odrediti površinu skupa u ravni čije koordinate zadovoljavaju uslove: $(x^2 + y^2)^2 \leq 2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 \geq a^2$. Uputstvo: Smjena $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Za tačke granice je $\rho = a\sqrt{2\cos\theta}$, $\rho \geq a$, pa je

$$\mu(A) = 2\int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\theta \int_a^{a\sqrt{2\cos\theta}} \rho\, d\rho = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2.$$

6. Odrediti zapreminu tijela koje isijeca cilindar $x^2+y^2 \leq Rx$ iz lopte $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$. Uputstvo: $V = 4\int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy$. Smjena: $x = R/2 + \rho\cos\theta$, $y = R/2+\rho\sin\theta$, $|J| = \rho$, $\mu(D) = 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2 - \rho^2}\rho d\rho = (2R^3/9)(3\pi - 4)$.

7. Odrediti površinu figure koja je ograničena linijama $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = x$, $y = 2x$ $(x, y > 0)$. Uputstvo: Smjena: $xy = u$, $y = vx$, $a^2 \leq u \leq 2a^2$, $1 \leq v \leq 2$, $\mu(D) = (a^2 \ln 2)/2$.

8. Odrediti $I = \int_B |f|$, ako je $f(x, y) = (x + y)/\sqrt{2} - x^2 - y^2$, $B = B(0, 1)$ jedinični krug. Uputstvo: $I = \int_{B-D} + \int_D$, gdje je $D = \{(x, y) : (x - 1/(2\sqrt{2}))^2 + (y - 1/(2\sqrt{2}))^2 \leq 1/2\}$.

9. Odrediti zapeminu n-dimenzionalnog konusa

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad 0\le x_n\le a_n.$$

Uputstvo:

$$\mu(Z)=\int_0^{a_n} dx_n \int\limits_{\frac{x_1^2}{a_1^2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}\le\frac{x_n^2}{a_n^2}} 1$$

$$=\int_0^{a_n}\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\frac{a_1}{a_n}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot x_n^{n-1}\,dx_n=\frac{\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}a_1\cdot\ldots\cdot a_n.$$

8. Riemannov integral vektorske funkcije

Ako je $D\subset\mathbf{R}^n$ skup mjerljiv po Jordanu i $f=(f^1,\ldots,f^m):D\to\mathbf{R}^m$ neko preslikavanje sa vrijednostima u $\mathbf{R}^m$, onda se definicija 4.6 gornjeg i donjeg integrala za realnu funkciju ne prenosi direktno na slučaj vektorske funkcije. Međutim, za svaku označenu podjelu (P,T), Riemannova integralna suma

(1) $$S(f,P,T)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\mu(D_i)$$

za vektorsku funkciju, ima koordinatnu reprezentaciju

(2) $$S(f,P,T)=\big(S(f^1,P,T),\ldots,S(f^m,P,T)\big).$$

Otuda slijedi da $\lim_{d(B)\to 0} S(f,P,T)$ postoji ako i samo ako postoji $\lim S(f^i,P,T)$ za sve koordinatne funkcije f^i, $i=1,2,\ldots,m$.

8.1. Definicija. Ako je $D\subset\mathbf{R}^n$ skup mjerljiv po Jordanu i $f=(f^1,\ldots,f^m):R\to\mathbf{R}^m$ preslikavanje neprekidno s.s. na D, onda se (*Riemannovim*) *integralom* od f po D naziva vektor

$$\int_D f=\left(\int_D f^1,\ldots,\int_D f^m\right),$$

gdje na desnoj strani stoje Riemannovi integrali koordinatnih funkcija f^i na skupu D.

Za $n = 2$, relacija (3) se, u odnosu na kompleksnu strukturu $\mathbf{C}$ na $\mathbf{R}^2$, može zapisati u obliku:

$$\int_D f = \int_D f^1 + i \int_D f^2.$$

Sva svojstva integrala realne funkcije koja se tiču linearnosti integrala $(D, f) \longmapsto \int_D f$ po promjenljivoj f i aditivnosti integrala po promjenjivoj D, kao i osnovna teorema infinitezimalnog računa, Newton-Leibnizova formula i Fubinijeva teorema važe i za vektorske funkcije. (Dokazi se dobijaju neposredno iz odgovarajućih tvrđenja za realne funkcije i definicije 8.1).

Dokažimo da važi i ocjena 5.1(v).

8.2. Teorema. *Ako je vektorska funkcija $f = (f^1, \dots, f^m)$ integrabilna na skupu $D \subset \mathbf{R}^n$, onda je i realna funkcija $\|f\|$ integrabilna na D i važi*

$$\left\| \int_D f \right\| \leq \int_D \|f\|. \tag{6}$$

Dokaz. Po pretpostavci f je neprekidna s.s. Zato je i $\|f\|$ neprekidna s.s., jer je norma neprekidno preslikavanje. Slijedi da je $\|f\| \in \mathcal{R}(D)$. Dokažimo nejednakost (6). Ako sa L označimo proizvoljnu linearnu funkcionelu iz $\mathbf{R}^m$ u $\mathbf{R}$ i uzmemo u obzir da je $L\int_D f = \int_D Lf$ (zadatak 8.3.1), onda se pomoću nejednakosti (6) za realnu funkciju (tvrđenje 5.1(v) i IV.7.12.2) dobija da je:

$$\begin{aligned} \left\| \int_D f \right\| &= \sup_{\|L\|=1} \left| L \int_D f \right| = \sup_{\|L\|=1} \left| \int_D Lf \right| \\ &\leq \sup_{\|L\|=1} \int_D |Lf| \leq \int_D \sup_{\|L\|=1} |Lf| = \int_D \|f\| \end{aligned}$$

i dokaz teoreme je završen.

8.3. Zadaci za vježbu

1. Ako je $f : D \to \mathbf{R}^m$ integrabilna na skupu mjerljivom po Jordanu i $L : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ je linearna funkcionela, dokazati da je onda $L\int_D f = \int_D Lf$. Uputstvo: Iz (3) slijedi da je za $a \in \mathbf{R}^m$,

$$\langle a, \int_D f \rangle = \big(a^1 \int_D f^1, \dots, a^m \int_D f^1\big) = \big(\int_D a^1 f^1, \dots, \int_D a^m f^1\big) = \int_D \langle a, f \rangle.$$

Dalje, koristiti lemu IV.7.1 o reprezentaciji linearne funkcionele na euklidskom prostoru $\mathbf{R}^n$.

9. Riemann-Stieltjesov integral

9.1. Za funkciju skupa μ_g razmotrenu u primjeru 2.3 može se ponoviti procedura sprovedena u 2.4 i paragrafu 3 za dužinu intervala na $\mathbf{R}$. Integral proste funkcije $s = \sum c_i \kappa_{E_i}$ bi sada izgledao ovako:

$$s = \sum_i c_i \mu_g(I_i), \tag{1}$$

gdje je $\mu_g(I_i)$ mjera intervala čiji su krajevi a_i, b_i, koja ima jednu od četiri vrijednosti navedene u 2.3, zavisno od toga kakav je interval I_i. Pošto je funkcija μ_g aditivna, lako se provjerava da integral proste funkcije ima sva karakteristična svojstva integrala 4.3(a)–(d). Gornji i donji integral za realnu ograničenu funkciju $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ definišu se kao i u 4.6, s tim što se sada nazivaju gornjim i donjim Riemann-Stieltjesovim integralima. Kad su jednaki, funkcija se naziva integrabilnom po Riemann-Stieltjesu, a zajednička vrijednost gornjeg i donjeg integrala naziva se *Riemann-Stieltjesovim integralom* funkcije f na intervalu $[a,b]$, (u odnosu na mjeru μ_g ili u odnosu na monotonu funkciju g). Ako je f integrabilna u odnosu na g piše se $f \in \mathcal{R}(g)$ ili $f \in \mathcal{R}(\mu_g)$.

Uobičajene su oznake

$$\overline{\int_a^b} f\,dg, \quad \underline{\int_a^b} f\,dg, \quad \int_a^b f\,dg,$$

redom za gornji, donji i integral funkcije f.

Ako je $g(x) = x$, sva konstrukcija se pretvara u onu iz paragrafa 4.

Riemannovim sumama sada odgovaraju *Riemann-Stieltjesove sume*:

$$\begin{aligned} \overline{I}(f,P,g) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta g_i, \\ \underline{I}(f,P,g) &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta g_i, \\ S(f,P,T,g) &= \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta g_i, \end{aligned}$$

gdje je

$$\Delta g_i = g(t_i) - g(t_{i-1}),$$

a (P,T) proizvoljna označena podjela intervala $[a,b]$. Na isti način kao i ranije dokazuje se da je

$$\overline{\int} f\,dg = \inf_P \overline{I}(f,P,g) \ = \lim_{n\to\infty} \overline{I}(f,P_n,g),$$

$$\underline{\int} f\,dg = \sup_P \underline{I}(f,P,g) = \lim_{n\to\infty} \underline{I}(f,P_n,g),$$

($d(P_n) \to 0$ kad $n \to \infty$), a ako je f integrabilna

$$\int_a^b f\,dg = \lim_{d(P)\to 0} S(f,P,T,g).$$

Za Riemann-Stieltjesov integral važi teorema 4.12, kad se u njoj funkcija $x \longmapsto g(x) = x$ zamijeni sa proizvoljnom monotono rastućom (ne obavezno neprekidnom) funkcijom $x \longmapsto g(x) = x$. Čitalac će se lako uvjeriti da je u dokazu te teoreme, zaista korišćena samo činjenica da je funkcija g monotono rastuća, odnosno funkcija skupa μ_g njom generisana, nenegativna i aditivna. Osnovna lema 4.14 formuliše se i dokazuje na isti način kao i za Riemannov integral, (uključujući i napomenu da se u njoj možemo ograničiti samo na gornje i donje integralne sume).

Definicija Riemann-Stieltjesovog integrala se prenosi na kompleksne i vektorske funkcije na isti način kao i kod Riemannovog integrala.

Postoji analogon funkcije skupa μ_g i u $\mathbf{R}^n$ i konstrukcija Riemann-Stieltjesovog integrala u $\mathbf{R}^n$. Mi, međutim, nijesmo zainteresovani za tu konstrukciju, jer ćemo u Glavi VI tokom proširivanja klase skupova i klase funkcija za koje je definisan Riemannov integral, doći do opštih shema konstrukcije mjere i integrala, koje se trivijalno primijenjuju i na Riemann-Stieltjesovu funkciju skupa u $\mathbf{R}^n$.

Zainteresovani čitalac može u zadacima naći još neka svojstva Riemann- Stieltjesovog integrala na pravoj.

9.2. Zadaci za vježbu

1. Ako je $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ monotono rastuća i diferencijabilna, $g' \in \mathcal{R}[a,b]$, dokazati da je onda $f \in \mathcal{R}(g)$ i

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Uputstvo: Neka je sa (P,T) označena podjela intervala $[a,b]$ i $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takve tačke da je $\Delta g_i = g'(s_i)(x_i - x_{i-1})$, (Lagrangeova teorema). Tada je $\sum f(t_i)\Delta g_i = \sum f(t_i)g'(s_i)\Delta x_i$ i ostaje da se primijeni 5.5.

2. Za preslikavanje $f : [a,b] \to X$ intervala $[a,b]$ u normiran vektorski prostor X kaže se da ima *ograničenu varijaciju* ako je tzv. *totalna varijacija* preslikavanja f

$$\mathbf{V}(f,a,b) = \sup_P \sum_{i=1}^n \|f(x_i) - f(x_{i-1})\| < \infty.$$

(Ovdje se supremum uzima po svim razbijanjima $P = (x_1, \ldots, x_n)$ intervala $[a,b]$). Ako se preslikavanje $f : [a,b] \to X$ naziva putem, onda se totalna varijacija naziva *dužinom puta* f i označava sa $l(f)$.

(a) Dokazati da monotona funkcija $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ima ograničenu varijaciju na $[a, b]$. Uputstvo: $\sum |f(t_i) - f(t_{i-1})| = f(b) - f(a)$.

(b) Dokazati da (dio po dio) neprekidno diferencijabilan put: $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ ima ograničenu varijaciju i da mu je dužina jednaka

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Uputstvo: $\sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \big|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)\, dt\big| \le \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$, tj. $\mathbf{V}(x) \le \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$. Obratna nejednakost dobija se ovako: Pošto je γ' ravnomjerno neprekidna na $[a, b]$ za svaki $\varepsilon > 0$, postoji podjela P intervala $[a, b]$, takva da je $|\gamma'(t) - \gamma'(t_i)| < \varepsilon/(b - a)$ za $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Slijedi da je

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt &= \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)|\, dt \\
&\le \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t) - \gamma'(t_i)|\, dt + \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t_i)|\, dt \\
&< \varepsilon + \sum_{i=1}^n |\gamma'(t_i)|(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n |\gamma'(t_i)(t_i - t_{i-1})| + \varepsilon \\
&= \sum \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t_i)\, dt \right| + \varepsilon \\
&\le \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big(\gamma'(t_i) - \gamma'(t)\big)\, dt \right| + \sum \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)\, dt \right| + \varepsilon \\
&\le \sum |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| + 2\varepsilon \le \mathbf{V}(f, a, b) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

3. Dokazati da preslikavanje $f = (f^1, \ldots, f^m) : [a, b] \to \mathbf{R}^m$ ima ograničenu varijaciju ako i samo ako sve koordinatne funkcije od f imaju ograničenu varijaciju.

4. Dokazati da (neprekidna) funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definisana sa

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

nema ograničenu varijaciju na $[0, 2/\pi]$. Uputstvo: $\sum_{n=1}^\infty |f(1/(\pi/2 + n\pi)) - f(1/(\pi/2 + (n-1)\pi))| = +\infty$.

5. Ako je realna funkcija f ograničene varijacije na $[a,b]$, dokazati da onda postoje monotono rastuće funkcije g i h na $[a,b]$ takve da je $g(a) = h(a) = 0$ i
$$f(x) = f(a) + g(x) - h(x),$$
$$\mathbf{V}(f,a,b) = g(x) + h(x).$$
Funkcije g i h nazivaju se redom *pozitivnom* i *negativnom varijacijom* funkcije f. Uputstvo: Ako su g i h funkcije definisane sa $2g(x) = \mathbf{V}(f,a,b) + f(x) - f(a)$, $2h(x) = \mathbf{V}(f,a,x) - f(x) + f(a)$, onda je $g(a) = f(a) = 0$ i za $y > x$ $\;2g(y) - 2g(x) = \mathbf{V}(f,a,b) + \big(f(y) - f(x)\big)$, $2h(y) - 2h(x) = \mathbf{V}(f,x,y) - \big(f(y) - f(x)\big)$.
6. Ako je funkcija f neprekidna i ima ograničenu varijaciju na $[a,b]$, dokazati da su onda pozitivna i negativna varijacija od f neprekidne funkcije.
7. Dokazati da realna funkcija $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ograničene varijacije ima lijevi limes $f(x-0)$ za $x \in (a,b]$, desni limes $f(x+0)$ za $x \in [a,b)$ i da joj je skup tačaka prekida najviše prebrojiv.
8. Dokazati da su $f+g$, cf i fg ograničene varijacije ako su f i g ograničene varijacije.
9. Ako je $f : [a,b] \to X$ ograničene varijacije i $a \le x \le y \le b$, dokazati da je onda $\mathbf{V}(f,a,y) = \mathbf{V}(f,a,x) + \mathbf{V}(f,x,y)$.
10. Ako je g realna funkcija ograničene varijacije na $[a,b]$, α i β takve monotono rastuće funkcije takve da je $g = \alpha - \beta$, a $f : [a,b] \to X$ integrabilna u odnosu na α i β na $[a,b]$, onda se Riemann-Stieltjesovim integralom funkcije f u odnosu na funkciju g zove broj
$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f\,d\alpha - \int_a^b f\,d\beta.$$
(a) Dokazati da je takva definicija korektna, tj. da $\int_a^b f\,dg$ ne zavisi od reprezentacije $g = \alpha - \beta$.

(b) Ako je f neprekidna a g ograničene varijacije, dokazati da je
$$\int_a^b f\,dg = \lim_{d(P)\to 0} S(P,T,f,g),$$
gdje je $S(P,T,f,g) = \sum_{i=1}^n f(t_i)\big(g(t_i) - g(t_{i-1})\big)$ Riemann-Stieltjesova suma funkcije f u odnosu na označenu podjelu (P,T) i funkciju g.
11. (**Parcijalna integracija**). Ako su f i g ograničene varijacije na $[a,b]$ i f neprekidna, dokazati da je onda
$$\int_a^b f\,dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g\,df.$$

Uputstvo: Koristiti 10.(b).

12. (**Prva teorema o srednjoj vrijednosti**). Ako je f neprekidna, a g monotona na $[a,b]$, dokazati da onda postoji tačka $t \in [a,b]$ takva da je

$$\int_a^b f\,dg = f(t)\big(g(b) - g(a)\big).$$

Uputstvo: Ako je $f([a,b]) = [m, M]$, onda je $m \leq \int_a^b f\,dg/[g(b) - g(a)] \leq M$ i treba primijeniti Bolzanove teoreme.

13. (**Druga teorema o srednjoj vrijednosti**). Ako je f monotona a g ograničene varijacije i neprekidna na $[a,b]$, onda postoji $t \in [a,b]$ tako da je

$$\int_a^b f\,dg = f(a)[g(t) - g(a)] + f(b)[g(b) - g(t)]$$

Uputstvo: Slijedi iz zadatka 11 i 12.

10. Integral po proizvoljnom otvorenom skupu

Zahvaljujući topološkim svojstvima prostora $\mathbf{R}^k$, do sada razvijena tehnika Riemannovog integrala daje mogućnost da se za otvoren skup A i lokalno ograničenu skoro svuda neprekidnu funkciju $f : A \to \mathbf{R}$ definiše integral na A i onda kad A nije mjerljiv po Jordanu ili f nije ograničena na A. (Otvoren skup nije mjerljiv po Jordanu ako nije ograničen ili mu granica nije Jordanove mjere nula).

Ideja koju ćemo realizovati počiva na činjenici da se otvoren skup u $\mathbf{R}^n$ može iscrpljivati iznutra elementarnim, odnosno skupovima mjerljivim po Jordanu. (Toj ideji privremeno dajemo prednost nad drugim mogućim tehničkim realizacijama, jer se praktični račun gotovo uvijek obavlja na taj način).

10.1. Definicija. Ako je $A \subset \mathbf{R}^k$ otvoren skup, onda ćemo broj

$$\mu(A) = \sup\big\{\mu(D) : D \subset A,\ D \text{ mjerljiv po Jordanu}\big\} \tag{1}$$

zvati *mjerom* skupa A.

Primijetimo da $\mu(A)$ može biti i $+\infty$. Ako je A mjerljiv po Jordanu, onda je mjera $\mu(A)$ Jordanova mjera skupa A, jer je A najširi mjerljivi podskup od A, (a Jordanova mjera monotona funkcija skupa). To znači da smo ovom definicijom napravili ekstenziju $\mu : \mathcal{J} \cup \tau \to \mathbf{R}$ Jordanove mjere, što je takođe i razlog da smo u (1) koristili istu oznaku za razne funkcije skupa.

10.2. Definicija. Ako je $A \subset \mathbf{R}^k$ otvoren skup i $f : A \to \mathbf{R}$ nenegativna *lokalno integrabilna* na A, (tj. lokalno ograničena na A i neprekidna s.s.), onda se broj

$$\int_A f = \sup_{D \subset A} \int_D f,$$

gdje je D skup mjerljiv po Jordanu, a $\int_D f$ Riemannov integral od f po D, naziva *integralom* funkcije f na skupu A. Ako je $\int_A f < +\infty$, onda se kaže da je f *integrabilna* na A.

Ako je pod uslovima definicije, A mjerljiv po Jordanu, a f ograničena na A, onda je integral od f po A u smislu (2), jednak Riemannovom integralu funkcije f na A. (Zbog pretpostavke da je f nenegativna, $\int_D f$ na desnoj strani relacije (2) je veći što je skup D širi).

Podvucimo, da su ovom definicijom u integraljenje uključeni ne samo novi skupovi već i novi odnosi funkcije i skupa. Kod Riemannovog integrala, funkcija f je bila ograničena na mjerljivom skupu na kojem se integrali, a skupovi mjerljivi po Jordanu po definiciji ograničeni. Sada, u definiciji 10.2, funkcija f ne mora biti ograničena na skupu A, (vidi primjere 10.8, 10.9, 10.12).

10.3. Lema. *Ako je A otvoren skup i (D_n) proizvoljan niz skupova mjerljivih po Jordanu takav da je $D_n \subset D_{n+1}$ i $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, onda je*

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(D_n), \tag{3}$$

$$\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_{D_n} f. \tag{4}$$

Dokaz. Ovo tvrđenje je posljedica tzv. σ-aditivnosti Jordanove mjere i funkcije $D \longmapsto \int_D f$ na prstenu $\mathcal{J}$ skupova mjerljivih po Jordanu, o čemu će detaljno biti govora u Glavi VI. (U VI.6 će biti dat dokaz koji strukturalno objašnjava poredak stvari).

10.4. Svaka funkcija $f : A \to \mathbf{R}$ može se predstaviti kao razlika dvije nenegativne funkcije. Naime, ako definišemo

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = -\min\{f, 0\},$$

onda je $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$ i

$$f = f^+ - f^-. \tag{5}$$

Pritom su f^+ i f^- neprekidne tamo gdje je f neprekidna. Ako je $f \geq 0$, onda je $f^- = 0$ a $f^+ = f$.

10.5. Definicija. Neka je A otvoren skup i f lokalno integrabilna na A. *Integralom funkcije f po skupu A* zvaćemo broj

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-,$$

pod uslovom da je bar jedan od brojeva $\int_A f^+$, $\int_A f^-$ konačan.

Ako za svaki $r > 0$ skup $\partial A \cap B(r)$ ima Jordanovu mjeru nula, onda definišimo

$$\int_{\bar{A}} f = \int_A f.$$

Ako je $\left|\int_A f\right| < +\infty$ kaže se da $\int_A f$ *konvergira*. (Takav naziv potiče od načina računanja — saglasno lemi 10.3 $\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_{D_n} f$, gdje je $D_n \subset D_{n+1}$, $\bigcup D_n = A$).

Može se u smislu definicije 10.5 govoriti o integralu svake nenegativne funkcije f (lokalno integrabilne na A) ali od funkcija koje mijenjaju znak, samo za one kod kojih je bar jedan od integrala $\int_A f^+$, $\int_A f^-$ konačan. (Inače, razlika $\int_A f^+ - \int_A f^-$ nije definisana).

S obzirom da je $|f| = f^+ - f^-$, slijedi da je $\left|\int_A f\right| < +\infty$ ako i samo ako je $\int_A |f| < +\infty$.

Ako je pod uslovima ove definicije skup A mjerljiv po Jordanu i funkcija f ograničena, onda je integral u smislu definicije 10.5 jednak Riemannovom integralu $\int_A f$. (Za f^+ i f^- to je očigledno. Za proizvoljnu $\mathcal{R}$-integrabilnu funkciju to slijedi iz linearnosti $\mathcal{R}$-integrala i reprezentacije (5)).

Dodavanjem otvorenih skupova prstenu skupova mjerljivih po Jordanu, dobija se klasa koja nije prsten. (Razlika dva otvorena skupa ne mora biti ni otvoren ni mjerljiv po Jordanu).

10.6. Napomena. Kao što rekosmo, ako $\int_A f$ konvergira, onda se on računa po formuli (4) kao i kod nenegativne funkcije. Ako je funkcija f takva da je $\int_A f^+ = \int_A f^- = +\infty$, (to je, naravno, moguće jedino ako f mijenja znak), onda se ne može govoriti o njenom integralu u smislu definicije 10.5. Međutim, granična vrijednost (4) može i tada postojati za neke nizove (D_n) mjerljivih skupova koji iscrpljuju skup A, (vidi paragraf 11). Kod takvih funkcija izbor niz (D_n) igra onu ulogu koju je kod uslovno konvergentnih redova igrala permutacija članova reda. Naime, iz 10.3. i (komentara) 10.5 slijedi da granična vrijednost (4) za funkciju koja mijenja znak, postoji i ne zavisi od izbora niza (D_n) ako i samo ako $\int_A |f|$ konvergira.

10.7. Primjer. Dokažimo relaciju

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}, \tag{6}$$

koja je od osnovnog značaja u teoriji vjerovatnoće. ($\int_{-\infty}^{+\infty}$ u ovom paragrafu znači $\int_{\mathbf{R}}$).

S obzirom da je $e^{-t^2} > 0$ za svaki t, imamo da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} e^{-t^2}\,dt.$$

Neka je $I^2(r) = [-r,r]\times[-r,r]$ i $B(r)$ lopta poluprečnika r s centrom u 0. Tada je:

$$\int_{B^2(r)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r te^{-t^2}\,dt = \pi(1-e^{-r^2}),$$

$$\int_{I^2(r)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{-r}^{r} e^{-x^2}dx \int_{-r}^{r} e^{-y^2}dy = \left(\int_{-r}^{r} e^{-t^2}dt\right)^2.$$

Iz 10.3. slijedi da je

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\int_{-r}^{r} e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \lim_{r\to\infty} \pi(1-e^{-r^2}) = \pi,$$

a odatle (6).

10.8. Primjer. Za $0 < a < b$ je

$$\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}) & \text{za } \alpha \neq 1, \\ \ln\dfrac{b}{a} & \text{za } \alpha = 1. \end{cases}$$

Puštajući jednom da $b\to\infty$ a drugi put $a\to 0$ dobijamo:

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{konvergira za } \alpha > 1, \text{ divergira za } \alpha \le 1.$$

$$\int_0^{a}\frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{konvergira za } \alpha < 1, \text{ divergira za } \alpha \ge 1.$$

(U posljednjem integralu, integrali se neograničena funkcija po skupu mjerljivom po Jordanu).

10.10. Primjer. Neka je $B^n(R)$ lopta s centrom u 0 poluprečnika R u prostoru $\mathbf{R}^n$, $r = \|x\|$ i $0 < \rho < R$. Tada je funkcija $x \longmapsto r^{-\alpha}$ neograničena. Prelaskom na sferni koordinatni sistem u $\mathbf{R}^n$ (vidi 7.12) dobijamo da je

$$\int_{B^n(R)-B^n(\rho)} \frac{1}{r^\alpha} = c\int_\rho^R \frac{dr}{r^{\alpha-n+1}}.$$

Iz 10.8 slijedi da

$$\int_{\mathbf{R}^n - B^n(\rho)} \frac{1}{r^\alpha} \quad \text{konvergira za } \alpha > n \text{ a divergira za } \alpha \le n,$$
$$\int_{B^n(R)} \frac{1}{r^\alpha} \quad \text{konvergira za } \alpha < n \text{ a divergira za } \alpha \ge n.$$

10.11. Teorema. (Kriterijum upoređivanja). *Neka su f i g lokalno integrabilne na skupu A i $|f|(x) \le g(x)$ za $x \in A$. Tada*:

(a) *Ako $\int_A g$ konvergira, onda konvergira i $\int_A f$.*

(b) *Ako $\int_A |f|$ divergira, divergira i $\int_A g$.*

Dokaz prepuštam čitaocu.

10.12. Primjer. (Eulerovi integrali). Funkcije Γ i B definisane redom sa

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \tag{6}$$

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}\, dt, \tag{7}$$

nazivaju se redom *gama* i *beta* funkcijama ili *Eulerovim integralima* prve i druge vrste. Podrazumijeva se da su funkcije Γ i B definisane za one vrijednosti x i y za koje integrali (6) i (7) konvergiraju: Integrali (6) i (7) postoje (uključujući i slučaj kad su jednaki $+\infty$), jer su podintegralne funkcije neprekidne i pozitivne u otvorenim skupovima ukazanim granicama integracije.

Kod integrala (6), (u okolini tačke $t = 0$ a za $x < 1$) neograničena je i podintegralna funkcija f i oblast integracije. Za svaki (fiksirani) x postoje $t_0 > 0$ i $C > 0$ takvi da je

$$t^{x-1} e^{-t} = t^{x+1} e^{-t} \cdot \frac{1}{t^2} \le \frac{C}{t^2} \quad \text{za } t > t_0. \tag{8}$$

Iz (8), 10.9 i 10.10, slijedi da je f integrabilna na intervalu $[a, +\infty)$ za svaki $a > 0$. Primjenom kriterijuma upoređivanja dobijamo da je za $x > 0$ funkcija f integrabilna i na $(0, a)$ za svaki $a > 0$, i da nije integrabilna ako je $x \le 0$. Slijedi da je funkcija Γ definisana za $x > 0$.

Podintegralna funkcija u (7) nije ograničena u okolinama tačaka 0 i 1. Primjenom kriterijuma upoređivanja i 10.9, nije teško vidjeti da je ona integrabilna za $x > 0$ i $y > 0$. Slijedi da je funkcija B definisana u kvadrantu $x > 0$, $y > 0$.

10.13. Primjer. Ako je A ograničen, f neprekidna na A i $a \in \overline{A}$, onda iz 10.9 slijedi da integral

$$\int_A \frac{f}{\|x - a\|^\alpha}$$

konvergira za $\alpha < n$.

10.14. Primjer. Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ konvergira, jer je $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2}$ za $x \ge 1$.

10.15. Primjer. (Eliptički integral). Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

konvergira za $|k| < 1$, jer je za x dovoljno blisko jedinici

$$\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} > (1-x)^{1/2}\sqrt{1-k^2}.$$

10.16. Teorema. (Zamjena promjenljivih). *Neka je U otvoren skup, $g : U \to V$ difeomorfizam i f lokalno integrabilna funkcija. Tada $\int_V f$ konvergira ako i samo ako $\int_U (f \circ g)|\det g'|$ konvergira i važi*

$$\int_V f = \int_U (f \circ g)|\det g'|. \tag{9}$$

(Sada, pošto imamo definiciju mjere proizvoljnog otvorenog skupa, može se uslov o tome da je $g'(x)$ izomorfizam za svaki $x \in U$ znatno oslabiti. Vidi zadatke 10.21.5 i 10.21.6).

Dokaz. Teoremu 7.7 možemo primijeniti za svaki $D \in \mathcal{J}$ takav da je $\overline{D} \subset U$. Kako niz $(g(D_n))$ zadovoljava uslove za primjenu leme 10.3 ako i samo ako ih zadovoljava niz (D_n), $D_n \subset U$, prvo dobijamo tvrđenje za funkcije f^+ i f^-:

$$\int_V f^+ = \int_U (f^+ \circ g)|\det g'|, \qquad \int_V f^- = \int_U (f^- \circ g)|\det g'|. \tag{10}$$

S obzirom da je $\int_V f < \infty$ ako i samo ako $\int_V f^+ < \infty$ i $\int_V f^- < \infty$, iz (10) slijedi (9).

10.17. Primjer. U integralu

$$I = \int\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^\alpha} \tag{11}$$

pređimo na polarne koordinate. Dobijamo:

$$\int\limits_{\substack{0<\varphi<2\pi\\ 0<r<1}} \frac{r\,drd\varphi}{(1-r^2)^\alpha}.$$

Iz 10.8 lako slijedi da je integral na desnoj strani konvergentan za $\alpha < 1$. Na osnovu 10.16 konvergira i polazni integral. Konačno, imamo da je

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r\,dr}{(1-r^2)^\alpha} = \frac{\pi}{1-\alpha}.$$

Analogno dobijamo da integral (11) divergira za $\alpha \geq 1$.

10.18. Primjer. Funkcija $f(x,y) = 1/(1+x^2+y^2)^2$ je integrabilna na $\mathbf{R}^2$ (primjer 10.10 i teorema 10.9). Uvodeći polarne koordinate dobijamo:

$$\int_{\mathbf{R}^2} f = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\,dr}{(1+r^2)^2} = 2\pi\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1+r^2}\right)\Big|_0^\infty = \pi.$$

10.19. Primjer. Funkcija $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ je integrabilna na krugu $B(0,1)$. Uvodeći polarne koordinate dobijamo

$$\int_{B^2(0,1)} f = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r\,dr}{r} = 2\pi.$$

10.20. Primjer. Smjenom promjenljivih $t = \cos\theta$, beta funkciji iz primjera 10.11. može se dati oblik

$$\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1} d\theta.$$

10.21. Zadaci za vježbu

1. Dokazati da funkcija $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definisana sa $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ nije integrabilna na kvadrantu $D = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$. Uputstvo: Neka je $D_n = [0,n]\times[0,n]$, $\widetilde{D}_n = B^2(0,n)\cap D$. Tada oba niza (D_n), $(\widetilde{D}_n)$ zadovoljavaju uslove leme 10.3, ali niz (I_n),

$$I_n = \int_{D_n} f = \int_0^n dx \int_0^n \sin(x^2+y^2)\,dy,$$

konvergira ka $\pi/4$, dok niz $(\widetilde{I}_n)$,

$$\widetilde{I}_n = \int_{\tilde{D}_n} f = \int_0^{\pi/2}\int_0^n r\sin r^2\,dr = \frac{\pi}{4}(1-\cos n^2),$$

ne konvergira.

2. (a) Ako je A otvoren skup i (D_n) proizvoljan niz disjunktnih skupova mjerljivih po Jordanu takvih da je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, dokazati da je $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n)$. Uputstvo: Iz 10.3 slijedi da je $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu\big(\bigcup_{i=1}^{n} D_i\big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(D_i)$.

   (b) Ako su A i (D_n) kao u (a), dokazati da je $\int_A f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{D_n} f$.

3. Neka je A otvoren skup i f nenegativna lokalno integrabilna funkcija. Dokazati da je
$$\int_A f = \sup_s \int s$$
gdje se supremum uzima po familiji prostih (ili samo stepenastih) funkcija s takvihda je $\operatorname{supp} s \subset A$ i $s(x) \leq f(x)$ za $x \in A$.

4. Ako je U otvoren skup, dokazati da je $\mu(U) = \sup_f \int f$, gdje se supremum uzima po svim funkcijama f takvim da je $0 \leq f \leq 1$ i $\operatorname{supp} f \subset U$.

5. (a) Neka je $U \subset \mathbf{R}^n$ otvoren skup i $g : U \to \mathbf{R}^n$ C^1-preslikavanje. Ako je $I^n = \overline{I}^n$ kub, dokazti da postoji $M > 0$ takav da je
$$\|g(y) - g(x)\| \leq M\|y - x\|$$
(za $x, y \in I^n$ i funkcija $d \longmapsto \varphi(d)$ takva da je
$$\|g(y) - g(x) - g'(x)(y - x)\| \leq \varphi(\|y - x\|)\|y - x\|$$
i $\varphi(d) \to 0$ kad $d \to 0$. Uputstvo: Prvo tvrđenje slijedi iz IV.8.14.4, jer je I^n konveksan. Posljednje tvrđenje je trivijalno, ako funkcija φ nosi indeks x, tj. ako se za svaku tačku x u nekoj njenoj okolini uzima svoja funkcija φ_x. Primjenom posljedice IV.8.13 teoreme o konačnom priraštaju i činjenice da je preslikavanje $x \longmapsto g'(x)$ ravnomjerno neprekidno na I^n, dobija se da se može uzeti jedna ista φ za svaki $x \in I^n$.

   (b) Ako je pod uslovima (a) u bar jednoj tački $x \in I^n$ $\det g'(x) = 0$, dokazati da $g(I^n)$ leži između dvije hiperravni čije rastojanje nije veće od $\varphi(d)d$, a unutar cilindra poluprečnika Md, gdje je d dijagonala kuba I^n. Uputstvo: Iz $\det g'(x) = 0$ slijedi da $g'(x)(y-x)$ leži u nekoj hiperravni za svaki $y \in \mathbf{R}^n$. Primijeniti zatim (a).

   (c) Ako se I^n izdijeli na m^n kongruentnih paralelopipeda, (tj. stranica mu se podijeli na m jednakih djelova), dokazati da je onda za svaki od paralelopipeda iz podjele koji ima zajedničkih tačaka sa skupom $B = \big\{x \in U : \det g'(x) = 0\big\}$,
$$\mu(g(B \cap S)) \leq M d_S^n p(d) = M(l\sqrt{n}/m)^n \varphi(d), \tag{$*$}$$
a
$$\mu(g(I^n \cap B)) \leq M m^n (l\sqrt{n}/m)^n \varphi(d) = C l^n \varphi(d).$$
Uputstvo: Kad se (a) primijeni na S, onda se dobije relacija $(*)$.

(d) (**Sardova lema**). Neka je (kao i do sada) U otvoren skup u $\mathbf{R}^n$, $g : U \to \mathbf{R}^n$ C^1-preslikavanje i $B = \{x \in U : \det g'(x) = 0\}$. Tada skup $g(B)$ ima Lebesgueovu mjeru jednaku nuli. Uputstvo: Neka je $\varepsilon > 0$ i $\overline{I}^n$ zatvoreni kub. Ako se u (c) m uzme tako veliko, da $d = l/m$ postane dovoljno malo da se obezbijedi da je $\varphi(d) < \varepsilon/(Cl^n)$, dobija se da je $\mu(I^n \cap B) < \varepsilon$. Slijedi da je $\mu(I^n \cap B) = 0$. Ostaje još da se B prekrije sa prebrojivo mnogo intervala $\overline{I}^n \subset U$ i primijeni 4.17.

6. Koristeći Sardovu lemu dokazati teoremu o zamjeni promjenljivih u sljedećoj formulaciji: Neka je U otvoren skup i $g : U \to V$ homeomorfizam iz klase C^1. Ako je f integrabilna na V, onda je $(f \circ g)|\det g'|$ integrabilna na U i

$$\int_U f = \int_V (f \circ g)|\det g'|.$$

Uputstvo: Skup $N = \{x \in U : \det g'(x) = 0\}$ je zatvoren, jer je $g \in C^1$. Teorema 10.16 važi u $U - N$. Naše tvrđenje sada slijedi iz $\int_{U-N}(f \circ g)|\det g'| = \int_U (f \circ g)|\det g'|$, $\int_{V-g(N)} = \int_V f$.

7. Izračunati integral $\displaystyle\int\limits_{\|x\|<1} \frac{dx}{\sqrt{1-\|x\|^2}}$. Uputstvo: $I = \lim_{r\to 1,\, r<1} I(r) = \pi^{n/2}\Gamma(n/2)$, jer

$$I(r) = \int\limits_{\|x\|\le r} \frac{dx}{\sqrt{1-\|x\|^2}} = \int\limits_{(x^1)^2+\cdots+(x^{n-1})^2\le r^2} dx^1 \dots dx^{n-1} \times$$
$$\times \int_{-\sqrt{r^2-(x^1)^2-\cdots-(x^{n-1})^2}}^{\sqrt{r^2-(x^1)^2-\cdots-(x^{n-1})^2}} \frac{dx^n}{\sqrt{r^2-(x^1)^2-\cdots-(x^n)^2}}.$$

8. (**Cauchyev integralni kriterijum**). Neka je $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$, $a \ge 0$, nenegativna monotono opadajuća funkcija. Dokazati da $\int_a^{+\infty} f$ konvergira ako i samo ako red $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergira. Uputstvo: $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$ za $n \le x \le n+1$, pa je $\sum_{i=1}^{n} f(i+1) \le \int_1^{n+1} f \le \sum_{i=1}^{n} f(i)$. Ostaje još da se primijeni lema 10.3.

9. Riješiti zadatak V.2.13.4 primjenom Cauchyevog integralnog kriterijuma.

10. Dokazati da formula parcijalne integracije IV.10.11.3 važi i na intervalu $[a, +\infty)$ (uz iste ostale pretpostavke o diferencijabilnim svojstvima funkcija f i g).

11. (a) Dokazati tzv. formulu svođenja (na $0 < x \le 1$, $0 < y \le 1$) za gama i beta funkciju:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (x > 0),$$
$$\mathrm{B}(x+1, y) = \frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x, y), \quad (x > 0,\, y > 0),$$

$$B(x, y+1) = \frac{y}{x+y} B(x, y), \quad (x > 0,\ y > 0).$$

Uputstvo:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x),$$

$$B(x, y+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\, dt = \left[\frac{t}{x}(1-t)^y\right]_0^1 + \frac{y}{x}\int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt$$
$$= \frac{y}{x}B(x,y) - \frac{y}{x}B(x, y+1).$$

(Pritom je korišćen zadatak 10).

(b) Koristeći formule iz (a) dokazati da je

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$
$$B(x, n) = \frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)},$$
$$B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

12. Dokazati da je

(a) $B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{v^{y-1}}{(1+v)^{x+y}} dv = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta\, d\theta$. Uputstvo: smjena $t = 1/(1+v)$ i 10.20.

(b) $B(x, y) = B(y, x)$.

13. Dokazati da je:

(a) $\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$.

Uputstvo: Smjenom $\sqrt{t} = u$ dobija se da je $\Gamma(1/2) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ i rezultat slijedi iz primjera 10.7.

(b) $\Gamma\big(n + \frac{1}{2}\big) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$.

14. (a) Smjenom promjenljivih $x = \ln(1/u)$ dokazati da je

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{x-1} du.$$

(b) Polazeći od $\ln\frac{1}{u} = \lim_{n\to\infty} n(1-u)^{1/n}$ za $0 < u < 1$, dokazati da je

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^{x-1}\int_0^1 (1-u)^{\frac{x-1}{n}} du.$$

(c) Dokazati da je $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x \dfrac{(n-1)!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)}$.

Uputstvo: $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x \int_0^1 v^{n-1}(1-v)^{x-1}dv = \lim_{n\to\infty} n^x \mathrm{B}(n,x)$.

(d) Polazeći od relacije $\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$, koja će biti dokazana u VII.2.11, dokazati da je

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1.$$

Uputstvo: Iz (c) i zadatka 11(b) slijedi da je

$$\begin{aligned}
&\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n^x \frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)}\, n^{1-x}\frac{(n-1)!}{(1-x)(2-x)\cdot\ldots\cdot(n-x)}\right)\\
&\qquad\qquad = \cdots = \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{x^2}{(n-1)^2}\right)}.
\end{aligned}$$

15. Dokazati da je

$$\Gamma(2x)\cdot\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\tfrac{1}{2}\right).$$

16. Dokazati da je $\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Uputstvo: $\sin \pi x = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^2/n^2)$.

11. Nesvojstveni integral

Integral lokalno integrabilne funkcije na otvorenom skupu nije definisan samo kada je $\int_A f^+ = \int_A f^- = +\infty$. Ima funkcija koje se pojavljuju u prirodnim naukama za koje važi ta jednakost, tj. za koje integral u smislu (do sadašnjih definicija) nije definisan, a za koje granične vrijednosti iz sljedeće definicije postoje i imaju fizički smisao.

11.1. Definicije. Ako su ispunjeni uslovi navedeni na desnim stranama relacija (1)–(6), onda se niže ukazane granične vrijednosti, (ako postoje), nazivaju (*Riemannovim*) *nesvojstvenim integralom* i označavaju na sljedeći način:

(1) $$\int_a^{+\infty} f = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f \quad \text{ako je } f\in\mathcal{R}[a,A] \text{ za svaki } A > a.$$

(2) $$\int_{-\infty}^{a} f = \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f \quad \text{ako je } f\in\mathcal{R}[A,a] \text{ za svaki } A < a.$$

$$(3)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int_A^B f = \lim_{A\to-\infty} \int_A^a f + \lim_{B\to+\infty} \int_a^B f, \quad (|a| < \infty).$$

$$(4)\qquad \int_a^b f = \lim_{B\to b} \int_a^B f \quad \text{ako je } f \in \mathcal{R}[a,B] \text{ za svaki } B \in (a,b]).$$

$$(5)\qquad \int_a^b f = \lim_{A\to a} \int_A^b f \quad \text{ako je } f \in \mathcal{R}[A,b] \text{ za svaki } A \in (a,b].$$

$$(6)\qquad \int_a^b f = \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f \qquad \text{ako je } f \in \mathcal{R}[a, c-\varepsilon_1],$$
$$f \in \mathcal{R}[c+\varepsilon_2, b] \text{ za } 0 < \varepsilon_1 < c-a,\ 0 < \varepsilon_2 < b-c.$$

Za granične vrijednosti (4) i (5) koristićemo takođe oznake $\displaystyle\int_a^{b-0} f$ i $\displaystyle\int_{a+0}^b f$.

Moguće je dalje praviti razne kombinacije slučajeva (1), (2), (3) (oblast integracije nije ograničena) i slučajeva (4), (5), (6) (integrand nije ograničen). Detalje prepuštamo čitaocu.

Uobičajeno je da se znaci na lijevoj strani relacija (1)–(6) pišu i nazivaju integralom i prije nego što se provjeri egzistencija granične vrijednosti na desnoj strani. Tada se kaže da *integral konvergira* ako granična vrijednost postoji a ta divergira ako granična vrijednost ne postoji.

Komentar: Razlika između definicije 10.2 i definicije 11.1 je u tome što je u definiciji 11.1 fiksiran način iscrpljivanja intervala (a,b) na način ukazan na desnim stranama relacija (1)–(6). Funkcije koje imaju integral u smislu definicije 10.2, tj. funkcije kod kojih je jedan od integrala $\int_A f^+$, $\int_A f^-$ konačan, imaju i nesvojstven integral, (jer za njih $\lim_{n\to\infty} \int_{D_n} f$ ne zavisi od načina iscrpljivanja intervala A) i njihov nesvojstveni integral jednak je integralu od f. Međutim, ako je $\int_A f^+ = \int_A f^- = +\infty$ definicija 10.2 je neprimjenljiva, dok (nesvojstveni) integral u smislu definicije 11.1 može postojati, (jer, ponovimo, on je granična vrijednost pri jednom fiksiranom načinu iscrpljivanja intervala).

Nesvojstveni integral je definisan na široj klasi funkcija nego integral. Za nesvojstveni integral funkcije f kaže se da *apsolutno konvergira* ako je $\int_A |f| < +\infty$. Pošto je na klasi nenegativnih funkcija nesvojstveni integral jednak integralu (lema 10.3), slijedi da je f integrabilna ako ima apsolutno konvergentan nesvojstveni integral. (Nesvojstveni integral od f tada je jednak integralu od f). Za nesvojstveni integral se kaže da *uslovno konvergira*, ako je $\int_A |f| = +\infty$ a nesvojstveni integral od f konvergira.

Objasnimo još naziv nesvojstveni integral: Relacije $\left|\int_A f\right| < \infty$ i $\int_A |f| < \infty$ su ekvivalentne za integral, tj. pojmovi apsolutne i uslovne konvergencije za integral su ekvivalentni. (Zato se ta dva pojma i ne definišu za integral). Međutim, kao što vidjesmo, nesvojstveni integral nema to svojstvo i razlikuje se od integrala baš na klasi funkcija na kojoj uslovno konvergira. Pošto nema neke osobine svojstvene integralu, naziva se nesvojstvenim.

(Ponekad se nesvojstveni integral naziva nepravim integralom, jer kod njega nema smisla govoriti o aditivnosti integrala kao funkciji skupa).

U prostoru $\mathbf{R}^n$, za $n \geq 2$ nema privilegovanih načina iscrpljivanja oblasti, kao na pravoj. Kad granična vrijednost zavisi od načina iscrpljivanja, onda u $\mathbf{R}^n$ postoje različiti načini za koje nije jasno zašto bi jedan smatrali boljim od drugog, a koji daju različite granične vrijednosti. (Vidi zadatak 10.21.1). Zato se nesvojstveni integral definiše samo na pravoj.

Sljedeći primjer u potpunosti ilustruje (i objašnjava) kako se ponašaju funkcije koje imaju Riemannov nesvojstveni, a nemaju integral u smislu 10.2.

Slika 31.

11.2. Primjer. Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takva da je $\displaystyle\int_{2k}^{2k+1} f = \frac{1}{2k+1}$, $\displaystyle\int_{2k+1}^{2k+2} f = -\frac{1}{2k+2}$ (vidi sliku 31). Tada je $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f| = \int_0^{+\infty} f^+ = \int_0^{+\infty} f^- = +\infty$ i $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ ne konvergira u smislu definicije 10.2. Međutim, u smislu definicije 11.1 je

$$\int_0^{+\infty} f = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) = \ln 2.$$

11.3. Primjer. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ uslovno konvergira. Zaista, neka je $f(x) = \sin x^2$. Tada je

$$\int_{\sqrt{2k\pi}}^{\sqrt{(2k+1)\pi}} f > \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\big(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k}\big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\big(\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k}\big)},$$

$$\int_{\sqrt{(2k+1)\pi}}^{\sqrt{(2k+2)\pi}} f < -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\big(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k+1}\big) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\big(\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k}\big)},$$

otkuda slijedi da je

$$\int_0^{+\infty} |f| = \int_0^{+\infty} f^+ + \int_0^{+\infty} f^- = +\infty,$$

a takođe i da je $\int_0^{+\infty} f$ u smislu definicije 11.1 ekvikonvergentan sa redom čiji je opšti član

$$a = \frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k}} - \frac{1}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k}} \sim \frac{1}{k^{3/2}}.$$

Dakle, $\int_0^{+\infty} f$ je konvergentan ali ne i apsolutno konvergentan.

11.4. Teorema. *Neka je $\int_a^\lambda f$ bilo koji od integrala* (1), (4), ($a \in \mathbf{R}$, $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$) *i f integrabilno na $[a,x]$ za svaki $x \in (a,\lambda)$. Tada $\int_a^\lambda f$ konvergira ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $b \in (a,\lambda)$ takav da je za $x \geq b$, $y \geq b$*

$$\left|\int_a^x f - \int_a^y f\right| = \left|\int_x^y f\right| < \varepsilon.$$

Dokaz. Tvrđenje je trivijalna posljedica Cauchyevog kriterijuma II.18.8. egzistencije granične vrijednosti.

11.5. Teorema. (Abel-Dirichleov kriterijum uslovne konvergencije). *Neka su f i g integrabilne na $[a,b]$ za $a < b < \lambda$. Ako je ispunjen bilo koji od donja dva uslova, onda $\displaystyle\int_a^\lambda fg$ konvergira:*

(i) *Funkcija $b \longmapsto \displaystyle\int_a^b f$ je ograničena a g ima ograničenu varijaciju na $[a,\lambda)$ i $g(x) \to 0$ kad $x \to \lambda$ ($x < \lambda$),*

(ii) $\displaystyle\int_a^\lambda f$ *konvergira, a funkcija g ima ograničenu varijaciju na $[a,\lambda)$.*

Dokaz. Dokaz dajemo za slučaj kad je g još i monotono opadajuća, odnosno monotona i ograničena (u uslovu (b)). Ako je g monotona, iz druge teoreme o srednjoj vrijednosti 5.13.1 slijedi da za $x \in [a,\lambda)$, $y \in [a,\lambda)$ i $x < y$ postoji $c \in (x,y)$ takav da je

$$\int_x^y fg = g(y)\int_x^c f + g(y)\int_c^y f.$$

Ostaje još da se primijeni Cauchyev kriterijum 11.4.

11.6. Primjer. Integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

konvergira za $\alpha < 2$, jer je $\dfrac{\sin x}{x^\alpha} \sim \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ kad $x \to +0$. (Mi ovdje, u stvari, imamo integrabilnu funkciju, tj. slučaj kada nema razlike između nesvojstvenog integrala i integrala). Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

konvergira za $\alpha > 0$ na osnovu teoreme 11.5 (precizirajte). Slijedi da integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

konvergira za $0 < \alpha < 1$.

11.7. Definicija. Ako se u (3) uzme $A = -B$, u (6) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, onda se odgovarajuće granične vrijednosti (koje mogu postojati i kad nesvojstveni integrali (3) i (6) divergiraju), nazivaju *glavnim vrijednostima* nesvojstvenog integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f$, odnosno integrala $\int_a^b f$ i označavaju sa v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ i v. p. $\int_a^b f$, (valeur principal — oznaka potiče od Cauchya):

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim \int_{-A}^{A} f,$$

$$\text{v. p.} \int_a^b f = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^b f \right).$$

Jasno je da je v. p. $\int f$ jednaka Riemannovom nesvojstvenom integralu ako ovaj konvergira.

11.10. Primjer. v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0$.

11.11. Zadaci za vježbu

1. Formulisati i dokazati teoremu o zamjeni promjenljivih za nesvojstveni integral. Uputstvo: Analogno teoremi 10.16.
2. (**Fresnelovi integrali**). Smjenom $x = \sqrt{t}$ transformisati integrale

   $$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$$

   i dokazati da konvergiraju. Komentar: Ako izgleda neobično, skicirajte grafik funkcija $x \longmapsto \sin(x^2)$, $x \longmapsto \cos(x^2)$ i ubijediti se da osciliju na način koji nagovještava konvergenciju.
3. Dati definiciju Riemann-Stieltjesovog nesvojstvenog integrala.