Glava IV

VIŠESTRUKI I KRIVOLINIJSKI INTEGRALI

§ 1. Dvojni integral

1° Pod *dvojnim integralom* neprekidne funkcije $z(x, y)$ nad nekom zatvorenom pravilnom oblašću D, podrazumeva se broj

$$\iint_D z(x, y)\, dx, dy = \lim_{\substack{\max |\Delta x_i| \to 0 \\ \max |\Delta y_i| \to 0}} \sum_i \sum_j z(x_i, y_i)\, \Delta x_i\, \Delta y_j$$

gde je $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = x_{j+1} - x_j$ a zbir se odnosi na sve vrednosti i i j za koje je $(x_i, y_i) \in D$.
Ako je oblast D određena nejednakostima

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$$

gde su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ neprekidne funkcije na segmentu $[a, b]$, onda odgovarajući dvojni integral može biti izračunat po formuli

$$\iint_D z(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x, y)\, dy$$

2° Ako se neprekidnim i diferencijabilnim funkcijama

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

realizuje jednoznačno preslikavanje ograničene i zatvorene oblasti D u ravni xOy na oblast D' ravni uOv i ako je

$$I = \frac{D(x, y)}{D(n, v)} \neq 0$$

onda važi formula

$$\iint_D z(x, y)\, dx, dy = \iint_D z[x(u, v), y(u, v)]\, |I|\, du\, dv$$

U specijalnom slučaju kada se prelazi na polarne koordinate φ i r po formulama $x=r\cos\varphi$ i $y=r\sin\varphi$ biće:

$$\iint_D z(x,y)\,dx\,dy=\iint_D z(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

3° Ako su m i M donja i gornja međa funkcije $z(x,y)$ u oblasti D, onda je

$$m\leqslant z(x,y)\leqslant M$$

jednakost

$$\iint_D z(x,y)\,z_1(x,y)\,dx\,dy=z(\xi,\eta)\iint_D z_1(x,y)\,dx\,dy$$

gde je $z_1(x,y)$ neka neprekidna funkcija koja zadržava stalan znak u oblasti D, a $(\xi,\eta)\in D$ naziva se *formula o srednjoj vrednosti* dvojnog integrala. Ako se stavi $\mu=z(\xi,\eta)$ i $z_1(x,y)=1$ dobija se

$$\mu=z(\xi,\eta)=\frac{1}{P}\iint_D z(x,y)\,dx\,dy$$

što se naziva *srednja vrednost funkcije* $z(x,y)$ u oblasti D čija je površina P.

4° Ako je oblast integracije D neograničena a funkcija $z(x,y)$ neprekidna na D, onda je po definiciji

$$\iint_D z(x,y)\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} z(x,y)\,dx\,dy$$

gde je D_n proizvoljan niz ograničenih zatvorenih pravilnih oblasti koji pokriva oblast D, tj. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n=D$. Ako granica na desnoj strani postoji i ne zavisi od izbora niza D_n, onda se odgovarajući integral naziva *konvergentan;* u protivnom integral se naziva *divergentan.*

5° Ako je funkcija $z(x,y)$ svuda neprekidna u ograničenoj i zatvorenoj oblasti D, sem u tački $P(a,b)$, onda se stavlja

$$\iint_D z(x,y)\,dx\,dy=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{D-U_\varepsilon} z(x,y)\,dx\,dy$$

gde je $U\varepsilon$ oblast poluprečnika ε koja sadrži tačku P, i ako postoji granica integral se naziva konvergentan; u protivnom integral se naziva divergentan.

Pretpostavljajući da u oblasti tačke $P(a,b)$ važi jednakost: $z(x,y)=\dfrac{\varphi(x,y)}{r^a}$ gde gde je $m<|\varphi|(x,y)|<M\ (m, M>0)$ $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ dobija se da: 1) za $a<2$ integral (2) konvergira; 2) za $a\geqslant 2$ divergira. Analogno se definiše nepravi integral (2) ako funkcija $z(x,y)$ ima liniju prekida.

Polazeći od definicije izračunati sledeće integrale:

848. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,dx\,dy.$ **849.** $\displaystyle\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d}} x^2y^2\,dx\,dy.$ **850.** $\displaystyle\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d}} e^{x+y}\,dx\,dy.$

851. Formirati donji $\underline{S}$ i gornji $\overline{S}$ integralni zbir funkcije $z(x,y)=x^2+y^2$ na oblasti $1<x<2;\ 1<y<3$, deleći tu oblast na pravougaonike pravama.

$$x=1+\frac{i}{n},\quad y=1+\frac{2j}{n}\quad (i,j=0,1,\ldots n).$$

Naći graničnu vrednost tih zbirova kada $n \to \infty$

852. Proveriti sledeće relacije:

$$1^\circ \; 8\left(5-\sqrt{2}\right)\pi < \iint_D (x+y+100)\,dx\,dy < 8\left(5+\sqrt{2}\right)\pi;$$

$$2^\circ \; 36\pi < \iint_D (x^2+4y^2+9)\,dx\,dy < 76\pi$$

gde je oblast D ograničena krugom $x^2+y^2=4$

853. $0 < \iint_D xy(x+y)\,dx\,dy < 64$

$D(0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2)$

854. $-4 < \iint_D (x+xy-x^2-y^2)\,dx\,dy < \frac{2}{3}$

$D(0 \leqslant x \leqslant 1; \quad 0 \leqslant y \leqslant 2)$

855. $1{,}96 < \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10} \frac{dx\,dy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} < 2.$

U sledećim zadacima za navedenu oblast ispisati granice integracije dvojnog integrala $\iint_D z(x,y)\,dx\,dy$ za oba moguća poretka integracije.

856. Oblast D je trougao sa temenima $0(0, 0)$; $A(1, 0)$; $B(1, 1)$.

857. Oblast D je paralelogram sa temenima $A(1, 2)$; $B(2, 4)$; $C(2, 7)$; $D(1, 5)$.

858. Oblast D je krug 1° $x^2+y^2 \leqslant 1$; 2° $x^2+y^2 \leqslant x$.

859. Oblast D je kružni prsten $4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9$.

860. Oblast D je ograničena linijama $y=x$, $y=\sqrt{4x-x^2}$.

861. Oblast D je definisana nejednakošću $|x|+|y| \leqslant 1$.

U sledećim zadacima promeniti poredak integracije:

862. $\iint_D z(x, y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} z(x, y)\,dx.$

863. $\iint_D z(x, y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^1 z(x, y)\,dx\,dy.$

864. $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} z(x, y)\,dy.$ **865.** $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} z(x, y)\,dy.$

866. $\int\limits_0^a dx \int\limits_x^{\sqrt{2a-x^2}} z(x, y)\, dy.$ **867.** $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} z(x,y)\, dy.$

868. $\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} z(x, y)\, \mathrm{dx}.$ **869.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2/3} z(x, y)\, dx + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} z(x, y)\, dy.$

U dvojnom integralu $\iint\limits_D z(x, y)\, dx\, dy$ preći na polarne koordinate φ i r i napisati granicu integracije za oba moguća slučaja.

870. Oblast D je: 1° krug $x^2+y^2<a^2$ 2° kružni prsten $a^2<x^2+y^2<b^2$.

871. Oblast D je krug $x^2-y^2<ax$ $(a>0)$.

872. Oblast D je ograničena krivom $r=1-\varphi^2$ $(r>0)$.

873. Oblast D je pravougaonik sa temenima $0(0, 6)$; $A(1, 0)$; $B(1, 1)$; $C(0, 1)$.

874. Oblast D je ograničena pravama $x=2$, $y=x$ i $y=x\sqrt{3}$.

875. Oblast D je ograničena krivom $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x>0)$.

Pretpostavljajući da su φ i r polarne koordinate, izmeniti poredak integracije u sledećim primerima:

876. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi} z(\varphi, r)\, dr.$ **877.** $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} z(\varphi, r)\, dr$ $(a>0)$,

878. $\int\limits_0^a d\varphi \int\limits_0^{\varphi} z(\varphi, r)\, dr$ $(0<a<2\pi)$.

Izračunati sledeće integrale:

879. $\iint\limits_D xy^2\, dx\, dy$, ako je oblast integracije ograničena parabolom $y^2=2x$ i pravom $x=\dfrac{1}{2}$.

880. $\iint\limits_D \dfrac{x}{y}\, dx\, dy$, ako je oblast D ograničena parabolama $y=x^2$ i $x=y^2$.

881. $\iint\limits_D \dfrac{x}{2}\, dx\, dy$, ako je oblast D ograničena linijama $x=0$; $x=2+\sin y$; $y=0$; $y=2\pi$.

882. $\iint\limits_D 2y\,dx\,dy$, ako je oblast D ograničena linijama $y=\sqrt{x}$; $y=0$; $x+y=2$.

883. $\int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{y}{x}}\,dx\,dy.$ **884.** $\int\limits_0^a \int\limits_x^a e^{y^2}\,dx\,dy.$

885. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, ako je D paralelogram sa stranama $y=x$; $y=x+a$; $y=a$; $y=3a$ $(a>0)$

886. $\iint\limits_D y^2\,dx\,dy$ ako je oblast D ograničena osom O_x i prvim svodom cikloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

887. $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy$, ako je $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

888. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$, ako je $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

889. $\iint\limits_D x\sin(x+y)\,dx\,dy$, ako je $0\leqslant x\leqslant \pi$, $0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}$.

890. $\iint\limits_D x^2 y\, e^{xy}\,dx\,dy$, ako je $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 2$.

891. $\iint\limits_D x^2 y\cos(xy^2)\,dx\,dy$, ako je $0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}$, $0\leqslant y\leqslant 2$.

892. $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dx\,dy$, ako je oblast D ograničena pravama $x=0$, $y=\pi$, $y=x$.

893. $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} x^2\,dx\,dy.$

894. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, gde je oblast D ograničena linijama $xy=1$, $x+y=\frac{5}{2}$.

895. $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$ gde je oblast D ograničena linijama $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$.

896. Izračunati $I(a)=\iint\limits_D (x+y)^{-a}\,dx\,dy$ po oblasti D definisanoj nejednačinama $x>0$, $y>0$, $0<a\leqslant x+y\leqslant 1$ a zatim ustanoviti za koje će vrednosti parametra a postojati $\lim\limits_{a\to 0} I(a)$ i naći tu graničnu vrednost.

897. Izračunati $I(a)=\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ gde je D trougao ograničen pravama $x=1$, $y=0$, $x=y+a$, $0<a<1$. Naći $\lim\limits_{a\to 0} I(a)$.

898. Izračunati $\iint\limits_D x^2 y\sqrt{1-x^3-y^3}\,dx\,dy$ ako je oblast D definisana nejednačinama

$$x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad x^3+y^3\leqslant 1.$$

899. Pokazati da je $\iint\limits_D x^2\,dx\,dy=\iint\limits_D y^2\,dx\,dy=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=\frac{a^4\pi}{16}$ ako je oblast integracije definisana nejednačinom $x^2+y^2\leqslant a^2$ za $x>0$ i $y>0$.

Prelazeći na polarne koordinate izračunati sledeće integrale:

900. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, gde je oblast D ograničena Ox osom i lukovima krugova $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-2x=0$.

901. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2ay} (x^2+y^2)\,dx\,dy.$

902. $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, ako je oblast integracije krug $x^2+y^2\leqslant a^2$.

903. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$

904. $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$, gde je oblast integracije ograničena: 1° krugom $x^2+y^2=a^2$ i pravama $y=x$ i $y=x\sqrt{3}$; 2° krugom $x^2+y^2-ax=0$.

905. $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, ako je D oblast između krugova $x^2+y^2=1$ i $x^2+y^2=e^2$.

906. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)\left(1+\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}$, $D: x^2-y^2\leqslant 0,\ x^2+y^2\geqslant 1,\ x^2+y^2\leqslant 4.$

907. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, gde je D oblast ograničena pravama

$$x=0,\quad x=1,\quad y=0,\quad y=1.$$

908. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, gde je D oblast ograničena krugovima

$$x^2+y^2=\pi^2 \text{ i } x^2+y^2=4\pi^2.$$

909. $\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$, gde je oblast D definisana nejednačinom $\frac{x^2}{a^2}+$ $+\frac{y^2}{b^2}<1$.

910. $\iint\limits_D \sqrt{4-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\,dx\,dy$, ako je oblast D ograničena linijama $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{(2\,a)^2}+\frac{y^2}{(2\,b)^2}=1$ i pripada prvom kvadrantu.

911. $\iint\limits_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dx\,dy$, ako je oblast D ograničena koordinatnim osama i krivom $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$.

912. $\iint\limits_D \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, gde je D deo prstena $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 9$, $y\geqslant\frac{x}{3}$, $y\geqslant x\sqrt{3}$.

Naći srednju vrednost sledećih funkcija:

913. $z(x,\ y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, u oblasti određenoj nejednačinom $x^2+y^2\leqslant a^2$.

914. $z(x,\ y)=12-2\,x-3\,y$, u oblasti ograničenoj pravama $x=0$, $y=0$, $12-2\,x-3\,y=0$.

915. $z(x,\ y)=2\,x+y$, u oblasti ograničenoj pravama $x=0$, $y=0$, $x+y=3$.

916. $z(x,\ y)=\sin^2 x\sin^2 y$ u kvadratu: $0<x<\pi$, $0<y<\pi$.

Izračunati sledeće dvojne integrale:

917. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} |x-y|\,dx\,dy$.

918. $\iint\limits_D |xy|\,dx\,dy$ ako je oblast D definisana nejednačinom $x^2+y^2<a^2$.

919. $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} (|x|+|y|)\,dx\,dy$.

920. $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 2}} \sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy$.

921. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|\,dx\,dy$.

922. $\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dx\,dy$ ako je oblast D definisana nejednakostima:

$$1^\circ\ \ 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\pi;\quad 2^\circ\ \ 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant x.$$

Izračunati vrednost integrala:

923. $\iint\limits_D (y-x)\,dx\,dy$, ako je oblast ograničena pravama

$$y=x+1,\ y=x-3,\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{9},\ y=-\frac{1}{3}x+5$$

stavljajući

$$u=y-x,\quad v=y+\frac{1}{3}x.$$

Uvodeći mesto x i y nove promenljive u i v odrediti granice integracije u sledećim dvojnim integralima:

925. $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} z(x, y)\,dy$ $(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta)$ stavljajući $u=x,\ v=\frac{y}{x}$.

926. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} z(x, y)\,dy$ stavljajući $u=x+y,\ v=x-y$.

927. $\iint\limits_D z(x, y)\,dx\,dy$, ako je oblast D ograničena linijama $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a},\ x=0,$ $y=0\ (a>0)$ stavljajući $x=u\cos^4 v,\ y=u\sin^4 v$.

928. $\iint\limits_D z(x, y)\,dx\,dy$ gde je oblast D ograničena pravama $x=0,\ y=0,\ x+y=a$ stavljajući $x=\frac{u(a-v)}{a}\ \ y=\frac{uv}{a}$.

929. Kako treba izvršiti zamenu promenljivih pa da se krivolinijski četvorougaonik, ograničen linijama $xy=1,\ xy=2,\ x-y+1=0,\ x-y-1=0$ $(x>0,\ y>0)$ preslika na pravougaonik čije su stranice paralelne koordinatnim osama.

930. U integralu $\iint\limits_D z(x, y)dx\,dy$ oblast integracije je četvrtina kruga $x^2+y^2<a^2$, $x>0,\ y>0$. 1°. Zamenom promenljivih preslikati tu oblast u pravougaonik; 2° u ravnokrako pravougli trougao.

Izračunati sledeće integrale:

931. $\iint\limits_{\substack{x^2+y^4\leqslant 1\\ x\geqslant 0\ y\geqslant 0}} y^3\sqrt{1-x^2-y^4}\,dx\,dy.$ **932.** $\iint\limits_{x^4+y^4\leqslant 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy.$

933. $\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{1-(x^3+y^3)}\,dx\,dy$ ako je oblast D određena nejednakostima $x^3+y^3>1,\ y>0.$

934. Dokazati da je $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m x^n\,dx\,dy=0$ ako su m i n prirodni brojevi i bar jedan od njih neparan.

935. Naći $\lim\limits_{\varrho\to 0}\dfrac{1}{\pi\varrho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\varrho^2} z(x, y)\,dx\,dy$ gde je $z(x, y)$ neprekidna funkcija.

936. Ako je funkcija $\varphi(x)$ za $x<c$ neprekidna i pozitivna pokazati da je

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant c^2}\frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\,dx\,dy=\frac{(a+b)\,c^2\pi}{2}.$$

937. Naći $F'(t)$ ako je:

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}} e^{\frac{tx}{y^2}}\,dx\,dy.$$

938. Ako je funkcija $z(x, y)$ neprekidna, dokazati da

$$u(x, y)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} z(\xi, \eta)\,d\eta.$$

zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=z(x, y).$$

Ispitati konvergenciju sledećih nepravih integrala:

939. $\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1}\dfrac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$ $\quad(p>0,\ q>0).$

940. $\iint\limits_{x+y\geqslant 1}\dfrac{\sin x\sin y}{(x+y)^p}\,dx\,dy.$

941. Pokazati da integral $\iint\limits_{x\geqslant 1,\ y\geqslant 1}\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$ divergira iako dvostruki integrali

$$\int\limits_1^\infty dx\int\limits_1^\infty\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \quad \text{i} \quad \int\limits_1^\infty dy\int\limits_1^\infty\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx \text{ konvergiraju.}$$

Izračunati sledeće neprave integrale:

942. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}.$

943. $\displaystyle\iint\limits_{y\geqslant x^2+1}\frac{dx\,dy}{x^4+y^2}.$

944. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-8}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$. **945.** $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(a^2+x^2+y^2)^2}$.

946. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|-|y|}\,dx\,dy.$ **947.** $\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y}e^{-(x+y)}\,dx\,dy.$

948. $\int\limits_{0}^{\infty}dx\int\limits_{x}^{\infty}e^{-y^2}\,dy.$ **949.** $\int\limits_{0}^{\infty}dx\int\limits_{2x}^{\infty}x e^{-y}\frac{\sin y}{y^2}\,dy.$

950. $\iint\limits_{D}\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$ ako je oblast D definisana nejednakostima $x>0$, $y>0$, $x+y>1$.

951. $\iint\limits_{D}\frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^a}$ $(a\in R)$ gde je oblast D definisana nejednakošću $x^2+y^2<1$.

Pokazati koji od sledećih integrala uzeti po krugu $x^2+y^2<a^2$ konvergiraju:

952. $\iint\limits_{D}\ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$ **953.** $\iint\limits_{D}\frac{e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy.$

954. $\iint\limits_{D}\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dx\,dy.$ **955.** $\iint\limits_{D}\frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy.$

956. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$ **957.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy.$

958. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy.$

959. Može li se izabrati broj m tako da nepravi integral $\iint\frac{dx\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^m}}$, uzet po celoj ravni xOy, konvergira?

§ 2. Izračunavanje površine

Površina oblasti D u ravni xOy, može se naći po formuli

$$P=\iint\limits_{D}dx\,dy.$$

Naći površine ograničene sledećim linijama:

960. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

961. $x^2+y^2=2x,\ y=0,\ y=x.$

962. $xy=a^2, \quad x+y=\frac{5}{2}a \quad (a>0)$

963. $y=x^2, \quad x=y^2.$

964. $y=\sqrt{x}, \quad y=2\sqrt{x}, \quad y=4.$

965. $xy=a^2,\ xy=2a^2,\ y=x,\ y=2x \quad (x>0,\ y>0).$

966. $y^2=x+2,\ x=2$

967. $y=2x-x^2,\ y=x^2.$

968. $y=\frac{3}{x},\ x^2+y^2=10$

969. $(x^2+y^2)^2=2ax^3 \quad (a>0).$

970. $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4$

971. $(x^2+y^2)^3=4x^2y^2.$

972. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2);\quad x^2+y^2\geqslant a^2$

973. $(x^2+y^2)^5=x^2y^2.$

974. $(x^3+y^3)^2=x^2+y^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$

975. $(x^2+y^2)^2=8a^2xy \quad (x-a)^2+(y-a)^2\leqslant a^2.$

Uvodeći generalisane polarne koordinate r i φ po formulama

$$x=ar\cos^{\alpha}\varphi,\ y=br\sin^{\alpha}\varphi \quad (r\geqslant 0).$$

gde su a, b i α podesno izabrane konstante i

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\alpha\, arb\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi,$$

naći površinu ograničenu sledećim krivim linijama, pretpostavljajući da su parametri pozitivni:

976. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$

977. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2};\quad x=0,\ y=0.$

978. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1,\ x=0,\ y=0.$

Koristeći se podesnom zamenom promenljivih izračunati površinu ograničenu linijama:

979. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a}-\frac{y}{a}, \quad y>0.$

980. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^3};$ površinu petlje.

981. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{xy}{c^2}$.

982. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=\frac{x^2+y^2}{25}$.

983. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x+y=a$ $a>0$.

984. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$; $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2$; $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$; $4\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ $(a>0,\ b>0)$.

985. $y^2=2px$, $y^2=2qx$, $x^2=2ry$, $x^2=2sy$ $(0<p<q;\quad 0<r<s)$.

986. $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $\quad a<b$, $\alpha<\beta$.

987. $xy=a^2$, $xy=b^2$, $y^2=nx$, $y^2=mx$.

988. $xy=a^2$, $xy=b^2$, $y^2=mx$, $x^2=ny$ $\quad a>b$, $m>n$.

989. Naći površinu ograničenu elipsama $\frac{x^2}{\mathrm{ch}^2 u}+\frac{y^2}{\mathrm{sh}^2 u}=c^2$ $(u=u_1,\ u_2)$ i hiperbolama $\frac{x^2}{\cos^2 v}-\frac{y^2}{\sin^2 v}=c^2$ $(v=v_1,\ v_2)$ $(0<u_1<u_2;\ 0<v_1<v_2;\ x>0,\ y>0)$.

990. Naći površinu preseka površi $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$ i ravni $x+y+z=0$

§ 3. Izračunavanje zapremine primenom dvojnog integrala

Zapremina cilindra, koji odozgo ograničava neprekidna površ definisana jednačinom $z=z(x,\ y)$, odozdo ravan $z=0$, a sa strane prava cilindrična površ, koja u ravni xOy iseca neku oblast D, data je formulom

$$V=\iint_D z(x,y)\,dx\,dy$$

Naći zapreminu tela ograničenog sledećim površima:

991. $z=1+x+y$, $x+y=1$, $x=0$ $y=0$.

992. Koordinatnim ravnima i ravnima

$$x=2,\ y=3,\ x+y+z=4.$$

993. $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=4$, $y=4$ i parabolom $z=x^2+y^2+1$.

994. Ravni $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ i koordinatnim ravnima.

995. Ravnima $y=0$, $z=0$, $3x+y=6$, $3x+2y=12$ i $x+y+z=6$.

996. Rotacionim paraboloidom $z=x^2+y^2$, koordinatnim ravnima i ravni $x+y=1$.

997. Rotacionim paraboloidom $z=x^2+y^2$ i ravnima $z=0$, $y=1$, $y=2x$, $y=6-x$.

998. Ravnima $z=0$, $y+z=2$ i cilindrom $y=x^2$.

999. Cilindrima $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ i ravnima $z=0$, $x+z=6$.

1000. Koordinatnim ravnima, ravni $2x-3y-12=0$ i cilindrom $z=\dfrac{1}{2}y^2$.

1001. $z=\cos x\cos y$, $z=0$, $|x+y|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $|x-y|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$

1002. Površima $x^2+y^2=2x$, $xy=z$; $z>0$.

Prelazeći na polarne koordinate naći zapreminu tela, ograničenog sledećim površima:

1003. Paraboloidom $z=3-x^2-y^2$ i ravni $z=0$.

1004. Sferom $x^2+y^2+z^2=R^2$ i cilindrom $x^2+y^2=Rx$; $x^2+y^2\leqslant Rx$.

1005. Paraboloidom $z=x^2+y^2$ i cilindrima $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$ i ravni $z=0$.

1006. Paraboloidom $x^2+y^2-az=0$, cilindrom $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ i ravni $z=0$ $(a>0)$.

1007. Ravnima $z=ax$, $z=0$ i cilindrom $x^2+y^2=2ax$.

1008. Paraboloidom $2az=x^2+y^2$ i sferom $x^2+y^2+z^2=3a^2$; $x^2+y^2\leqslant 2az$.

1009. Elipsoidom $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

1010. Ravni $z=0$, paraboličkim cilindrom $y^2=2px$, ravni $x=a$ i površi $z=xy^2$.

1011. Prizmom čija je osnovica trougao sa temenima $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$ a ivice paralelne z-osi i površi $z=x^2+y+1$ za $z>0$.

1012. Cilindrom $x^2+y^2-2x=0$ i površi $z=x^2y$, $z>0$.

1013. Eliptičkim cilindrom $4y^2+z^2=4$, koordinatnim ravnima i ravni $x+y+z=5$.

1014. Zajedničkog dela cilindra $x^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=R^2$.

1015. Paraboloidom $z=x^2+y^2$ i ravni $z=x+y$.

1016. $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$.

1017. $x^2(a-y)^2+y^2z^2=y^2(a-y)^2 \quad (a>0)$, $z=0$.

1018. $z^2=a^2(x^2+y^2)$, $x^2+y^2-bx=b\sqrt{x^2+y^2}$, $a, b>0$, $z\geqslant 0$

1019. $y^2=x$, $y^2=4x$, $z=0$, $x+z=4$, $y>0$.

1020. $\left(\dfrac{x-a}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$, $z^2=x$.

1021. Data je kriva $x=a\cos^2 u$, $y=a\sin u\cos u$, $z=a\sin u$ gde je $a>0$.

1° Pokazati da se ova kriva dobija kao presek sfere i cilindra čija je generatrisa paralelna z-osi i odrediti jednačinu tih površi.

2° Odrediti zapreminu ograničenu tom sferom, cilindrom i ravni $z=0$; $z\geqslant 0$

Naći zapreminu tela ograničenu površima:

1022. $z=0$, $x+y=\dfrac{5}{2}$, $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln\dfrac{x}{y}$.

1023. $x^2+y^2+z^2=3a^2$, $x^2+y^2=2az \quad (z\geqslant 0)$.

1024. $x^2+y^2=2x^2$, $x^2+y^2=2y$, $z=x+2y$, $z=0$.

1025. $z=3+x^2+2y^2$, $y=2x^2-1$, $y=0$, $z=0$.

1026. $x^2+y^2=2az$, $(x^2+y^2)^2+2a^2xy=0$, $z=0$.

1027. Konusom $\dfrac{x^2+y^2}{2}=(z-\sqrt{2})^2$ i elipsoidom $\dfrac{x^2+y^2}{6}+\dfrac{z^2}{2}=1$

1028. $z=\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\right)^2$; $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=x$, $z=0$.

1029. $x^2+y^2+z^2=2$; $x^2+y^2+z^2=6$; $x^2+z^2=x$ (manjeg dela).

1030. $x^2+y^2=cx$; $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$; $z=0$.

1031. $z^2=2xy$; $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$; $z=0$; $x>0$; $y>0$.

1032. $x^2+y^2+z^2=a^2$; $x^2+y^2\geqslant|ax|$.

1033. $z(x+y)=ax+by$; $z=0$; $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$; $x>0$; $y>0$; $a>0$; $b>0$.

1034. Dokazati da je zapremina tela ograničenog površima: $z=0$;

$x^2+y^2=c^2$, $z[\varphi(x)+\varphi(y)]=a\varphi(x)+b\varphi(y)$, gde je $\varphi(x)$ proizvoljna pozitivna integralna funkcija $a>0$ i $b>0$ jednaka $\frac{1}{2}\pi c^2 (a+b)$.

Pri rešavanju sledećih zadataka korisno je uvesti generalisane polarne koordinate po formulama.

$$x = ar\cos^{\alpha}\varphi_1;\ y = br\sin^{\alpha}\varphi_2 \Rightarrow J = ab\,\alpha\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi.$$

Naći zapreminu ograničenu sledećim površima:

1035. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=0.$

1036. $cz=xy,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0,\ x>0,\ y>0.$

1037. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c}=1,\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1,\ z=0,\ (a, b, c<0).$

1038. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1.$

1039. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^k+\frac{z^2}{c^2}=1;\ z>0,\ k>0.$

1040. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2};\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h};\ >0.$

1041. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\quad \frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\ z=0.$

1042. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=1.$

1043. $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1,\quad x=0,\ y=0,\ z=0,\quad (n>0).$

1044. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n+\frac{z^{2n}}{c^{2n}}=\frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2}\quad (n>1;\ a, b, c, h>0).$

1045. $z=x\sqrt{x}+y\sqrt{y},\ x+y=0;\ x>0;\ y>0;\ z>0.$

1046. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a}\quad y>0;\ z>0.$

1047. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1.$

1048. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^4+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1;\ x>0;\ y>0;\ z>0.$

1049. Dati su elipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ i paraboloid $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x-\lambda}{\mu-\lambda}\cdot\frac{a^2-\mu^2}{a^2}$

gde je $-a<\lambda<\mu<a$. Pokazati da paraboloid deli zapreminu elipsoida na dva dela. Odrediti λ tako da one budu jednake.

Naći zapreminu ograničenu površima:

1050. $z=ye^{-\frac{xy}{a^2}}$; $xy=a^2$; $xy=2a^2$; $y=m$; $y=n$; $z=0$.

1051. $z^2=xy$, $xy=a^2$, $xy=4a^2$, $x=2y$, $x=3y$, $z=0$.

1052. $z=xy$, $xy=1$, $xy=4$, $y^2=x$, $y^2=3x$, $z=0$.

1053. $z=x^2y$, $y^2=a^2-2ax$, $y^2=m^2+mx$, $y=0$, $z=0$.

§ 4. Izračunavanje površine površi

Ako je površ zadata jednačinom $z=z(x, y)$ onda je veličina površine data formulom

$$P=\iint\limits_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

gde je $p=z'_x$, $q=z'_y$, a D projekcija odgovarajućeg dela površi na ravan $z=0$.
Ako je površ zadata parametarskim jednačinama $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, gde $(u, v)\in D$, a D je neka zatvorena oblast i sem toga su funkcije x, y, z neprekidne i diferencijabilne u oblasti D onda je površina površi data formulom

$$P=\iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

pri čemu je

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v}.$$

1054. Izračunati površinu dela cilindra $z^2=4x$ koji pripada prvom oktantu, a koji isecaju cilindar $y^2=4x$ i ravan $x=1$.

1055. Izračunati površinu dela paraboloida $2z=x^2+y^2$ koji iseca cilindar $x^2+y^2=1$.

1056. Izračunati površinu dela sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$ koji iseca cilindar

$x^2+y^2=b^2 \quad (b<a)$

1057. Naći površinu onog dela sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$ koji se projektuje na ravan $z=0$ van kruga $x^2+y^2-Rx=0$, $(x\geqslant 0)$, $(y\geqslant 0)$.

1058. Naći površinu dela paraboloida $z^2=2\,xy$ $(z>0)$ koji je ograničen ravnima $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$.

1059. Izračunati površinu dela konusa $z^2=x^2+y^2$, isečenog cilindrom $x^2+y^2=2\,x$.

1060. Naći površinu dela sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$ isečenog cilindrom

$(x^2+y^2)^2=a^2\,(x^2-y^2)$.

1061. Date su površi

$$(p_1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h},$$

$$(p_2)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\qquad (z\geqslant 0)$$

$$(p_3)\qquad z=0.$$

1° Izračunati zapreminu tela ograničenog ovim površima.

2° Za specijalan slučaj $a=b$ izračunati veličinu dela površi (P_1) ograničenog površima (P_2) i (P_3).

1062. Izračunati veličinu onog dela površi $z^2=x^2+2\,y^2$ koji iseca cilindar $(x^2+y^2)^2=2\,c^2\,xy$ za $x\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

1063. Naći površinu obrtne površi koja nastaje obrtanjem krive $z=f(x)$ u ravni $z=0$ oko Oz ose.

1064. Izračunati površinu obrtnog paraboloida $y^2+z^2=2\,px$ između vrha i ravni $x=\frac{p}{2}$.

1065. Naći kvadraturu zatvorene površi koju obrazuju kružni cilindri

$$x^2+y^2=a^2,\quad x^2+z^2=a^2.$$

1066. Naći površinu onog dela površi $z=xy$ koji iseca cilindar $x^2+y^2=R^2$.

1067. Izračunati površinu onog dela površi $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2\,z$ koji iseca eliptični cilindar $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1068. Izračunati površinu dela površi $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2\,(x^2-y^2)$ koji se projektuje u unutrašnjost krive $(x^2+y^2)^2=a^2\,(x^2-y^2)$.

1069. Primenom dvojnog integrala izračunati zapreminu obrtnog elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.

1070. Izračunati površinu sfernog trougla.

1071. 1° Pokazati da za komplanaciju površi $x=\varphi(u)\cos\theta$, $y=\varphi(u)\sin\theta$, $z=z(u)$ $(\alpha\leqslant u\leqslant\beta,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ gde su $\varphi(u)\,\psi(u)$ diferencijalne funkcije važi obrazac

$$P=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}|\varphi(u)|\sqrt{\varphi'^2(u)+\psi'^2(u)}\,du.$$

2° Izračunati veličinu površi:

$$x=e^{-u}\cos\theta,\ y=e^{-u}\sin\theta,\ z=\int_0^u\sqrt{1-e^{-2t}}\,dt.$$

1072. Izračunati površinu tela ograničenog sferom $x^2+y^2+z^2=3a^2$ i paraboloidom $x^2+y^2=2az$, $(z\geqslant 0)$.

1073. Naći površinu tela koje ograničavaju površi

$$x^2+y^2=2az,$$
$$(x^2+y^2)^2+2axy=0,$$
$$z=0.$$

1074. Izračunati površine P_1 i P_2 površi koje iseca konus $\frac{x^2+y^2}{2}=(z-\sqrt{2})^2$ na elipsoidu $\frac{x^2+y^2}{6}+\frac{z^2}{2}=1$.

1075. Izračunati površinu manjeg tela ograničenog površima

$$x^2+y^2+z^2=2,$$
$$x^2+y^2+z^2=6,$$
$$y^2+z^2=x.$$

1076. Naći površinu dela površi $z=\frac{x+y}{x^2+y^2}$ koji isecaju površi $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ i pripada prvom oktantu.

1077. Naći površinu dela konusa $y^2+z^2=x^2$ koji se nalazi unutar cilindra $x^2+y^2=a^2$.

1078. Naći površinu dela površi $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ koji se projektuje na deo ravni $z=0$ ograničen Arhimedovom spiralom $r=\varphi$ i osom Ox.

1079. Izračunati površinu dela površi $x^2+y^2=z^2$ koji iseca cilindar

$(x^2+y^2)^2=2xy$, $z\geqslant 0$.

1080. Odrediti površinu ograničenu površima

$$(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2+z^2=a^2,\quad x>0,\quad y>0,\quad z>0.$$

Naći površinu koju ograničavaju površi:

1081. $(x+y)^2+z=1,\quad x>0,\quad y>0,\quad z>0.$

1082. $(x^2+y^2)\,z=x+y\quad$ za $\quad 1<x^2+y^2<4,\quad x>0,\quad y>0.$

1083. $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=2z$, unutar cilindra

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$$

1084. Naći veličinu površi

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2).$$

1085. Naći površinu prostornog ugla pod kojim se iz koordinatnog početka vidi pravougaonik $0<y<b$, $0<z<c$, $x=a>0$. Drugim rečima, naći deo površine sfere $x^2+y^2+z^2=1$ na koju se iz koordinatnog početka projektuju tačke datog pravougaonika.

1086. Naći površinu i zapreminu tela ograničenog površima

$$x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2,\quad x+y+z=2a\quad (a>0).$$

§ 5. Primena dvojnog integrala u mehanici

1° Težište. Ako su x_0 i y_0 koordinate težišta ravne ploče S, koja leži u ravni xOy, a $\varrho=\varrho(x,y)$ gustina ploče onda je

$$x_0=\frac{1}{m}\iint_S \varrho\, x\, dx\, dy,\quad y_0=\frac{1}{m}\iint_S \varrho\, y\, dx\, dy$$

gde je $m=\iint_S \varrho\, dx\, dy$ masa ploče. Integrali $\iint_S \varrho x\, dx\, dy$ i $\iint_S \varrho y\, dx\, dy$ nazivaju se *statični momenti inercije* u odnosu na ose Ox i Oy.

2° Momenti inercije. Moment inercije ravne ploče S u odnosu na proizvoljnu osu, koja leži u istoj ravni, naziva se integral $I=\iint_S \varrho d^2\, dx\, dy$ gde je d rastojanje promenljive tačke (x,y) od ose a ϱ gustina ploče. Specijalno momenti inercije u odnosu na ose Ox i Oy dati su respektivno formulama

$$I_x=\iint_S \varrho y^2\, dx\, dy\quad \text{i}\quad I_y=\iint_S \varrho x^2\, dx\, dy$$

Za $\varrho=1$ dobijaju se *geometrijski momenti inercije* ravne ploče.

Polarni moment inercije ploče S u odnosu na neku tačku naziva se integral $\iint\limits_S \varrho d^2\, dx\, dy$, gde je d rastojanje tačke $(x, y) \in S$ od date tačke. Specijalno polarni moment u odnosu na koordinatni početak je $I = \iint\limits_S \varrho\, (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$

3° Ako je u pitanju cilindrično telo čije su izvodnice paralelne osi Oz, a čija je osnovica neka oblast D u ravni xOy, i sem toga ga odozgo ograničava površ $z = z(x, y)$, onda se koordinate njegovog težišta mogu odrediti po formulama

$$x_0 = \frac{\iint\limits_D zx\, dx\, dy}{\iint\limits_D z\, dx\, dy}; \quad y_0 = \frac{\iint\limits_D yz\, dx\, dy}{\iint\limits_D z\, dx\, dy}; \quad z_0 = \frac{\iint\limits_D z^2\, dx\, dy}{2\iint\limits_D z\, dx\, dy}.$$

1087. Naći masu kružnog prstena ako je u svakoj njegovoj tački površinska gustina obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja te tačke od centra prstena.

1088. Naći masu ploče, koja ima oblik elipse ako je površinska gustina u svakoj tački ploče proporcionalna rastojanju d od manje ose elipse a za $d = 1$ iznosi λ.

1089. Odrediti težište ravnokrako pravouglog trougla, ako je u svakoj njegovoj tački površinska gustina proporcionalna njenom rastojanju od hipotenuze.

1090. Naći moment inercije trougla iz prethodnog zadatka u odnosu na njegovu hipotenuzu.

1091. Ploča je ograničena parabolom $y^2 = 2px$ i njenom sečicom koja prolazi kroz žižu parabole i normalna je na osu parabole. Naći masu ploče, ako je u svakoj njenoj tački površinska gustina obrnuto proporcionalna rastojanju tačke od direktrise parabole.

U sledećim zadacima odrediti statičke momente homogenih ravni figura (gustina $\varrho = 1$):

1092. Pravougaonika sa stranicama a i b u odnosu na stranicu a.

1093. Polukruga u odnosu na prečnik.

1094. Kruga u odnosu na tangentu.

1095. Pravilnog šestougaonika u odnosu na stranicu.

1096. Dokazati da statički moment trougla čija je osnova a, u odnosu na tu osnovu, zavisi samo od visine trougla.

1097. Naći masu kvadratne ploče, u čijoj je svakoj tački površinska gustina proporcionalna zbiru njenih rastojanja od dijagonala.

1098. Izračunati količinu elektriciteta q raspoređenog na površini kruga $x^2+y^2=ax$, ako je površinska gustina elektriciteta $\mu=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Naći momente inercije sledećih homogenih figura:

1099. Kruga poluprečnika a u odnosu na tangentu.

1100. Elipse u odnosu na centar.

1101. Pravougaonika sa stranicama a i b u odnosu na presek dijagonala.

1102. Ravnokrakog trougla čija je osnovica a i visina h u odnosu na temena.

1103. Kruga poluprečnika a u odnosu na tačke koje leže na njegovoj periferiji.

Naći težište sledećih homogenih figura:

1104. Polukruga poluprečnika a.

1105. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \quad y \geqslant 0.$

1106. $x=a(t-\sin t); \quad y=a(1-\cos t); \quad 0<t<2\pi; \quad y=0.$

1107. $y^2=x^2-x^4, \quad (x>0).$ **1108.** $x^4+y^4=x^2 y$; (desne petlje).

1109. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}; \; x=0; \; y=0.$

1110. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^4=\dfrac{xy}{ab}$; (desne petlje).

1111. Figure ograničene krivama $y=2x^3$ i $y^2=2x$.

1112. Figure ograničene krivom $y=\sin x$ i pravama $y=0, \; x=\dfrac{\pi}{4}\cdot$

1113. Figure ograničene krivama $x^2+y^2=13; \quad xy=6, \; x>0.$

1114. Kružnog isečka kome odgovara centralni ugao α.

1115. Kružnog odsečka kome odgovara centralni ugao α.

1116. Naći težište homogene zarubljene prizme, ograničene koordinatnim ravnima $x=1; \quad y=1; \quad x+y+z=4$.

1117. Naći težište homogene polulopte $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2; \quad z \geqslant 0.$

1118. Naći težište tetraedra koji je ograničen ravnima

$$x+2y+z=1; \quad x=0; \quad y=0; \quad z=0.$$

1119. Naći težište dela kruga ograničenog sferom $x^2+y^2+z^2=R^2$ i ravnima $x=a, \; y=b.$

1120. Odrediti silu pritiska vode na unutrašnju bočnu stranu $x>0$ cilindričnog suda $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ ako je nivo vode $z=h$.

1121. Sfera poluprečnika a potapa se u tečnost konstantne gustine ϱ, na dubinu h (računato od centra sfere) gde je $h>a$. Naći silu pritiska tečnosti na donji i gornji deo površi sfere.

1122. Pravi kružni cilindar, čiji je poluprečnik osnove a i visina h, potapa se ceo u tečnost gustine ϱ, tako da se njegov centar nalazi na dubini h ispod površine vode, a osa cilindra zaklapa sa vertikalom ugao α. Odrediti silu pritiska tečnosti na donju i gornju osnovicu cilindra.

1123. Odrediti silu kojom homogeni cilindar $x^2+y^2\leqslant a^2$, $0\leqslant z\leqslant h$ privlači materijalnu tačku $P(0, 0, b)$ ako je masa cilindra M a masa tačke m.

1124. Dokazati da je moment inercije kružnog prstena u odnosu na centar dva puta veći od momenta inercije u odnosu na proizvoljnu osu, koja prolazi kroz centar prstena i leži u njegovoj ravni.

1125. Dokazati da je zbir momenata inercije ravne figure u odnosu na proizvoljni par uzajamno normalnih osa, koje leže u istoj ravni sa tom figurom i prolaze kroz nepokretnu tačku O, konstantna veličina.

1126. Dokazati da moment inercije ravni figure u odnosu na bilo koju osu iznosi Md^2+I_c gde je M masa raspoređena na figuri, d rastojanje od ose do težišta figure, a I_c moment inercije u odnosu na osu koja je paralelna datoj osi i prolazi kroz težište figure (Steinerova teorema).

1127. Dokazati da je zapremina tela, koje se dobija rotacijom figure F oko neke ose koja ne seče F, a leži u istoj ravni, jednaka površini S te figure pomnožene obimom kruga koji opisuje težište figure F. (Papus-Gouldinova teorema).

§ 6. Trojni i n-tostruki integrali

1° Izračunavanje trojnog integrala. Ako je funkcija $f(x,y,z)$ neprekidna u oblasti V određenoj nejednakostima

$$x_1\leqslant x\leqslant x_2;\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x);\quad z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)$$

gde su $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ neprekidne funkcije, onda trojni integral funkcije $f(x,y,z)$ uzet po oblasti V, može biti izračunat po formuli

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{x_1}^{x_2}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz.$$

2° Ako se pravilno zatvorena oblast V prostora $Oxyz$ uzajamno jednoznačno preslikava na oblast V' prostora $O'uvw$ pomoću neprekidnih diferencijalnih funkcija

$$x=x(u,v,w),\ y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w)$$

pri čemu je

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0 \quad \text{za } (u, v, w) \in v'$$

onda važi formula

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)]\,|J|\,du\,dv\,dw.$$

Specijalni slučajevi su: 1) cilindrični sistem koordinata φ, r, h gde je

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h$$

a

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, r, h)} = r$$

i 2) sferni sistem koordinata φ, θ, r gde je

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta$$

a

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \theta, r)} = r^2\sin\theta.$$

3° Srednja vrednost μ funkcije $f(x, y, z)$ u oblasti V data je formulom

$$\mu = \frac{1}{V}\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

4° Pojam nepravog trojnog integrala prekidne funkcije potpuno je analogan tom istom pojmu u slučaju dvojnog integrala.

5° Ako je funkcija $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ neprekidna u nekoj ograničenoj oblasti Ω, definisanom nejednakostima

$$x_1' < x_1 < x_1'',$$

$$x_2'(x_1) < x_2 < x_2''(x_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n'(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) < x_n < x_n''(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$$

gde su x_1' i x_1'' brojevi a $x_2'(x_1)$, $x_2''(x_1), \ldots, x_n'(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $x_n''(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ neprekidne funkcije, onda odgovarajući višestruki integral može biti izračunat po formuli

$$\iint_\Omega \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{x_1'}^{x_1''} dx_1 \int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} dx_2 \ldots \int_{x_n'(x_1, \ldots x_{n-1})}^{x_n''(x_1, \ldots x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n.$$

Zamena promenljivih kod višestrukog integrala može se izvesti po analogiji zamene promenljivih kod dvojnog i trojnog integrala.

Izračunati sledeće trojne integrale

1128. $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz.$

1129. $\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \int_0^2 (4+z)\,dz$ i konstruisati oblast integracije.

1130. $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y xyz\,dz.$ **1131.** $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3y^2z\,dz.$

1132. $\iiint_V (1-x)\,yz\,dx\,dy\,dz$ ako je oblast V ograničena ravnima $x=0,$ $z=0,\quad y=0,\quad z=1-x-y.$

1133. $\iiint_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ ako je oblast V ograničena ravnima $x=0,$ $x=1,\quad y=0,\quad y=1,\quad z=0,\quad z=1.$

1134. $\int_0^{e-1} dx \int_0^{e-x-1} dy \int_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}\,dz.$

1135. $\iiint_{(V)} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ ako je oblast V ograničena površi $3(x^2+y^2)+z^2=3a^2.$

1136. $\iiint y\,dx\,dy\,dz$ ako je oblast V ograničena površima

$y=\sqrt{x^2+z^2},\quad y=h,\quad h>0.$

1137. $\iiint_V y\cos(z+x)\,dx\,dy\,dz$ gde je oblast V ograničena cilindrom $y=\sqrt{x}$ i ravnima $y=0,\quad z=0,\quad x+z=\frac{\pi}{2}.$

1138. $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz$ gde je oblast V ograničena elipsoidom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

1139. $\iiint_V \left[(x+y+z)^2-\frac{9}{5}a^2\right] dx\,dy\,dz$ gde je oblast V definisana nejednakostima $x^2+y^2-2az<0,\quad x^2+y^2+z^2-3a^2<0,\quad a>0.$

1140. $J=\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(z+a)^2-x^2-y^2}$ gde je oblast V ograničena površima

$z=\frac{1}{2a}(x^2+y^2), \quad z=b, \quad a>0, \quad b>0.$

Naći $\lim\limits_{b\to\infty} \frac{J}{b}$.

1141. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$ gde je oblast V ograničena površima $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

1142. $\iiint \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ gde je oblast V ograničena površima

$$x^2+y^2=z^2, \quad z=1.$$

1143. $\iiint\limits_V \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)\,dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2+1}$ ako je oblast V unutrašnjost sfere $x^2+y^2+z^2=1$.

1144. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ ako je oblast V ograničena površima

$y^2+z^2=x^2, \quad x^2+y^2+z^2=R^2, \quad x\geqslant 0$ (zajednički deo).

1145. $\iiint\limits_V \frac{xz\,dx\,dy\,dz}{x^2+y^2-R^2}, \quad z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2), \quad z=h, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0.$

U sledećim zadacima odrediti granice integracije u Dekartovim, cilindričnim i sferičnim koordinatama.

1146. $x\geqslant 0, \ y\geqslant 0, \ z\geqslant 0; \quad x+y\leqslant a, \ z\leqslant h.$

1147. $x\geqslant 0, \ y\geqslant 0, \ z\geqslant 0; \quad x+y+z\leqslant a.$

1148. $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2; \quad x^2+y^2\leqslant z^2\operatorname{tg}^2 a.$

1149. $x^2+y^2\leqslant z^2; \quad x^2+z^2\leqslant a^2; \quad z\geqslant 0.$

U sledećim zadacima na različite načine napisati granice integracije:

1150. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{x+y} f(x, y, z)\,dz.$

1151. $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z)\,dz.$

1152. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)\,dz.$

Prelaskom na sferne koordinate izračunati sledeće trojne integrale:

1153. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$ gde je oblast integracije ograničena: 1° sferom $x^2+y^2+z^2=1$; 2° cilindrom $x^2+y^2\leqslant 1,\ -1\leqslant z\leqslant 1$.

1154. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$ gde je oblast V ograničena sferom $x^2+y^2+z^2=z$.

1155. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz$.

1156. Prelazeći na cilindrične koordinate izračunati integral

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

ako je oblast V ograničena površima $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

1157. Uvodeći generalisane sferne koordinate izračunati integral

$$\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz,$$

gde je V unutrašnjost elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

1158. Odrediti srednju vrednost funkcije

$$f(x,y,z)=e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$$

u unutrašnjosti elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

1159. Naći srednju vrednost funkcije $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ u oblasti $x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$.

1160. Izračunati integral

$$\iiint\limits_D e^{xyz}\,x^2 y\,dx\,dy\,dz$$

$x>0,\ y>1,\ z\geqslant 1,\ xyz\leqslant 1$, uvodeći nove promenljive

$$x=u,\ y=\frac{u+v}{u},\quad z=\frac{u+v+w}{u+v}.$$

Prelazeći na cilindrične ili na sferne koordinate izračunati sledeće integrale:

1161. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^a dz.$ **1162.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\, dz.$

1163. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz.$

1164. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$ gde je oblast V definisana nejednakostima

$$z \geqslant 0, \quad a^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2.$$

1165. Neka je $f(u)$ diferencijabilna funkcija za svako $u>0$ i neka je

$$\iiint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant t^2} f\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\, dy dz = 0.$$

za svako $t>0$. Dokazati da je $f(u)=0$ za svako $u>0$. Da li se uslovi funkcije $f(u)$ mogu oslabiti pa da tvrđenje ostane i dalje tačno?

Izračunati sledeće neprave integrale:

1166. $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}}.$ **1167.** $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{xy\, dx\, dy\, dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}.$

1168. $\int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2-z^2}\, dx\, dy\, dz.$

Ispitati konvergenciju sledećih nepravih integrala

1169. $\iiint\limits_V e^{x+y+z}\, dx\, dy\, dz,$ 1° za $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0$; 2° za $x \leqslant 0,\ y \leqslant 0,\ z \leqslant 0$.

1170. $\iiint\limits_V \frac{dx\, dy\, dz}{(xyz)^\alpha}$; po sferi poluprečnika 1 sa centrom u koordinatnom početku.

Ispitati da li konvergiraju sledeći integrali ako je oblast integracije definisana nejednačinom $x^2+y^2+z^2 < R^2$.

1171. $\iiint\limits_V \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\, \ln \sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}.$

1172. $\iiint\limits_V \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz.$ **1173.** $\iiint\limits_V \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dx\,dy\,dz.$

1174. Izračunati integral $\iiint\limits_V \ln(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ gde je V sfera poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku.

1175. Ispitati konvergenciju integrala

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\,dx\,dy\,dz.$$

gde je $0<m\leqslant|\varphi(x, y, z)|\leqslant M.$

Izračunati integrale:

1176. $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{x^p\,y^q\,z^r}.$

1177. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz.$

Izračunati sledeće integrale:

1178. $\iint\cdots\int dx_1\,dx_2\ldots dx_n$, ako je $x_k>0$

$$(k=1, 2\ldots n) \quad \text{i} \quad x_1+x_2+\cdots x_n\leqslant 1.$$

1179. $\iint\cdots\int x_1\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$ za $x_k>0$ i $x_1+x_2+\cdots x_n<1.$

1180. $\iint\limits_{|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|<a}\cdots\int dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$

1181. $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 (x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$

1182. $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 (x_1\,x_2+x_1\,x_3+\cdots+x_{n-1}\,x_n)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n.$

1183. Dokazati jednakost

$$u_n(a)=a^n\,v_n$$

gde je

$$u_n(a)=\iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2<a}\cdots\int dx_1\,dx_2\cdots dx_n, \quad v_n=u_n(1)$$

Dokazati jednakosti:

1184. $\int\limits_0^x dx \int\limits_0^{x_1} dx_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n = \int\limits_0^x f(t) \cdot \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt \cdot$

1185. $\int\limits_0^x x_1\, dx_1 \int\limits_0^{x_1} x_2\, dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} x_n\, dx_n \int\limits_0^{x_n} f(t)\, dt = \frac{1}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \int\limits_0^x f(t)(x^2-t^2)^n\, dt.$

§ 7. Izračunavanje zapremine primenom trojnog integrala

Zapremina oblasti V izračunava se po formuli

$$V = \iiint\limits_V dx\, dy\, dz$$

Naći zapreminu tela ograničenu površima:

1186. $z = x^2 + y^2, \quad z = 2x^2 + 2y^2, \quad y = x, \quad y = x^2.$

1187. $x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1 - x, \quad z = x + y, \quad z = xy.$

1188. $x^2 + z^2 = a^2, \quad x + y = \pm a, \quad x - y = \pm a.$

1189. $az = a^2 - x^2 - y^2, \quad z = a - x - y \qquad a > 0).$

1190. Cilindrima $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$ i ravnima $x = -1$, $x = 2$.

1191. $z = 0, \quad x^2 + y^2 = 4az, \quad x^2 + y^2 = 2cx.$

1192. Cilindrima $z = \ln(x+2)$ i $z = \ln(6-x)$ i ravnima $x = 0$, $x + y = 0$ $x - y = 2$.

1193. Paraboloidom $(x-1)^2 + y^2 = z$ i ravni $2x + z = 2$.

Prelazeći na cilindrične koordinate izračunati zapremine ograničene površima:

1194. Paraboloidom $z = 6 - x^2 - y^2$ i konusom $z^2 = x^2 + y^2$ $(z \geqslant 0)$.

1195. Sferom $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i paraboloidom $x^2 + y^2 = 3z$.

1196. $(x^2 + y^2)^{3/2} = z, \quad z = 8, \quad z \geqslant 0.$

Koristeći generalisane cilindrične koordinate izračunati zapreminu ograničenu površima:

1197. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^4} = 1.$ **1198.** $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^2}{c^4} = 1.$

Izračunati zapremine tela ograničene sledećim površima:

1199. Sferom $x^2+y^2+z^2=R^2$ i paraboloidom $x^2+y^2=R(R-2z)$; $(z \geqslant 0)$.

1200. Paraboloidom $z=x^2+y^2$ i konusom $z^2=xy$.

1201. $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $x^2+y^2 \geqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant (x^2+y^2)^3$.

1202. Sferom $x^2+y^2+z^2=4Rz-3R^2$ i konusom $z^2=4(x^2+y^2)$.

(Deo sfere u unutrašnjosti konusa).

1203. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$.

Prelazeći na sferne koordinate izračunati zapremine ograničene površima:

1204. $x^2+y^2+z^2=2az$; $x^2+y^2 \leqslant z^2$.

1205. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$; $z=0$.

1206. Zatvorenom površi $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$.

1207. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$. **1208.** $((x^2+y^2-z^2)^3=a^3z^4$.

1209. $(x^2+y^2+z^2)^3=\dfrac{a^6z^2}{x^2+y^2}$. **1210.** $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2y^2z^2$.

1211. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3(x^3+y^3+z^3)$; $x>0$; $y>0$; $z>0$.

1212. $(x^2+y^2+z^2)^5=(a^3x^2+b^3y^2+c^3z^2)^2$.

1213. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\,e^{-\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}$. **1214.** $(x^2+y^2)^2+z^4=a^3(x-y)$.

1215. Naći geometrijsko mesto S ortogonalnih projekcija centra elipsoida

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ na njegove tangentne ravni.

Za slučaj $a=b=c\sqrt{2}$ izračunati zapreminu tela koje ograničava površ S.

Koristeći generalisane sferne koordinate naći zapremine ograničene površima:

1216. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x}{h}$ $h>0$. **1217.** $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=x$.

1218. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=xyz$. **1219.** $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$.

1220. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}+\alpha^2\right)^2=4\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right);\quad \alpha^2<1.$

1221. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{z}{h}\,e^{\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}.$

U sledećim zadacima zgodno je koristiti generalisane polarne koordinate uvedene formulama

$$x=ar\cos^{\alpha}\varphi\sin^{\beta}\theta,\quad y=br\sin^{\alpha}\varphi\sin^{\beta}\theta,\quad z=cr\cos^{\beta}\theta,\quad (a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta\in R),$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}=\alpha\,\beta\,abc\,r^2\cos^{\alpha-1}\cdot\sin^{\alpha-1}\varphi\cdot\sin^{2\beta-1}\theta\cdot\cos^{\beta-1}\theta.$$

Naći zapremine ograničene površima:

1222. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=\dfrac{z}{e}\qquad x>0,\quad y>0,\quad z>0.$

1223. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=\dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k};\quad x>0,\quad y>0,\quad z>0.$

1224. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=\dfrac{x}{h}-\dfrac{y}{k};\quad x>0,\quad y>0,\quad z>0.$

1225. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2+\dfrac{z^2}{c}=\dfrac{x}{h}-\dfrac{y}{k};\quad x>0,\quad y>0,\quad z>0.$

1226. $\dfrac{x^m}{a^m}+\dfrac{y^n}{b^n}+\dfrac{z^p}{c^p}=1.$

1227. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^3=\ln\dfrac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}}{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}};\quad x>0;\quad y>0;\quad z>0.$

1228. $\sqrt[3]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[3]{\dfrac{y}{b}}+\sqrt[3]{\dfrac{z}{c}}=1;\quad x>0;\quad y>0;\quad z>0.$

Podesnom zamenom promenljivih izračunati zapremine ograničene površima:

1229. $x+y+z=a,\quad x+y+z=2a,\quad x+y=z,\quad x+y=2z,\quad y=x,\quad y=3x.$

1230. $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)=1.$

Izračunati zapremine tela ograničenih površima:

1231. $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\,az, \quad x^2+y^2+az=4\,a^2.$

1232. $x^2+z^2=a^2, \quad z^2+x^2=b^2, \quad x^2-y^2-z^2=0 \qquad (a \neq b;\ x>0.$

1233. Naći zapreminu i površinu tela ograničenog površima

$x^2+y^2=az, \quad z=2\,a-\sqrt{x^2+y^2} \qquad (a>0).$

§ 8. Primena trojnog integrala u mehanici

1° Masa tela. Ako telo zauzima oblast V i ako je $\varrho=\varrho\,(x, y, z)$ njegova gustina u tački (x, y, z), onda se *masa* tela izračunava po obrascu

$$m=\iiint_V \varrho\, dx\, dy\, dz.$$

2° Težište tela. *Koordinate težišta* (x_0, y_0, z_0) tela izračunavaju se po formulama

$$x_0=\frac{1}{m}\iiint_V \varrho\, x\, dx\, dy\, dz$$

$$y_0=\frac{1}{m}\iiint_V \varrho\, y\, dx\, dy\, dz$$

$$z_0=\frac{1}{m}\iiint_V \varrho\, z\, dx\, dy\, dz.$$

Ako je telo homogeno onda se uzima da je $\varrho=1$.

3° Momenti inercije. *Momenti inercije tela u odnosu na koordinatne ravni* nazivaju se respektivno integrali

$$I_{xy}=\iiint_V \varrho\, z^2\, dx\, dy\, dz, \quad I_{yz}=\iiint_V \varrho\, x^2\, dx\, dy\, dz, \quad I_{zx}=\iiint_V \varrho\, y^2\, dx\, dy\, dz.$$

Moment inercije tela u odnosu na neku osu l naziva se integral

$$I_l=\iiint_V \varrho\, d^2\, dx\, dy\, dz$$

gde je d rastojanje promenljive tačke (x, y, z) od ose l. U specijalnom slučaju za koordinatne ose Ox, Oy, i Oz respektivno će biti:

$$I_x=I_{xy}+I_{xz}; \quad I_y=I_{yx}+I_{yz}; \quad I_z=I_{zx}+I_{zy}.$$

Moment inercije tela u odnosu na koordinatni početak naziva se integral

$$I_0=\iiint_V \varrho\,(x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Očigledno je

$$I_0=I_{xy}+I_{yz}+I_{zx}$$

4° Potencijal gravitacionog polja. *Newtonov potencijal tela* u tački $P\,(x, y, z)$ naziva se integral

$$u\,(x, y, z)=\iiint_V \varrho\,(\xi, \eta, \zeta)\,\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}$$

gde je V zapremina tela, $\varrho = \varrho(\xi, \eta, \zeta)$ njegova gustina, a

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Projekcije X, Y, Z sile kojom telo privlači materijalnu tačku mase m na koordinatne ose Ox, Oy, Oz iznose respektivno:

$$X = km\frac{\partial u}{\partial x} = km \iiint_V \varrho \frac{\xi - x}{r^3}\, dx\, dy\, dz,$$

$$Y = km\frac{\partial u}{\partial y} = m \iiint_V \varrho \frac{\eta - y}{r^3}\, dx\, dy\, dz,$$

$$Z = km\frac{\partial u}{\partial z} = m \iiint_V \varrho \frac{\zeta - z}{r^3}\, dx\, dy\, dz.$$

gde je k gravitaciona konstanta.

1234. Naći masu tela koje ograničava cilindrična površ $x^2 = 2y$ i ravni $x + z = 1$, $2y + z = 2$, ako je u svakoj njegovoj tački prostorna gustina brojno jednaka ordinati te tačke.

1235. Naći masu koja je u svakoj njenoj tački gustina brojno jednaka zbiru rastojanja te tačke od triju ivica te kocke, koje prolaze kroz jedno dato teme kocke.

1236. Naći masu tela ograničenog ravnima $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ ako je njegova gustina $\varrho = x + y = z$.

Naći masu sledećih tela:

1237. Cilindra poluprečnika R i visine h, ako se gustina raspodele mase menja proporcionalno sa visinom a iznosi 1 na donjem bazisu.

1238. Sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, ako je gustina mase jednaka rastojanju od koordinatnog početka.

1239. Konusa visine h i poluprečnika osnove R, ako je gustina proporcionalna rastojanju od vrha.

1240. Prstena ograničenog krugovima poluprečnika R i r $(R > r)$ ako je gustina rasporeda mase proporcionalna rastojanju od centra.

1241. Pravougaonika sa stranicama a i b, ako je gustina rasporeda mase proporcionalna kvadratu rastojanja od jednog njegovog temena.

1242. Zajedničkog dela sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ i $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rx$, ako je gustina u svakoj tački proporcionalna njenom rastojanju od ravni xOy.

1243. Beskonačne oblasti $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1$, ako se gustina tela menja po zakonu $\varrho = \varrho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, gde je $\varrho_0 > 0$ i $k > 0$.

Naći težište sledećih tela:

1244. Homogenog tela koje je ograničeno paraboloidom $z=3-x^2-y^2$ i ravni $z=0$ $(z \geqslant 0)$.

1245. Ograničenog paraboloidom $z=x^2+y^2$ i ravnima $x+y=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(\varrho=1)$.

1246. Segmenta sfere, ako je u svakoj njegovoj tački gustina proporcionalna rastojanju te tačke od osnove segmenta.

1247. Ograničenog paraboloidom $c(x^2+y^2)=2a^2 z$ i konusom

$$c^2(x+y^2)=a^2 z^2; \qquad (\varrho=1).$$

1248. Dela elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ koji pripada prvom oktantu; $(\varrho=1)$.

1249. Polovine sfere $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ čija je prostorna gustina u svakoj tački brojno jednaka njenom rastojanju od centra sfere.

Naći težište sledećih homogenih tela:

1250. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$. **1251.** $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3 x$.

1252. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$; $z \geqslant 0$.

1253. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.

1254. Naći težište tela ograničenog površima $x^2+y^2=R^2=x^2+y^2=a^2$ $(a<R)$, $\frac{y}{R}+\frac{2z}{H}=1$, $z=0$, i moment inercije u odnosu na njegovu osovinu.

1255. Nehomogeno telo ograničeno je ravnima $x=2$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ i cilindrom $z^2=6x$. Prostorna gustina materije u svakoj njegovoj tački proporcionalna je njenom rastojanju od ravni xOy. Naći moment inercije toga tela u odnosu na osu Oz.

1256. Naći polarni moment inercije (u odnosu na koordinatni početak) homogenog tela, ograničenog konusom $z^2=x^2-y^2$ i sferom $x^2+y^2+z^2=R^2$.

1257. Naći masu cilindra $x^2+y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$ i njegov moment inercije u odnosu na prečnik osnove, ako je gustina u svakoj tački cilindra proporcionalna kvadratu njenog rastojanja od ose cilindra.

Naći moment inercije u odnosu na osu Oz tela ograničenih površima:

258. $h^2(x^2+y^2)=a^2 z^2$; $0<z<h$.

1259 $x+y+z=a\sqrt{2}$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$.

1260. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

1261. Naći moment inercije torusa $x=(a+r\cos\theta)\cos\varphi$, $y=(a+r\cos\theta)\sin\varphi$, $z=r\sin\theta$ u odnosu na njegovu osu rotacije.

1262. Naći moment inercije eliptičnog konusa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{h^2}$, $z=h$ u odnosu na osu Ox.

1263. Izraziti u obliku integrala silu kojom homogena kocka ivice a privlači jedinicu mase, koja se nalazi na rastojanju b od centra jedne strane kocke.

1264. Naći silu kojom jedinicu mase, koja se nalazi u centru osnove cilindra poluprečnika R i visine h, privlači taj cilindar.

1265. Naći silu kojom jedinicu mase privlači cela ravan, ako se ta masa nalazi na rastojanju h od te ravni.

1266. Dokazati da je Newtonova sila uzajamnog dejstva između dve homogene sfere ista, kao kad bi mase sfera bile skoncentrisane u njihovim centrima.

1267. Naći Newtonov potencijal u tački $P(x, y, z)$ homogene sfere $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$ gustine ϱ_0.

1268. Naći Newtonov potencijal u tački $P(x, y, z)$ sfernog sloja $R_1^2\leqslant\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R_2^2$, ako je gustina $\varrho=f(R)$, gde je f data funkcija a

$$R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}.$$

1269. Naći Newtonov potencijal u tački $P(0, 0, z)$ cilindra $\xi^2+\eta^2\leqslant a^2$, $0\leqslant\zeta\leqslant h$ konstantne gustine ϱ_0.

§ 9. Krivolinijski integral

1° Ako je $f(x, y, z)$ definisana i neprekidna funkcija u svim tačkama deo po deo glatke krive $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ (1) ($t_0\leqslant t\leqslant T$), a ds diferencijal luka, onda se krivolinijski integral prve vrste izračunava po formuli

$$\int_C f(x, y, z)\,ds=\int_{t_0}^{T}[x(t),\ y(t),\ z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

Ovaj integral ima osobinu da ne zavisi od orijentacije krive.

2° Ako su funkcije $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ neprekidne u svakoj tački $M(t)$ krive (1), koja se pomera u smeru rašćenja parametra t, onda se krivolinijski integral druge vrste izračunava po formuli

$$\int_C P(x\ y, z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\{P[x(t),\ y(t),\ z(t)]+Q[x(t),\ y(t),\ z(t)]+R[x(t),\ y(t),\ z(t)]\}\,dt.$$

Pri promeni smera integracije duž krive c ovaj integral menja znak.

3° Ako je

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = du$$

gde je $u = u(x, y, z)$ jednoznačna funkcija u oblasti V, ona će nezavisno od krive c koja pripada oblasti V, biti

$$\int_c P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1)$$

gde su (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) respektivno početna i krajnja tačka putanje integracije u specijalnom slučaju, kada je oblast V jednostruko povezana a funkcije P, Q i R imaju neprekidne parcijalne izvode prvog reda, onda je radi toga potrebno i dovoljno, da u oblasti budu ispunjeni sledeći uslovi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

U tom slučaju funkcija u može biti nađena po formuli

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz$$

gde je (x_0, y_0, z_0) neka fiksirana tačka oblasti V.

4° Ako se prosto zatvorena, deo po deo glatka kriva c, koja ograničava konačnu jednostruko povezanu oblast D, obilazi tako da oblast D ostaje s leve strane, a funkcije P, Q i R neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti D i na njenom rubu, onda važi *Greenova formula*

$$\oint_c P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Ova formula važi takođe i za konačnu oblast D, koja je ograničena sa nekoliko prostih kontura, ako se pod njenom konturom c podrazumeva unija svih graničnih kontura, pri čemu se obilazak po konturama izvodi tako da oblast D uvek ostaje s leve strane.

Izračunati sledeće krivolinijske integrale:

1270. $\int_c x\,ds$, ako je c deo prave $y = x$, između tačaka $(0, 0)$ i $(1, 1)$.

1271. $\int_c y^2\,ds$, gde je c gornja polovina kruga $x^2 + y^2 = a^2$ između tačaka $(a, 0)$ i $(-a, 0)$.

1272. $\int_c y\,ds$, po luku parabole $y^2 = 2x$ od tačke $(0, 0)$ do tačke $(4, \sqrt{8})$.

1273. $\int_c \sqrt{2y}\,ds$, gde je c prvi svod cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

1274. $\int\limits_c y e^{-x}\,ds$, gde je c luk krive $x=\ln(1+t^2)$, $y=2\operatorname{arc\,tg} t-t+3$ između tačaka $t=0$ i $t=1$.

1275. $\int\limits_c \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}}$, gde je c odsečak prave $y=\frac{x}{2}-2$ između tačaka $(0, -2)$ i $(4, 0)$.

1276. $\oint\limits_c xy\,ds$, gde je c kontura pravougaonika koji određuju prave $x=0$, $y=0$, $x=4$ i $y=2$.

1277. $\int\limits_c (x+y)\,ds$, ako je c kontura trougla $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

1278. $\int\limits_c \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, ako je c krug $x^2+y^2=ax$.

1279. $\int\limits_c \frac{ds}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, ako je c luk hiperboličke spirale $r\varphi=1$ od $\varphi=\sqrt{3}$ do $\varphi=2\sqrt{2}$.

1280. $\int\limits_c y^2\,ds$, gde je c luk cikloide

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

1281. $\int\limits_c (x^2+y^2)\,ds$, gde je c kriva

$$x=a(\cos t+t\sin t),\qquad y=a(\sin t-t\cos t),\qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

1282. $\int\limits_c x\,ds$, ako je c deo logaritamske spirale $r=ae^{k\varphi}$ $(k>0)$ koji se nalazi unutar kruga $r=a$.

1283. $\int\limits_c xyz\,ds$, gde je c luk krive $x=t$, $y=\frac{\sqrt{8t^3}}{3}$, $z=\frac{t^2}{2}$ od tačke $t=0$ do tačke $t=1$.

1284. $\int\limits_c (x^2+y^2+z^2)\,ds$, gde je c deo zavojnice

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt,\qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

1285. $\int\limits_c x^2\,ds$, gde je c krug $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

1286. Date su površi $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$; pokazati:

1° da se kriva c: $\begin{cases} x^2+z^2=a^2, \\ y^2+z^2=a^2 \end{cases}$

nalazi u dve uzajamno normalne ravni;

2° izračunati krivolinijske integrale

$$\int_{c_1} (x+y+z)\,ds \quad \text{i} \quad \int_{c_2} (x+y+z)\,ds$$

ako su c_1 i c_2 delovi krive c koji leže u tim normalnim ravnima.

Naći dužinu luka prostornih krivih:

1287. $x=3t,\ y=3t^2,\ z=2t^2$ od tačke $O(0, 0, 0)$ do tačke $A(3, 3, 2)$, $(t>0)$.

1288. $x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t,\ z=e^{-t} \quad (0<t<\infty)$.

Izračunati sledeće krivolinijske integrale:

1289. $\int_c (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$, gde je c deo krive $y=1-|1-x|$ između tačaka $x=0$ i $x=2$.

1290. $\int_c \frac{x\,dy-y\,dx}{x+y}$, ako je c kontura trougla koji obrazuje prava $x+y=1$ sa koordinatnim osama.

1291. $\int_c x^3\,dy-y^3\,dx$, po konturi kruga $x^2+y^2=a^2$.

1292. $\int_c x\,dy+\frac{y}{1+x}\,dx$, kada x varira od $x=0$ do $x=4$ duž krive $y=2\sqrt{x}-x$.

1293. $\oint_c (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$, ako je c kriva $|x-1|+|y-1|=1$.

1294. $\int_c xy\left[\left(\frac{x}{2}+y\right)dy-\left(x+\frac{y}{2}\right)dx\right]$, po krugu $x^2+y^2=1$.

1295. $\int_c (x^2+y^2)\,dx$, gde je kriva integracije gornji deo kruga $(x-1)^2+y^2=1$ od tačke $(0, 0)$ do tačke $(2, 0)$.

1296. $\int_c xy\,dx+(x+y)\,dy$ gde je c zatvorena kontura koju obrazuju linije $y=0$, $x=1$ i $y=x^2$.

1297. $\int\limits_c y^2\,dx - x^2\,dy$, između tačaka $A(0, 1)$ i $B(1, 0)$:

1° po pravoj AB; 2° po luku kruga čiji je centar u koordinatnom početku a poluprečnik 1.

1298. $\int\limits_c xy\,dx$, ako je c luk parabole $x=y^2$ od tačke $(1, -1)$ do tačke $(1, 1)$.

1299. $\oint \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$, ako je c kontura kvadrata čija su temena

$$A(1, 0);\quad B(0, 1);\quad C(-1, 0);\quad D(0, -1)$$

1300. $\int\limits_c 6x^2y\,dx + 10xy\,dy$, gde je c luk krive $y=x^3$ od tačke $(1, 1)$ do tačke $(2, 8)$.

1301. $\int\limits_c y\,dx - x\,dy$, ako je c luk cikloide $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ od tačke $(0, 0)$ do tačke $(4\pi, 0)$.

1302. $\int\limits_c x\,dy - y\,dx$, gde je c petlja Descartesovog lista $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

1303. $\int\limits_c \dfrac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$, ako je c luk astroide $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ od tačke $A(a, 0)$ do tačke $B(0, a)$.

1304. $\int\limits_c x^3\,dx + 3zy^2\,dy - x^2y\,dz$, gde je c deo prave od tačke $(3, 2, 1)$ do tačke $(0, 0, 0)$.

1305. $\int\limits_c z\,dx + x\,dy + y\,dz$, ako je c zavojnica $y=a\sin t$, $x=a\cos t$, $z=at$.

1306. $\int\limits_c (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, ako je c trougao koji isecaju koordinatne ravni $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

1307. $\int\limits_c z^2\,dx + x^2\,dy + y^2\,dz$, gde je c kontura sfernog trougla koji isecaju koordinatne ravni na sferi $x^2+y^2+z^2=R^2$, $(x>0)$, $y>0)$.

1308. 1° Na sferi $x^2+y^2+z^2+4x-6y+2z-22=0$ naći tačku M koja je najbliža pravoj zadatoj jednačinama

$$x-2y+2z-17=0 \quad \text{i} \quad 7x+4y+2z-5=0.$$

2° Ako sa P obeležimo ortogonalnu projekciju tačke M na datoj pravoj, izračunati vrednost integrala $\int_c (y+z)\,dx+(x^2+2z)\,dy+(2x+y+z)\,dx$, uzetog duž odsečka MP.

Izračunati sledeće integrale:

1309. $\oint_c y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz$, ako je c Vivijanijeva kriva

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=ax \end{cases} \qquad (z>0,\ a>0).$$

1310. $\oint_c y\,dx+z\,dy+x\,dz$, ako je c kriva $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ x^2=rz \end{cases}$.

1311. $\oint_c (y^2+z^2)\,dx+(z^2+x^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz$ gde je c kriva

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2Rx \\ x^2+y^2=2ax \end{cases} \qquad (0<a<R).$$

1312. $\oint_c (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)dz$, ako je kriva c definisana jednačinama

$$x^2+y^2=a^2$$

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1 \qquad (a>0,\ h>0).$$

1313. $\oint_c (4y^2+2x^2)\,dx+(z+x)\,dy+y\,dz$, ako je kriva c određena jednačinama

$$z=4-x^2-y^2,$$

$$z=y^2.$$

Naći funkciju kada je poznat njen totalni diferencijal:

1314. $(e^y+x)\,dx+(x\,e^y-2y)\,dy$.

1315. $\dfrac{x+ay}{x^2+y^2}\,dx+\dfrac{y-ax}{x^2+y^2}\,dy$.

1316. $(2x\cos y-y^2\sin x)\,dx+(2y\cos x-x^2\sin y)\,dy$.

1317. $\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx+\left(\dfrac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy$.

1318. $(2xy\,e^{x^2y}+y^2\,e^{xy^2}+1)\,dx+(x^2\,e^{x^2y}+2xy\,e^{xy^2}-2y)\,dy$.

1319. $\dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\,\partial y^m}\,dx+\dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\,\partial^{m+1}}\,dy$.

1320. $\dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\,\partial y^{m-n}}\left(\ln\dfrac{1}{R}\right)dx-\dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\,\partial y^{m+2}}\left(\ln\dfrac{1}{R}\right)dy$, gde je $R=\sqrt{x^2+y^2}$.

1321. Odrediti konstante a i b tako, da izraz

$$\frac{(y^2+2\,xy+a\,x^2)\,dx-(x^2+2\,xy+b\,y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$

bude totalni diferencijal i naći odgovarajuću funkciju.

Naći funkciju kada je poznat njen totalni diferencijal:

1322. $(x^2-2\,yz)\,dx+(y^2-2\,xz)\,dy+(z^2-2xy)\,dz.$

1323. $\left(1-\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{z}\right)dx+\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{x}{y^2}\right)dy-\dfrac{xy}{z^2}\,dz.$

1324. $(2\,xyz+\ln y)\,dx+\left(x^2\,y+\dfrac{x}{y}\right)dy+(x^2\,y-2\,z)\,dz.$

1325. $\dfrac{dx-3\,dy}{z}+\dfrac{3\,y-x+z^3}{z^2}\,dz.$

1326. $e^{\frac{y}{z}}\,dx+\left[\dfrac{e^{\frac{y}{z}}\,(x+1)}{z}+z\,e^{yz}\right]dy+\left[-\dfrac{e^{\frac{y}{z}}\,(x+1)}{z^2}+y\,e^{yz}+e^{-z}\right]dz.$

1327. 1° U ravni Oxy date su tačke $A(1,\ 1)$, $B(2,\ 2)$, $C(1,\ 2)$.

Izračunati krivolinijski integral

$$(1)\qquad \int\frac{(ax-y)\,(a+1)\,dx+(x+ay)\,(a-1)\,dy}{xy}$$

prvo po duži AB pa zatim po izlomljenoj liniji ACB.

2° Za koju su vrednost konstante a ova dva integrala jednaka?

3° Odrediti a tako da vrednost integrala (1) u prvom kvadrantu zavisi samo od početne i krajnje tačke integracije.

Vodeći računa da je podintegralni izraz totalni diferencijal izračunati integrale:

1328. $\int\limits_c 2\,xy\,dx+x^2\,dy$ od tačke $(0,\ 0)$ do tačke $(1,\ 1)$ ako je putanja c:

1° $y=x$; 2° $y=x^2$; 3° $x=y^2$; 4° $y=x^3$.

1329. $\int\limits_c x\,dy+y\,dx$, ako je c luk krive $x^5+y^9+x^2\,y^2-6\,y+3\,x=0$ između tačaka $(0,\ 0)$ i $(1,\ 1)$.

1330. $\int\limits_{(1,\,-1)}^{(1,\,1)} (x-y)(dx-dy).$ **1331.** $\int\limits_{\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},\,\pi\right)} \cos y\,dx - x \sin y\,dy.$

1332. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(a,\,b)} e^{x} \cos y\,dx - \sin y\,dy).$

1333. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(a,\,b)} \varphi(x+y)(dx+dy)$, ako je $\varphi(u)$ neprekidna funkcija.

1334. $\int\limits_{(x_1,\,x_2)}^{(y_1,\,y_2)} f(x)\,dx + \varphi(y)\,dy$, gde su f i φ neprekidne funkcije.

1335. $\int\limits_{M_1}^{M_2} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, ako tačke M_1 i M_2 leže respektivno na krugovima

$$x^2+y^2=a^2, \quad x^2+y^2=b^2 \qquad (a<b).$$

Dokazati da su vrednosti sledećih krivolinijskih integrala, uzetih po zatvorenoj konturi, jednake nuli, nezavisno od oblika funkcije u podintegralnom izrazu:

1336. $\int\limits_{c} f(xy)(y\,dx + x\,dy).$

1337. $\int\limits_{c} f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x dy - y dx}{x^2}.$ **1338.** $\int\limits_{c} f(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy).$

Izračunati sledeće krivolinijske integrale:

1339. $\int\limits_{1,\,-1,\,2)}^{(2,1,3)} x\,dx - y^2\,dy + z\,dz.$ **1340.** $\int\limits_{(1,\,2,\,3)}^{(3,\,2,\,1)} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz.$

1341. $\int\limits_{(7,\,2,\,3)}^{(5,3,1)} \frac{zx\,dy + xy\,dz - yz\,dx}{(x-yz)^2}, \qquad \left(z \neq \frac{x}{y}\right).$

1342. $\int\limits_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$

ako su tačke (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) respektivno na sferama x^2+y^2+ $+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $(b>a)$.

1343. Dokazati da je

$$\oint_c f(x^2+y^2+z^2)\;(x\,dx+y\,dy+z\,dz)=0,$$

ako je c zatvorena kriva a $f(u)$ neprekidna funkcija.

Koristeći Greenovu formulu transformisati krivolinijske integrale po zatvorenoj putanji, uzete u pozitivnom smeru, u dvojne:

1344. $\int\limits_c (1-x^2)\,y\,dx+x\,(1+y^2)\,dy.$

1345. $\int\limits_c (e^{xy}+2\,x\cos y)\,dx+(e^{xy}-x^2\sin y)\,dy.$

1346. $\int\limits_c \dfrac{y^2}{1+x^2}\,dx+3\,y\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy}\,dy.$

Koristeći Greenovu formulu izračunati integrale:

1347. $\oint\limits_c 2\,(x^2+y^2)\,dx+(x+y)^2\,dy,$ ako je c kontura trougla čija su temena $A(1,\ 1)$; $B(2,\ 2)$; $C(1,\ 3)$.

1348. $\oint\limits_c xy^2\,dy-x^2\,y\,dx$ ako je c kontura kruga $x^2+y^2=a^2$.

1349. $\oint\limits_c (x+y)\,dx-(x-y)\,dy,$ ako je c elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

1350. $\oint\limits_c (xy+x+y)\,dx+(xy+x-y)\,dy$ ako je c: 1° elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; 2° krug $x^2+y^2=ax.$

1351. $\oint\limits_c \dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2},$ ako je c krug $x^2+y^2-2\,x-2\,y+1=0.$

1352. $\oint\limits_c \dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2},$ ako je c zatvorena kontura.

1353. $\int\limits_c (e^x\sin y-my)\,dx+(e^x\cos y-m)\,dy$ ako je c gornji deo kruga $x^2+y^2=$ $=ax$ od tačke $(a,\ 0)$ do tačke $(0,\ 0)$.

1354. $\int\limits_c [f(y)\,e^x-a\,y]\,dx+[f'(y)\,e^x-a]\,dy,$ gde su $f(y)$ i $f'(y)$ neprekidne funkcije i c proizvoljna putanja koja spaja tačke $A(x_1\ y_1)$ i $B(x_2,\ y_2)$, a ograničava zajedno sa odsečkom AB figuru date površine P.

1355. Dokazati da je integral

$$\int_c (yx^3+e^y)\,dx+(xy^3+xe^y-2\,y)\,dy,$$

jednak nuli, ako je c zatvorena linija simetrična u odnosu na koordinatni početak ili u odnosu na obe koordinatne ose.

1356. Pokazati da integral

$$\int_c (2\,xy-y)\,dx+x^2\,dy,$$

gde je c zatvorena kontura, izražava površinu oblasti koju ograničava ta kontura.

1357. Pokazati da je krivolinijski integral

$$\int_c [x\cos(\vec{n},\vec{x})+y\sin(\vec{n},\vec{x})]\,ds,$$

gde je n spoljna normala zatvorene konture c, uzet u pozitivnom smeru, jednak dvostrukoj vrednosti površine koju ograničava kontura c.

1358. Pokazati, ako je c zatvorena kriva a $\vec{l}$ proizvoljni pravac da je krivolinijski integral $\oint_c \cos(\vec{l},\vec{n})\,ds=0$, gde je n spoljna normala konture c.

1359. Izračunati Gaussov integral

$$u(x,y)=\oint_c \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\,ds$$

gde je $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ intenzitet vektora $\vec{r}$ koji spaja tačku $A(x,y)$ sa promenljivom tačkom $M(\xi,\eta)$ proste zatvorene glatke krive c, $(\vec{r},\vec{u})$ ugao između vektora $\vec{r}$ i spoljne normale $\vec{n}$ krive c u njenoj tački M.

1360. Dokazati da je u *harmonijska funkcija*, tj. funkcija koja zadovoljava jednačinu

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

onda i samo onda, ako je

$$\oint_c \frac{\partial u}{\partial n}\,ds=0,$$

gde je c proizvoljna zatvorena kriva a $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ izvod po spoljnoj normali te krive.

1361. Dokazati da je

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=-\iint_D u\,\Delta u\,dx\,dy+\oint_c u\frac{\partial u}{\partial n}\,ds,$$

gde glatka kontura c ograničava oblast D.

1362. Dokazati *drugu Greenovu formulu* u ravni

$$\iint_D \begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dx\,dy=\oint_c \begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}ds,$$

pri čemu je c glatka kontura koja ograničava konačnu oblast D a $\dfrac{\partial}{\partial u}$ izvod u pravcu spoljne normale krive c.

1363. Koristeći drugu Greenovu formulu dokazati, ako je $u=u(x,y)$ harmonijska funkcija u zatvorenoj konačnoj oblasti, da je onda

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint_c\left(u\,\frac{\ln r}{\partial n}-\ln r\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$$

gde je c granica oblasti D, i spoljna normala konture c, (x, y) neka tačka iz unutrašnjosti oblasti D, a $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ između tačke (x, y) i promenljive tačke (ξ, η) konture c.

1364. Dokazati *teoremu o srednjoj vrednosti* harmonijske funkcije $u(M)=$ $=u(x, y)$

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\oint_c u(\xi,\eta)\,ds$$

gde je c krug sa centrom u tački M.

1365. Dokazati, ako je funkcija $u(x, y)$ harmonijska u ograničenoj i zatvorenoj oblasti i nema konstantnu vrednost u toj oblasti, da onda funkcija u ne može imati najveću i najmanju vrednost u toj oblasti (*princip maksimuma*).

§ 10. Primena krivolinijskog integrala

1° Iz Greenove formule sledi da je površina ravne oblasti D koja je ograničena krivom c data formulom

$$P=\frac{1}{2}\oint_c x\,dy-y\,dx.$$

2° Površina omotača cilindrične površi, čije su izvodnice paralelne z-osi a generatrisa mu je kriva c u ravni xOy, data je formulom

$$P=\int_c z\,ds.$$

3° Ako je $\varrho=\varrho(x,y,z)$ gustina u promenljivoj tački (x, y, z) krive c, onda je *masa krive* data formulom

$$m=\int_c \varrho(x,y,z)\,ds.$$

Koordinate težišta te krive izražavaju se formulama

$$x_0=\frac{1}{m}\int_c x\,\varrho(x,y,z)\,ds,\quad y_0=\frac{1}{m}\int_c y\,\varrho(x,y,z)\,ds,\quad z_0=\frac{1}{m}\int_c z\,\varrho(x,y,z)\,ds.$$

Momenti inercije I_x, I_y i I_0, respektivno u odnosu na ose Ox, Oy i koordinatni početak izražavaju se formulama

$$I_x=\int_c y^2\varrho(x,y,z)\,ds,\quad I_y=\int_c x^2\varrho(x,y,z)\,ds,\quad I_0=\int_C (x^2+y^2)\,\varrho(x,y,z)\,ds.$$

4° Krivolinijski integral

$$\int_c X(x,y,z)\,dx+Y(x,y,z)\,dy+Z(x,y,z)\,dz.$$

izražava *rad sile* pri pomeranju jedinice mase duž krive c u polju sile $\vec{F}(X,Y,Z)$.

5° Prema *Bio-Savarovom zakonu* element struje dejstvuje na magnetnu masu m silom čija je veličina $\dfrac{m\,I\sin\alpha\,ds}{r^2}$, gde je I jačina struje, ds element dužine provodnika, r rastojanje od elementa struje do magnetne mase, α ugao između prave koja spaja magnetnu masu i element struje i pravca proticanja struje. Ta sila ima pravac normale na ravan koja sadrži element struje i tačku u kojoj se nalazi magnetna masa; smer sile se određuje po pravilu desne zavojnice.

Izračunati površinu ograničenu krivim linijama:

1366. $x=a\cos t,\quad y=b\sin t.$

1367. $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$

1368. $x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t,\qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$

1369. Ograničenu jednim lukom epicikloide

$$x=a[(1+m)\cos mt-m\cos(1+m)t],$$
$$y=a[(1+m)\sin mt-m\sin(1+m)t],\qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

i lukom odgovarajućeg kruga.

1370. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2+y^2).$ **1371.** $x^3+y^3=3axy$ (Descartesov list).

1372. $x=2a\cos t-a\cos 2t,\quad y=2a\sin t-a\sin 2t\qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$

1373. $(x+y)^2=ax, \quad y=0, \qquad (a>0)$. **1374.** $(x+y)^3=xy$.

1375. $(x+y)^4=x^2y$. **1376.** $9y^2=4x^3-x^4$.

1377. $x^3+y^3=x^2+y^2, \quad y=0, \quad x=0$. **1378.** $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{12}=xy$.

1379. $(x+y)^{\alpha+\beta+1}=ax^{\alpha}y^{\beta} \qquad (a>0, \ \alpha>0, \ \beta>0)$.

1380. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\alpha}=1 \qquad (a>0, \ b>0, \ \alpha>0)$.

Naći površinu sledećih površi:

1381. Omotača cilindra $x^2+y^2=1$ između ravni $z=4y$ i $z=2y$.

1382. Kružnog cilindra $x^2+y^2=R^2$ između ravni $z=0$ i površi $z=R+\frac{x^2}{R}$.

1383. Eliptičnog cilindra $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ između ravni $z=0$ i $z=y$.

1384. Paraboličnog cilindra $y^2=2px$ između ravni $z=0$, $z=y$ i $x=\frac{8}{9}p$.

1385. Onog dela omotača cilindra $x^2+y^2-ax=0$ koji se nalazi unutar sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$.

1386. Kružnog cilindra $x^2+y^2=R^2$ između ravni $z=0$ i površi $2Rz=xy$.

1387. Dela cilindrične površi

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$$

koju isecaju površi $x^{4/3}+y^{4/3}=z; \quad z=0$.

1388. Date su površi (P_1) $z=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$, (P_2) $x^2+y^2=1$ i (P_3) $z=0$.

1° Naći površinu dela površi (P_2) koji isecaju površi (P_1) i (P_3),

2° Naći $\oint\limits_{c}\left(\frac{1}{y^2}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4-y^2}\right)dy-\frac{xy}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ duž krive

$x^2+y^2=1, \ z=0$.

1389. Naći masu krive $y=x^2$ između tačaka $x=0$ i $x=2$ ako je u svakoj tački gustina jednaka kvadratu apscise te tačke.

Naći masu sledećih krivih:

1390. Luka krive $y=\frac{2x\sqrt{x}}{3}$, od tačke $(0, 0)$ do tačke $\left(4, \frac{16}{3}\right)$, ako je linijska gustina krive proporcionalna dužini njenog luka.

1391. Dela krive $y=\ln x$, između tačaka $x=\sqrt{3}$ i $x=2\sqrt{2}$ ako je gustina u svakoj tački jednaka kvadratu njene apscise.

1392. Dela lančanice $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, između tačaka $x=0$ i $x=a$, ako je gustina krive u svakoj tački proporcionalna njenoj ordinati.

1393. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, ako je linearna gustina u svakoj tački $\varrho=|y|$.

1394. Luka krive $x=at$, $y=\frac{a}{2}t^2$, $z=\frac{a}{3}t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ čija se gustina menja po zakonu $\varrho=\sqrt{\frac{2y}{a}}$.

1395. Naći težište luka kruga $x^2+y^2=a^2$, $(y\geqslant 0)$, i moment inercije u odnosu na osu Ox; $(\varrho=1)$.

Naći težište homogenih krivih:

1396. Luka cikloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

1397. Luka kruga poluprečnika a, kome odgovara centralni ugao 2φ.

1398. $r=a(1+\cos\varphi)$. **1399.** $y\,a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$, između $A(0, a)$ i $B(b, h)$.

1400. Sfernog trougla $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

1401. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=ht$ za $0<t<m$.

1402. $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$, $z=e^{-t}$ za $0<t<\infty$

1403. Naći moment inercije u odnosu na koordinatne ose luka zavojnice

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=\frac{h}{2\pi}t\qquad(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

1404. Odrediti rad koji izvrši sila teže F pri pomeranju mase m iz tačke (a_1, b_1, c_1) u tačku (a_2, b_2, c_2).

1405. Sila $\vec{F}(P, Q)$. gde je $P=x-y$, $Q=x$ obrazuje polje. Izračunati rad potreban da jedinica mase obiđe konturu kvadrata $x=\pm a$ i $y=\pm a$.

1406. Date su tačke $A(-a, a)$ i $B(a, a)$. Odrediti silu kojom deluje masa M ravnomerno raspoređena na duži AB, na masu m koja je skoncentrisana u tački $O(0, 0)$.

1407. Odrediti silu kojom masa M ravnomerno raspoređena na gornjem luku kruga $x^2+y^2=a^2$, privlači masu m skoncentrisanu u koordinatnom početku.

1408. Naći rad sile $F=\frac{k}{r^2}$, gde je $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, koja dejstvuje na jedinicu mase, ako se ta masa pomera iz tačke (x_1, y_1, z_1) u tačku (x_2, y_2, z_2).

1409. Projekcije sile na koordinatne ose su $X=2xy$ i $Y=x^2$. Pokazati da rad sile pri pomeranju materijalne tačke mase m zavisi samo od njenog početnog i krajnjeg položaja, a ne zavisi od oblika putanje. Izračunati rad ako se vrši pomeranje iz tačke (1, 0) u tačku (0, 3).

1410. Komponente sile su $X=x+y^2$ i $Y=2xy-8$. Pokazati da rad pri pomeranju materijalne tačke u polju te sile ne zavisi od putanje.

1411. U svakoj tački ravni dejstvuje sila, čije su projekcije na koordinatne ose $X=xy$, $Y=x+y$. Izračunati rad sile pri pomeranju tačke mase m iz tačke (0, 0) u tačku (1, 1): 1° po pravoj $y=x$; 2° po paraboli $y=x^2$; 3° po izlomljenoj dvogranoj liniji, čiji su delovi paralelni koordinatnim osama (dva slučaja).

1412. Naći silu kojom struja I u beskonačnom pravolinijskom provodniku dejstvuje na tačkastu magnetnu masu m, koja se nalazi na rastojanju d od provodnika.

1413. Po konturi, čiji je oblik kvadrat stranice a teče struja I. Kakvom silom dejstvuje taj protok na tačkastu magnetnu masu m, koja se nalazi u centru kvadrata?

1414. Pokazati da struja I, koja teče po luku krive, čija je jednačina u polarnim koordinatama $r=r(\varphi)$, dejstvuje na tačkastu magnetnu masu, koja se nalazi u polu, silom $F=mI\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{r}$.

1415. Kolika je sila kojom struja I, koja teče po zatvorenoj eliptičkoj putanji, dejstvuje na tačkastu magnetnu masu m, koja se nalazi u žiži elipse?

1416. Kolikom silom struja I, koja teče po beskonačnoj paraboličkoj konturi, dejstvuje na tačkastu magnetnu masu m, smeštenu u žiži parabole? Rastojanje od temena do fokusa je $\dfrac{p}{2}$.

1417. Kolikom silom struja I, koja teče po kružnoj konturi poluprečnika R, dejstvuje na tačkastu magnetnu masu m, smeštenu u tački P, koja leži na normali, postavljenoj kroz centar kruga, na rastojanju h, od centra kruga? Za koju vrednost od R će ta sila biti najveća ako je h fiksirano?

1418. Izračunati logaritamski potencijal prostog sloja

$$\eta(x, y)=\oint_c \mu \ln\frac{1}{r}\,ds$$

gde je $\mu=\mathrm{const}$ — gustina, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ a kontura c krug $u^2+v^2=R^2$.

1419. Izračunati u polarnim koordinatama r i φ logaritamske potencijale prostog sloja

$$I_1=\int_0^{2\pi}\cos n\theta\ln\frac{1}{r}\,d\theta \quad \text{i} \quad I_2=\int_0^{2\pi}\sin n\theta\ln\frac{1}{r}\,d\theta$$

ako je r rastojanje između tačke (ϱ, φ) i promenljive tačke $(1, \theta)$ a $n\in N$

§ 11. Površinski integral

1° Površinski integral druge vrste. Ako je S deo po deo glatka dvostrana površ definisana jednačinama

$$(1) \qquad x=x(u, v) \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v) \quad [(u, v)\in D]$$

a $f(x, y, z)$ funkcija definisana i neprekidna na površi S, onda je

$$(2) \qquad \iint_S f(x\cdot y, z)\,dS=\iint_D f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

gde je

$$E=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

U specijalnom slučaju, ako jednačina površi S ima oblik

$$z=z(x, y) \qquad [(x, y)\in D]$$

gde je $z(x, y)$ jednoznačna neprekidno diferencijabilna funkcija, onda je

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\,dS=\iint_D f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy,$$

gde je $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$ a $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Ovaj integral ne zavisi od izbora strane površi S.

Ako se funkcija $f(x, y, z)$ tretira kao gustina površi S u tački (x, y, z), onda integral (2) predstavlja masu te površi.

2° Koordinate težišta materijalne homogene površi S date su obrascima

$$Sx_0=\iint_S x\,dS, \quad Sy_0=\iint_S y\,dS, \quad Sz_0=\iint_S z\,dS, \quad S=\iint_S dS.$$

3° Površinski integral druge vrste. Ako je S glatka dvostrana površ, na kojoj je izabrana jedna od dveju strana, određena smerom normale

$\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ a $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$ i $R=R(x, y, z)$ tri funkcije, definisane i neprekidne na površi S, onda je

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS.$$

Pri prelazu na drugu stranu površi ovaj integral dobija suprotan znak.

4° Stocesova formula. Ako su $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$ i $R=R(x, y, z)$ neprekidno diferencijabilne funkcije a c prosta zatvorena deo po deo glatka kriva, koja ograničava konačnu deo po deo glatku dvostranu površ S, onda važi *Stocesova formula*:

$$\oint\limits_{c} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

gde su $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kosinusi pravca normale površi S, orijentisane na onu stranu, u odnosu na koju se obilazak konture c vrši suprotno kretanju kazaljke na časovniku.

5° Formula Ostrogradskog. Ako je S deo po deo glatka površ, koja ograničava oblast V, a $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$ i $R=R(x, y, z)$ neprekidne funkcije zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti $V+S$, onda važi *formula Ostrogradskog*

$$\iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

gde su $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ kosinusi pravca spoljne normale površi S.

Izračunati sledeće površinske integrale:

1420. $\iint\limits_{S} (6x + 4y + 3z)\,dS$ ako je S deo ravni $x + 2y + 3z = 6$, koja pripada prvom oktantu.

1421. $\iint\limits_{S} \dfrac{dS}{(1 + x + z)^2}$ ako je S deo ravni $x + y + z = 1$ koji pripada prvom oktantu.

1422. $\iint\limits_{S} (x^2 + y^2)\,dS$, ako je S sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

1423. $\iint\limits_{S} \dfrac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$ ako je S deo cilindra $x^2 + y^2 = R^2$ ograničen ravnima $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = m$.

1424. $\iint\limits_S (y+z+\sqrt{a^2-x^2})\,dS$ ako je S deo cilindra $x^2+y^2=a^2$, između ravni $z=0$, $z=h$.

1425. $\iint\limits_S \dfrac{dS}{x+\dfrac{y^2}{2}+z}$ ako je S deo cilindra $x=2-\dfrac{y^2}{2}$ ograničen ravnima $x=0$, $z=0$, $z=1$.

1426. $\iint\limits_S x\,(y^2+z^2)\,dS$ ako je površ S data jednačinom $x=\sqrt{9-y^2-z^2}$.

1427. $\iint (y^2+z^2)\,dS$ ako je površ S data jednačinom $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

1428. $\iint\limits_S \dfrac{dS}{(1+z)^2}$ ako je S sfera $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geqslant 0$.

1429. $\iint\limits_S \dfrac{dS}{\sqrt{1+z}}$, po površi $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \geqslant 0$.

1430. $\iint \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dS$, gde je S polovina sfere $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

1431. $\iint\limits_S x^2y^2\,dS$, gde je S polovina sfere $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

1432. $\iint\limits_S \dfrac{dS}{d^2}$ ako je S deo cilindra $x^2+y^2=R^2$, ograničen ravnima $z=0$ i $z=h$, a d rastojanje od koordinatnog početka do tačke na površi.

1433. $\iint\limits_S \dfrac{dS}{d}$, gde je S deo površi $z=xy$ isečen cilindrom $x^2+y^2=R^2$, a d rastojanje tačke površi do Oz ose.

1434. $\iint\limits_S \dfrac{dS}{d}$, ako je S elipsoid a d rastojanje centra elipsoida od tangentne ravni elipsoida.

1435. $\iint\limits_S \dfrac{dS}{d^3}$ gde su S i d kao u prethodnom zadatku.

1436. $\iint\limits_S \frac{dS}{d^n}$, ako je S sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, a d rastojanje od fiksne tačke $P(0, 0, c)$ $(c>R)$ do tačke na sferi.

1437. Izračunati potencijal $u=\iint\limits_S \frac{\varrho_0 dS}{d}$ sferne površi $x^2+y^2+z^2=a^2$ gustine ϱ_0 na tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ako je $d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

1438. $\iint\limits_S \sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}\, dS$, ako je S površ kruga $x^2+y^2+z^2=R^2$,

$$ax+by+cz=d.$$

1439. $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\, dS$, ako je S deo površi $z=\sqrt{x^2+y^2}$, isečen cilindrom $x^2+y^2=2\,ax$.

1440. Dokazati Poissonovu formulu

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\, dS=2\,\pi\int\limits_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right) du$$

ako je S sfera $x^2+y^2+z^2=1$.

1441. Pokazati da je integral

$$J=\iint\limits_S \frac{\cos\left(\vec{r}, \vec{n}\right)}{r^2}\, dS=\iint\limits_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, dS,$$

uzet po površi S jednak prostornom uglu pod kojim se površ S vidi iz koordinatnog početka. Sa r je obeležen radijus vektor elementa površi dS a sa n normalna površ, dok je $\frac{\partial u}{\partial n}$ izvod u pravcu normale.

Naći masu sledećih površi:

1442. Površ paraboloida $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ čija se gustina menja po zakonu $\varrho=z$.

1443. Sfere, ako je površinska gustina u svakoj tački jednaka rastojanju te tačke od nekog fiksiranog prečnika sfere.

1444. Sfere, ako je površinska gustina u svakoj tački jednaka kvadratu rastojanja te tačke od nekog fiksiranog prečnika sfere.

Odrediti težište površi:

1445. Površi segmenta sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$ za $h<z<a$.

1446. Omotača sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

1447. Dela površi $x^2+y^2+z^2=a^2$, koji je ograničen površima $x^2+y^2=ax$, $z=0$.

Naći moment inercije površi:

1448. Površi konusa $h^2(x^2+y^2)=a^2z^2$ za $0>z<h$ u odnosu na z osu.

1449. Površi sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$, u odnosu na prečnik.

1450. Površi paraboloida $x^2+y^2=2az$ $(0<z<a)$ u odnosu na z osu.

Izračunati sledeće površinske integrale:

1451. $\iint\limits_S z\,dx\,dy+x\,dx\,dz+y\,dy\,dz$, ako je S gornji deo ravni $x-y+z=1$ isečen koordinatnim ravnima.

1452. $\iint\limits_S xyz\,dx\,dy$, po spoljnoj strani sfere $x^2+y^2+z^2=1$; $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

1453. $\iint\limits_S \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dx\,dy$ ako je S donja strana kruga $x^2+y^2\leqslant a^2$.

1454. $\iint\limits_S 2\,dx\,dy+y\,dx\,dz-x^2z\,dy\,dz$, ako je S spoljna strana onog dela elipsoida $4x^2+y^2+4z^2=1$ koji pripada prvom oktantu.

1455. $\oiint\limits_S y\,dx\,dz$, ako je S unutrašnja strana tetraedra koji određuju ravni

$$x+y+z=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$$

1456. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dx\,dz+z^2\,dx\,dy$, ako je S spoljna strana sfere $x^2+y^2+z=a^2$, koja pripada prvom oktantu.

1457. $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, po spoljnoj strani sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$.

1458. $\iint\limits_S yz\,dy\,dz+xz\,dz\,dx+xy\,dx\,dy$ gde je S spoljna strana tetraedra koji je određen ravnima $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$.

1459. $\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dx\,dz+(x-y)\,dx\,dy$, ako je S spoljna strana površi $x^2+y^2=z^2$ $\quad(0\leqslant z\leqslant h)$.

1460. $\iint\limits_S \left(\frac{dy\,dz}{x}+\frac{dx\,dz}{y}+\frac{dx\,dy}{z}\right)$, gde je S spoljna strana elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

1461. $\iint\limits_S yz\,dx\,dy+xz\,dy\,dz+xy\,dx\,dz$, ako je S spoljna strana površi određene površima $x^2+y^2=R^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=h$.

1462. Transformisati integral $\int\limits_c (y^2+z^2)\,dx+(x^2+z^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz$, ako je c neka zatvorena kontura, na površinski integral površi čiji je rub ta kontura.

Izračunati sledeće krivolinijske integrale na dva načina: direktno i pomoću Stocesove formule:

1463. $\oint\limits_c 8\,y\sqrt{(1-x^2-z^2)^3}\,dx+xy^3\,dy+\sin z\,dz$, ako se krivi deo dobija presekom elipsoida $4\,x^2+y^2+4\,z^2=4$ i ravni $z=0$, $x=0$, $y=0$, u prvom oktantu.

1464. $\int\limits_c x^2\,dx+xy\,dy+xyz\,dz$, ako je c kontura trougla čija su temena

$$A\,(a,\ 0,\ 0),\quad B\,(0,\ b,\ 0),\quad C\,(0,\ 0,\ c).$$

1465. $\int\limits_c y\,dx+x^2\,dy+z\,dz$, ako je kriva c određena presekom površi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b},\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\quad c>0.$$

Koristeći Stocesovu formulu izračunati sledeće krivolinijske integrale:

1466. $\oint\limits_c y\,dx+z\,dy+x\,dz$, ako je c krug $x^2+y^2+z^2=a^2$,

$$x+y+z=0.$$

1467. $\oint\limits_c (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$ ako je c luk elipse $x^2+y^2=a^2$,

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1 \qquad (a>0\ \ h>0),$$

orijentisan u smeru suprotnom od smera kazaljke na časovniku, posmatrano sa pozitivnog smera ose Ox.

1468. $\oint\limits_c e^x\,dx+z\,(x^2+y^2)^{3/2}\,dy+yz^3\,dz$ gde je c linija određena presekom površi $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$.

1469. $\int\limits_c (y^2+z^2)\,dx+(z^2+x^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz$, ako je c kriva $x^2+y^2+z^2=2\,ax$,

$x^2+y^2=2\,bx, \quad z \geqslant 0.$

1470. Neka je c zatvorena kontura koja pripada ravni

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

i ograničava površinu S ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ su kosinusi pravca normale). Naći

$$\oint\limits_c \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

ako se kretanje vrši u pozitivnom smeru konture c.

1471. Transformisati površinski integral

$$\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dx\,dz+z^2\,dx\,dy$$

ako je S zatvorena površ, u trojni uzet po oblasti koju ograničava ta površ.

1472. Izračunati površinski integral

$$\oiint\limits_S y^2 z\,dx\,dy+xz\,dy\,dz+x^2 y\,dx\,dz$$

gde je S spoljna strana površi koju obrazuju površi $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, u prvom oktantu, na dva načina: direktno i primenom formule Ostrogradskog.

Dokazati jednakosti:

1473. $\iint\limits_S \cos(\vec{n}, \vec{l})\,dS=0$, ako je S prosta zatvorena površ, $\vec{l}$ proizvoljni pravac a $\vec{n}$ spoljna normala površi S.

1474. $\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS=3\,V$, gde su $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kosinusi spoljne normale površi S koja ograničava zapreminu V.

Koristeći formulu Ostrogradskog izračunati integrale:

1475. $\iint\limits_S (x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\,dS$, ako je S sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kosinusi pravca njene spoljne normale.

1476. $\iint\limits_{S} [(z^n-y^n)\cos\alpha+(x^n-z^n)\cos\beta+(y^n-x^n)\cos\gamma]\,dS$, po sferi

$$x^2+y^2+z^2=R^2, \quad z\geqslant 0,$$

ako su α, β i γ kao i u prethodnom zadatku.

1477. $\iint\limits_{S} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, ako je površ S definisana jednačinama

$$x=(a+b\cos\theta)\cos\varphi, \quad y=(a+b\cos\theta)\sin\varphi, \quad z=b\sin\theta,$$

$$0\leqslant\theta, \quad \varphi\leqslant 2\pi, \quad a\geqslant b\geqslant 0.$$

1478. $\iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$ ako je S spoljna strana površi definisane jednačinama $x^2+y^2+z^2=1$, $z^2=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

1479. Pokazati da površinski integral

$$\iint\limits_{(S)} 4\,xyz\,dx\,dy-2\,x^2y\,dy\,dz-3\,xz^2\,dx\,dz$$

ne zavisi od površine (S) već samo od njene granične konture (c) i transformisati ga na integral po toj konturi, a zatim izračunati njegovu vrednost kada je granična kontura zadata jednačinama:

$$x^2+y^2=R^2, \quad x+z=0.$$

1480. Dat je integral

$$I=\iint\limits_{(S)} (1+x^2)\,\varphi(x)\,dy\,dz+2\,xy\,\varphi(x)\,dz\,dx-3\,z\,dx\,dy$$

po površini (S) čiji je rub zatvorena kriva c. 1° Odrediti funkciju $\varphi(x)$ tako da integral I zavisi samo od krive c i da bude $\varphi(0)=0$. 2° U tom slučaju izračunati integral I ako je kriva data jednačinama $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=1$. 3° U istom slučaju pretvoriti integral I u krivolinijski integral oblika

$$\int\limits_{c} P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy.$$

Izračunati površinske integrale:

1481. $\iint\limits_{S} (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS$, gde je S, deo površi

$$x^2+y^2=z^2 \quad (0\leqslant z\leqslant h)$$

a $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ kosinusi pravca njene spoljne normale.

1482. $\iint\limits_{S} \dfrac{\cos\varphi}{r^2}\,dS$ ako je S deo ravni $x+y+z=1$ koji pripada prvom oktantu, r intenzitet vektora položaja tačke M date ravni a φ ugao između vektora položaja i normalnog vektora te ravni.

1483. Ako je $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ a S — glatka površina, koja ograničava konačno telo V, dokazati da važe sledeće formule

1° $\iint\limits_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint\limits_{V} \Delta u \, dx \, dy \, dz;$

2° $\iint\limits_{(S)} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint\limits_{V} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx \, dy \, dz +$

$+ \iiint\limits_{V} u \Delta u \, dx \, dy \, dz$, gde je u — funkcija, neprekidna sa svim svojim izvodima do drugog reda zaključno u oblasti $V + S$, a $\frac{\partial u}{\partial n}$ — izvod po spoljnoj normali na površinu S.

1484. Funkcija $u = u(x, y, z)$ koja ima neprekidne parcijalne izvode do drugog reda zaključno u nekoj oblasti, naziva se *harmonijska* u toj oblasti ako je

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Dokazati, ako je u harmonijska funkcija u konačnoj zatvorenoj oblasti V, ograničenoj glatkom površinom S, da važe formule

1° $\iint\limits_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0;$

2° $\iiint\limits_{V} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx \, dy \, dz = \iint\limits_{S} u \frac{\partial u}{\partial n} dS,$

gde je n — spoljna normala površi S, koristeći se formulom 2° da se funkcija koja je harmonijska u nekoj oblasti V jednoznačno definiše svojim vrednostima na njenoj granici S.

1485. Izračunati Gaussov integral

$$I(x, y, z) = \iint\limits_{S} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS,$$

gde je S — prosta zatvorena glatka površ, koja ograničava zapreminu V, $\vec{n}$ — spoljna normala na površinu S u tački (ξ, η, ζ), $\vec{r}$ — radijus vektor, koji spaja tačku (x, y, z) sa tačkom $(\xi, \eta\ \zeta,)$ i $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$

1486. Izračunati

$$\iint_{(S)} (x-y+z)\,dy\,dz+(y-z+x)\,dz\,dx+(z-x+y)\,dx\,dy,$$

gde je (S) spoljna strana površi

$$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1,\ |x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1.$$

1487. Dokazati identitet (Greenovu formulu)

$$\iiint_V (v\,\Delta u-u\,\Delta v)\,dx\,dy\,dz=\iint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS,$$

gde su u i v neprekidne funkcije i imaju neprekidne izvode do drugog reda u oblasti D. Simboli Δu i Δv znače Laplaceove operatore u prostoru.

1488. Neka je $u(x, y, z)$ — harmonijska funkcija u nekoj oblasti v i neka se u oblasti V nalazi sfera $\overline{S}$ sa centrom u tački $M(x_1, y_1, z_1)$ poluprečnika R. Dokazati da je

$$u(x_1, y_1, z_1)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\overline{S}} u\,dS.$$

Glava V

VEKTORSKA ANALIZA I TEORIJA POLJA

§ 1. Vektorska analiza

1° Vektorska funkcija realne promenljive. Funkcija $t \to \vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$, koja preslikava skup realnih brojeva $D \subset R$ u skup trodimenzionalnih vektora V^3 u oznakama $\vec{a} = \vec{a}(t) = a_1(t)\vec{i} + a_2(t)\vec{j} + a_3(t)\vec{k}$, naziva se vektorska funkcija realne promenljive.

2° Hodograf. Skup krajnjih tačaka vektora $\vec{a}$ kojima je početak data tačka O, zove se *hodograf* vektorske funkcije $\vec{a} = \vec{a}(t)$. Tačka O je pol hodografa.

Hodograf vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ je kriva u prostoru a jednačina $\vec{r} = \vec{r}(t)$ je njena vektorska jednačina. Hodograf vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$, sa dve realne promenljive, je površ u prostoru, a jednačina $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ je njena vektorska jednačina.

3° Granična vrednost. Kaže se da vektorska funkcija $\vec{a} = \vec{a}(t)$ ima za graničnu vrednost vektor $\vec{b}$, kad $t \to a$, ako za proizvoljan broj $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta = \delta(\varepsilon)$ takav da je

$$\left|\vec{a}(t) - \vec{b}\right| < \varepsilon$$

kad god je ispunjena nejednakost $|t - a| < \delta$. Tada se piše

$$\lim_{t \to a} \vec{a}(t) = \vec{b}$$

4° Neprekidnost. Funkcija $\vec{a} = \vec{a}(t)$, koja je definisana u tački t_0, je neprekidna u toj tački ako je

$$\lim_{t \to t_0} \vec{a}(t) = \vec{a}(t_0).$$

5° Priraštaj i izvod. Razlika $\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)$ se naziva priraštaj funkcije $\vec{a}(t)$ u tački t koji odgovara priraštaju nezavisno promenljive Δt. Označava se sa $\Delta\vec{a}(t)$.

$$\Delta\vec{a}(t)=\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t).$$

Izvod funkcije $\vec{a}(t)$ u tački t, naziva se vektor

$$\vec{a}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}(t)}{\Delta t},$$

ako ovaj limes postoji.

Ako je $\vec{a}=\{a_1(t),\ a_2(t),\ a_3(t)\}$ tada je

$$\vec{a}'(t)=\frac{d\vec{a}}{dt}=\left\{a_1'(t),\ a_2'(t),\ a_3'(t)\right\}.$$

Geometrijsko značenje vektora $\Delta\vec{a}(t)$, $\dfrac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$ i $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$ prikazano je na sl. 6.

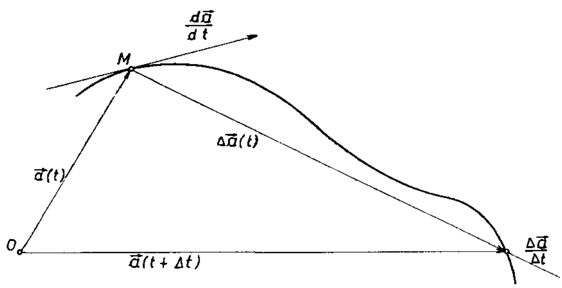
6° Diferencijal. Ako se priraštaj $\Delta\vec{a}(t)$ može napisati u obliku

$$\Delta\vec{a}(t)=\vec{D}(t)\Delta t+\vec{\varepsilon}(t),$$

gde je $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{\varepsilon}(t)}{\Delta t}=0$,

tada se vektor $\vec{D}(t)\Delta t$ naziva diferencijal funkcije $\vec{a}(t)$ u tački t i označava se sa $d\vec{a}(t)$

$$d\vec{a}=d\vec{a}(t)=\vec{D}(t)\,\Delta t.$$



Sl. 6

Izvodi i diferencijali višeg reda slično se definišu kao kod funkcija realne promenljive.

7° Parcijalni izvodi i diferencijali vektorske funkcije više promenljivih. Neka je $\vec{a}=\vec{a}(t_1,\ t_2,\dots,\ t_n)$ vektorska funkcija od n realnih promenljivih $t_1,\ t_2,\dots,\ t_n$.

Razlika

$$\vec{a}(t_1,\ t_2,\dots,\ t_{i-1},\ t_i+\Delta t_i,\ t_{i+1},\dots,\ t_n)-\vec{a}(t_1,\ t_2,\dots,t_n)=\Delta i_i\vec{a}$$

zove se parcijalni priraštaj po promenljivoj t_i.

Parcijalni izvod prvog reda $\dfrac{\partial\vec{a}}{\partial t_i}$, po promenljivoj t_i se definiše sa

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial t_i},\ \lim_{\Delta t_i\to 0}\frac{\Delta t_i\vec{a}}{\Delta t_i},$$

a totalni diferencijal $d\vec{a}$ sa

$$d\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t_i}\,dt_i.$$

Slično kao i u realnoj analizi, i ovde se definišu viši parcijalni izvodi $\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial t_i^2}$, $\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial t_i\partial t_j}$, $\frac{\partial^3\vec{a}}{\partial t_i^3}$, ... i viši diferencijali $d^2\vec{a}$, $d^3\vec{a}$ itd.

8° Neodređeni integral. Primitivna funkcija ili neodređeni integral neprekidne funkcije $\vec{a}(t)$ naziva se funkcija $\vec{b}(t)$ za koju je

$$\frac{d\vec{b}(t)}{dt}=\vec{a}(t).$$

Tada se piše

$$\int\vec{a}(t)\,dt=\vec{b}(t)+\vec{c}$$

gde je $\vec{c}$ proizvoljni konstantni vektor.

9° Određeni integral. Neka je $\vec{a}(t)$ ograničena funkcija na segmentu $[t_0, T]$, i neka tačke

$$t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_n=T$$

dele ovaj segment na n segmenata $[t_{i-1}, t_i]$. Za $\tau_i\in[t_{i-1}, t_i]$, vektor

$$\vec{I}=\sum_{i=1}^{n}\vec{a}(\tau_i)\,(t_i-t_{i-1})$$

se naziva *integralna suma.*

Ako za bilo kakvu podelu segmenta $[t_0, T]$ postoji

$$\lim_{\max|t_i-t_{i-1}|\to 0}\vec{I}$$

onda se ovaj limes naziva *određeni integral* funkcije $\vec{a}(t)$ u granicama od t_0 do T i obeležava se sa $\int_{t_0}^{T}\vec{a}(t)\,dt$, tj. tada je

$$\int_{t_0}^{T}\vec{a}(t)\,dt=\lim_{\max|t_i-t_{i-1}|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{a}(\tau_i)(t_i-t_{i-1}).$$

Ako je $\vec{b}(t)$ primitivna funkcija funkcije $\vec{a}(t)$ tada je

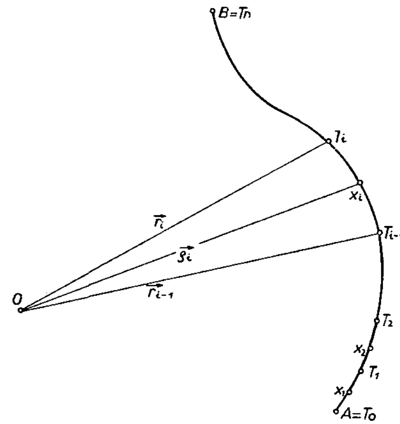
$$\int_{t_0}^{T}\vec{a}(t)dt=\vec{b}(T)-\vec{b}(t_0)$$ (Newton-Leibnizov obrazac).

10° V e k t o r s k i   k r i v o l i n i j s k i   i n t e g r a l. Neka je orijentisani luk $L=\overset{\frown}{AB}$ krive $\vec{r}=\vec{r}(t)$ podeljen tačkama $T_i\,(i=0,1,\cdots,n)$ čiji su vektori položaja $\vec{r_i}$, tako da $T_0=A$ odgovara parametru t_0 a tačka $T_n=B$ parametru t_n gde je $t_0<t_1<\cdots<t_n$ (sl. 7).

Neka je $\varphi(\vec{r})$ skalarna ili vektorska funkcija definisana na luku L i neka je X_i tačka luka $\overset{\frown}{T_{i-1}T_i}$ a ϱ_i njen vektor položaja. Izraz

$$I=\sum_{i=1}^{n}\varphi(\vec{\varrho_i})\ *\ (\vec{r_i}-\vec{r}_{i-1}),$$

se naziva integralna suma, gde $*$ označava množenje skalara sa vektorom—ako je $\varphi(\vec{r})$ skalarna funkcija, skalarni ili vektorski proizvod — ako je $\vec{\varphi}(\vec{r})=\varphi(\vec{r})$ vektorska funkcija.



Sl. 7.

Krivolinijski integral po luku L, u oznaci $\int_L\varphi(\vec{r})\ *\ d\vec{r}$, se definiše sa

$$\int_L\varphi(\vec{r})\ *\ d\vec{r}=\lim_{\max|\vec{r_i}-\vec{r}_{i-1}|\to 0}\ \sum_{i=1}^{n}\varphi(\vec{\varrho_i})\ *\ (\vec{r_i}-\vec{r}_{i-1}),$$

ako ovaj limes postoji po svakom nizu podela luka L.

Zavisno od toga da li je $\varphi(\vec{r})$ skalarna ili vektorska funkcija i da li $*$ označava množenje skalara i vektora ili skalarni odnosno vektorski proizvod vektora, imamo tri vrste krivolinijskog integrala:

$$1)\ \int_L\varphi(\vec{r})\,d\vec{r},\qquad 2)\ \int_L\vec{\varphi}(\vec{r})\cdot d\vec{r}\quad \text{i}\quad 3)\ \int_L\vec{\varphi}(\vec{r})\times d\vec{r}.$$

Prvi i treći integral su *vektorski krivolinijski integrali.*

11° V e k t o r s k i   p o v r š i n s k i   i n t e g r a l. Neka je S orijentisani deo površi $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ i neka je $\varphi(\vec{r})$ neprekidna skalarna ili vektorska funkcija definisana na površi S. Pretpostavimo da je S jednom mrežom krivih podeljena na delove S_i. Neka je $\vec{\sigma_i}=\sigma_i\,\vec{n}$ vektor površine dela S_i, gde je $\vec{n}$ jedinični vektor normale tog dela površi a σ_i površina površi S_i. Tada se može formirati integralna suma

$$\sum_i\varphi(\vec{\varrho_i})\ *\ \vec{\sigma_i}$$

gde je $\vec{\varrho_i}$ vektor položaja neke tačke sa dela S_i, a $*$ može imati ista značenja kao u 10°.

Površinski integral funkcije $\varphi(\vec{r})$ po površi S, u oznaci $\iint_S\varphi(\vec{r})\ *\ d\vec{\sigma}$, se definiše sa

$$\iint_S\varphi(\vec{r})\ *\ d\vec{\sigma}=\lim_{\max\sigma_i\to 0}\sum\varphi(\vec{\varrho_i})\ *\ \vec{\sigma_i}.$$

Ako je površ S zatvorena ovaj integral se označava sa $\oiint_S\varphi(\vec{r})\ *\ d\vec{\sigma}$, Zavisno od toga da li je $\varphi(\vec{r})$ skalarna ili vektorska funkcija i da li $*$ označava množenje skalara i vektora ili skalarni proizvod, odnosno vektorski proizvod dva vektora, imamo tri vrste površinskog integrala:

$$1)\ \iint_S \varphi(\vec{r})\, d\vec{\sigma}, \quad 2)\ \iint_S \vec{\varphi}(\vec{r})\cdot d\vec{\sigma} \quad \text{i} \quad 3)\ \iint_S \vec{\varphi}(\vec{r})\times d\vec{\sigma}.$$

Prvi i treći integral su vektorski površinski integrali.

12° Skalarno polje. Skalarna funkcija $u(\vec{r})=u(x, y, z)$, gde je $\vec{r}$ vektor položaja tačke $M(x, y, z)$, zajedno za svojom oblasti definisanosti, zove se *skalarno polje.*

13° Gradijent. Vektor $\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ se zove *gradijent* skalarnog polja $u(x, y, z)$ u tački $M(x, y, z)$ i označava se sa grad u

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

14° Izvod po datom pravcu. Neka je l pravac određen jediničnim vektorom $\vec{l}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. *Izvod funkcije $u(x, y, z)$ po datom pravcu l* u datoj tački $M(x, y, z)$, u oznaci $\frac{du}{dl}$, je skalarni proizvod grad $u\cdot\vec{l}$, tj.

$$\frac{du}{dl}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

15° Vektorsko polje. *Vektorska* funkcija $\vec{a}(\vec{r})=\vec{a}(x, y, z)$, zajedno sa svojom oblašću definisanosti, zove se *vektorsko polje.*

Vektorska linija vektorskog polja je kriva kod koje je u svakoj svojoj tački $\vec{r}$ tangenta paralelna sa vektorom $\vec{a}(\vec{r})$, Vektorske linije su određene jednačinom

$$\vec{a}\times d\vec{r}=0.$$

16° Prostorni izvod. Neka je S spoljašnja strana zatvorene površi koja može da se „steže" i koja ograničava odgovarajuću zapreminu V. Neka je, dalje, $\varphi(\vec{r})$ skalarna ili vektorska funkcija integrabilna na S.

Prostorni izvod funkcije $\varphi(\vec{r})$ u tački A zove se limes

$$\lim_{V\to 0}\frac{\oiint_s \varphi(\vec{r}) * d\vec{\sigma}}{V}, \quad A\in V$$

ako ovaj postoji. Pod $V\to 0$ se podrazumeva da maksimalna duž, koja je sadržana u V, teži nuli.

U zavisnosti od toga da li je $\varphi(\vec{r})$ skalarna ili vektorska funkcija $\vec{\varphi}(\vec{r})$ i kakvo je značenje množenja $*$ imamo sledeća tri prostorna izvoda, zajedno sa usvojenim nazivima i oznakama:

1) $$\lim_{V\to 0}\frac{\oiint_s \varphi(\vec{r})\, d\vec{\sigma}}{V}=\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) \qquad \text{(gradijent funkcije } \varphi)$$

2) $$\lim_{V\to 0} \frac{\oiint\limits_{S} \vec{\varphi}(\vec{r})\cdot d\vec{\sigma}}{V} = \operatorname{div}\vec{\varphi} \qquad \text{(divergencija vektora } \vec{\varphi}\text{)}$$

3) $$\lim_{V\to 0} \frac{\oiint\limits_{S} \vec{\varphi}(\vec{r})\times d\vec{\sigma}}{V} = \operatorname{rot}\vec{\varphi} \qquad \text{(rotor vektora } \vec{\varphi}\text{).}$$

1489. Odrediti hodograf vektorske funkcije $\vec{a}(t)$ koja ima: 1° Konstantan pravac i smer. 2° Konstantan modul.

1490. Šta je hodograf vektorske funkcije: 1° $\vec{r}=\cos t\,\vec{a}+\sin t\,\vec{b}$. 2° $\vec{r}=\operatorname{ch} t\,\vec{a}+\operatorname{sh} t\,\vec{b}$ gde su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dati ortogonalni vektori.

1491. Pokazati da je hotograf vektorske funkcije $\vec{r}(t)=t^2\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}$ ravna kriva i naći vektorsku jednačinu te ravni, ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ konstantni i $\vec{a}\times\vec{b}\neq 0$,

1492. Vektor položaja pokretne tačke u proizvoljnom vremenskom trenutku t dat je sa $\vec{r}(t)=\vec{i}-4t^2\vec{j}+3t^2\vec{k}$, gde su $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ ortovi koordinatnih osa prostornog koordinatnog sistema $Oxyz$. Odrediti: 1° Putanju tačke. 2° Brzinu. 3° Ubrzanje.

1493. Data je jednačina kretanja $\vec{r}(t)=2\cos t\,\vec{i}+2\sin t\,\vec{j}+3t\,\vec{k}$. Odrediti trajektoriju kretanja, brzinu i ubrzanje kretanja, kao i intenzitete brzine i ubrzanja u trenucima $t=0$ i $t=\dfrac{\pi}{2}$.

1494. Jednačina kretanja projektila bez trenja vazduha je $\vec{r}=t\vec{v}_0-\dfrac{gt^2}{2}\vec{k}$, gde je v_0 početna brzina. Naći brzinu i ubrzanje u proizvoljnom trenutku t.

1495. Vektor položaja pokretne tačke kao funkcija vremena, dat je jednačinom $\vec{r}(t)=\cos\omega t\vec{a}+\sin\omega t\,\vec{b}$, gde su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektorske konstante a ω skalarna konstanta. Odrediti vektor brzine i ubzanja ove tačke i pokazati da je putanja tačke elipsa sa poluosama $2|\vec{a}|$ i $2|\vec{b}|$.

1496. Materijalna tačka mase m kreće se pod dejstvom privlačne sile $-\lambda\vec{r}$ i sile trenja $-\alpha\vec{v}$, gde su λ i α ($\alpha^2>4\lambda$) konstante a $\vec{v}$ brzina materijalne tačke, čiji je vektor položaja $\vec{r}$. Odrediti vektor položaja u funkciji vremena t.

1497. Naći intenzitet brzine tačke na krugu, poluprečnika a, koji se kotrlja po pravoj sa stalnom uglovnom brzinom ω tako da mu centar ima stalnu brzinu v_0.

Dokazati sledeća pravila diferenciranja:

1498. $\frac{d}{dt}(\lambda\vec{a})=\lambda\frac{d\vec{a}}{dt}$, gde je λ konstantni skalar.

1499. $\frac{d}{dt}(\varphi\vec{a})=\frac{d\varphi}{dt}\vec{a}+\varphi\frac{d\vec{a}}{dt}$, gde je $\varphi=\varphi(t)$ skalarna funkcija.

1500. $\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}$.

1501. $\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})=\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$.

1502. $\frac{d}{dt}\vec{a}[\varphi(t)]=\frac{d\vec{a}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$.

1503. $\vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}}{dt}=0$, gde je $|\vec{a}|=\text{const}$.

Proveriti jednakosti:

1504. $\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}))=\frac{d\vec{a}}{dt}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\cdot\left(\frac{d\vec{b}}{dt}\times\vec{c}\right)+\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\frac{d\vec{c}}{dt}\right)$.

1505. $\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\cdot\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\times\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}\right)\right)=\vec{a}\cdot\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\times\frac{d^3\vec{a}}{dt^3}\right)$.

1506. Dokazati da je $\vec{a}\cdot d\vec{a}=a\,da$ $(a=|\vec{a}|)$ za svaku vektorsku funkciju $\vec{a}$.

1507. Ako je $\vec{a}\times\frac{d\vec{a}}{dt}=0$, dokazati da vektor $\vec{a}$ ima konstantan pravac.

1508. Dokazati da iz jednakosti $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{r}f(r)$ sledi jednakost $\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{c}$.

1509. Ako vektor $\vec{a}$ ima konstantan pravac i ako je $\frac{d}{dt}(\vec{a}+\vec{b})=0$, dokazati da je $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=c|\vec{a}|^2$ $(c=\text{const})$.

1510. Neka je $\vec{e}=\vec{e}(\varphi)$ jedinični vektor u ravni xOy čiji je početak u tački O i koji zaklapa ugao φ sa pozitivnim delom x-ose. Dokazati da je

$$\frac{d\vec{e}}{d\varphi}=\vec{e}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right).$$

1511. Ako je $\vec{a}(t)\times\frac{d\vec{a}(t)}{dt}=0$, dokazati da je ort vektora $\vec{a}(t)$ konstantan vektor.

1512. Ako su vektori $\vec{a}(t_1)$ i $\vec{a}(t_2)$ normalni na vektor $\vec{b}$ $(t_1 < t_2)$, pokazati da postoji bar jedna vrednost t' $(t_1 < t' < t_2)$ takva da je vektor $\vec{a}(t')$ normalan na vektoru $\vec{b}$.

1513. Odrediti ekviskalarne površi (nivo površi) skalarne funkcije $u(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r}$ ($\vec{a}$ konstantni vektor a $\vec{r}$ vektor položaja tačke skalarnog polja $u(\vec{r})$).

1514. Naći gradijent skalarnog polja $u(\vec{r}) = x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz$ u tački $\vec{r}_0 = (2, 1, 1)$. U kojim tačkama je $\operatorname{grad} u(\vec{r}) = 0$ a u kojim je $\operatorname{grad} u(\vec{r}) \cdot \vec{k} = 0$?

1515. Dokazati da je $\dfrac{du}{d\vec{e}} = \lim\limits_{\varrho \to 0} \dfrac{u(\vec{r} + \varrho\,\vec{e}) - u(\vec{r})}{\varrho}$.

Ako je $\vec{r}$ vektor položaja pokretne tačke $M(x, y, z)$ a $\vec{a}$ i $\vec{b}$ konstantni vektori, pokazati da je:

1516. $\operatorname{grad} \sqrt{(\vec{a} \times \vec{r})^2} = \dfrac{(\vec{a} \times \vec{r}) \times \vec{a}}{\sqrt{(\vec{a} \times \vec{r})^2}}$.

1517. $\operatorname{grad} \dfrac{(\vec{a} \cdot \vec{r})}{r^3} = \dfrac{\vec{a}}{r^3} - \dfrac{3\,\vec{r}\,(\vec{a} \cdot \vec{r})}{r^5}$.

1518. $\operatorname{grad} \dfrac{(\vec{a} \cdot \vec{r})}{(\vec{b} \cdot \vec{r})} = \dfrac{\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{b})}{(\vec{b} \cdot \vec{r})^2}$.

1519. $\operatorname{grad} |\vec{a} \times \vec{r}|^2 = 2\,[(\vec{a} \times \vec{r}) \times \vec{a}]$.

1520. Dokazati da je:

1° $\operatorname{grad}(c_1 u + c_2 v) = c_1 \operatorname{grad} u + c_2 \operatorname{grad} v$;

2° $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$;

3° $\operatorname{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$.

4° $\operatorname{grad} \varphi(u) = \varphi'(u) \operatorname{grad} u$.

1521. Naći izvod funkcije $u(\vec{r}) = 3\,x^2 - 3\,y^2 + z^2 - 2\,xyz$ u tački $\vec{r}_0 = (1, 1, 0)$ po pravcu $\vec{e} = (0, 0, -1)$.

1522. Naći $\dfrac{du}{d\vec{e}}$ u tački $\vec{r}_0 = (1, 1, 1)$ ako je $u = xyz$ a $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Izračunati $|\operatorname{grad} u|$ u toj tački.

1523. Naći izvod skalarnog polja $u(\vec{r}) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ u tački $\vec{r}_0$ po pravcu $\vec{r}_0$.

Kada će biti $\frac{du}{d\vec{r}_o} = \operatorname{grad} u(\vec{r}_o)$?

1524. Naći izvod funkcije $u(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r}$ ($\vec{a}$—konstantan vektor) u pravcu datog vektora $\vec{e}$.

1525. Ako je $u(\vec{r}) = (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot (\vec{b} \times \vec{r})$, dokazati da je

$$\frac{du}{d\vec{e}} = (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot (\vec{b} \times \vec{e}) + (\vec{b} \times \vec{r}) \cdot (\vec{a} \times \vec{e})$$

gde su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ konstatni vektori a $\vec{e}$ dati jedinični vektor.

1526. Pokazati da funkcije $u_1(\vec{r}) = |\vec{r}|$ i $u_2(\vec{r}) = |\vec{r}|^2$ imaju iste ekviskalarne površi ali različite gradijente.

1527. Tačka se kreće konstantnom brzinom $\vec{V}_o$. Odrediti vektorsku jednačinu putanje ove tačke.

1528. Odrediti vektorske linije vektorskog polja $\vec{a}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$.

1529. Dato je vektorsko polje $\vec{a} = \vec{c} \times \vec{r}$ ($\vec{c}$ — konstantni vektor). Pokazati da su vektorske linije ovoga polja krugovi koji leže u ravnima upravnim na vektoru $\vec{c}$ a čiji su centri na pravoj $\vec{r} = t\vec{c}$.

Pokazati da je:

1530. $\int \vec{a} \cdot d\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \int \vec{b} \cdot d\vec{a}$.

1531. $\int \vec{a} \times d\vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} + \int \vec{b} \times d\vec{a}$.

1532. $\int \vec{a} \times \frac{d^2\vec{a}}{dt^2} dt = \vec{a} \times \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{c}$ $\qquad (\vec{c} = \text{const})$.

1533. Pokazati da je vektor površine koju ograničava zatvorena ravna kriva c dat sa

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_c \vec{r} \times d\vec{r}.$$

Dokazati da je:

1534. $\oint_c u(\vec{r})\, d\vec{r} = \iint_S d\vec{\sigma} \times \operatorname{grad} u$, gde c ograničava površ S.

1535. $\oint_S \vec{r} \times d\vec{r} = 2 \iint_S d\vec{\sigma}$, gde c ograničava deo površi S.

1536. $\oiint_S \frac{du}{d\vec{u}} \cdot d\vec{\sigma} = 0$, gde je $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ a $\vec{u}$ jedinični vektor spoljašnje normale.

1537. $\oint\!\!\!\oint_S \dfrac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{\sigma}=4\pi$, gde je S spoljašnja strana sfere poluprečnika a sa centrom u koordinatnom početku.

1538. $\oint\!\!\!\oint_S (\vec{a}\cdot\vec{r})\, d\vec{\sigma}=V\vec{a}$, gde je V zapremina obuhvaćena sa površi S.

1539. $\oint\!\!\!\oint_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{\sigma}=0$.

§ 2. Elementi teorije polja

1° Operator nabla. *Nabla* je simbolički vektor

$$\nabla=\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\cdot$$

Ako se ovaj simbolički vektor primeni na skalarnu funkciju onda je po definiciji

$$\nabla u=\operatorname{grad} u$$

Skalarni proizvod simboličkog vektora i nekog vektora $\vec{A}$ naziva se *divergencija* vektora $\vec{A}$ i piše

$$\nabla\vec{A}=\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}$$

Vektorski proizvod simboličkog vektora i vektora $\vec{A}$ naziva se *rotor* vektora $\vec{A}$ i piše

$$\nabla\times\vec{A}=\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}$$

Operator Δ naziva se *Laplaceov operator* ili *laplasijan* i definiše se jednakošću.

$$\Delta u=\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) \text{ ili u simboličkom obliku } \Delta=\nabla\nabla=\nabla^2.$$

Jednačina $\Delta u=0$ naziva se *Laplaceova jednačina* a funkcija u, koja je zadovoljava, *harmonijska funkcija.*
Sem ovih operatora uvodi se i sledeći operator

$$\vec{A}\nabla=A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}$$

koji primenjen na neki vektor $\vec{X}$ daje

$$(\vec{A}\nabla)\vec{X}=A_1\frac{\partial\vec{x}}{\partial x}+A_2\frac{\partial\vec{x}}{\partial y}+A_3\frac{\partial\vec{x}}{\partial z}\cdot$$

2° Fluks i cirkulacija vektorskog polja. Ako vektor $\vec{A}(\vec{r})$ inducira vektorsko polje u nekoj oblasti V, onda se *fluks vektorskog polja kroz određenu stranu date površi* S iz oblasti V, koja se karakteriše jediničnim vektorom normale $\vec{n}\,(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ naziva integral.

$$\iint\limits_S \vec{A}\,\vec{n}\,dS = \iint\limits_S (Ax\cos\alpha + Ay\cos\beta + Az\cos\gamma)\,dS.$$

Formula Ostrogradskog izražena vektorski ima oblik

$$\iint\limits_S \vec{A}\,\vec{n}\,dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{A}\,dx\,dy\,dz,$$

gde je S površ koja ograničava oblast V, a $\vec{n}$ jedinični vektor spoljne normale površi S.

Cirkulacija vektora $\vec{A}(\vec{r})$ duž neke zatvorene krive c (rad polja) naziva se broj

$$\oint\limits_c \vec{A}\,d\vec{r} = \oint\limits_c Ax\,dx + Ay\,dy + Az\,dz.$$

Vektorski oblik Stocesove formule je

$$\oint\limits_c \vec{A}\,d\vec{r} = \iint\limits_S \vec{n}\operatorname{rot}\vec{A}\,dS,$$

gde je c zatvorena kriva, koja ograničava površ S, pri čemu pravac normale $\vec{n}$ površi S mora biti izabran tako, da se za posmatrača, koji stoji na površi S, a glava mu je u pravcu normale, obilazak konture c vrši suprotno kretanju kazaljke na časovniku (u pravouglom sistemu koordinata).

3° Vrste vektorskih polja. Vektorsko polje $\vec{A}$ za koje je ispunjen uslov

$$\operatorname{rot}\vec{A} = 0$$

naziva se *potencijalno*. U tom slučaju postoji funkcija u, koja se naziva *potencijal polja* $\vec{A}$, takva da je

$$\operatorname{grad} u = \vec{A}.$$

Ako je potencijal i jednoznačna funkcija, onda je

$$\int\limits_{AB} \vec{A}\,d\vec{r} = u(B) - u(A)$$

te je u specijalnom slučaju cirkulacija vektora jednaka nuli.

Vektorsko polje $\vec{A}$ naziva se *salenoidalno* ako je

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0.$$

u svim tačkama polja. Njegov *vektorski potencijal* određuje se iz jednakosti

$$\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{u},$$

gde je $\vec{u}$ neko novo vektorsko polje.

Vektorsko polje $\vec{A}$ za koje su ispunjeni uslovi

$$\operatorname{rot} \vec{A} = 0 \quad \text{i} \quad \operatorname{div} \vec{A} = 0$$

naziva se Laplaceovo.

Vektorsko polje $\vec{A}$ za koje je ispunjen uslov

$$\vec{A} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$$

naziva se *lamelarno*.

Napisati u razvijenoj formi sledeće izraze

1540. 1° $\nabla (f \cdot \varphi)$; 2° $\nabla (f \vec{a})$; 3° $\nabla \times (f \vec{a})$.

1541. Pokazati da je

1° $\operatorname{rot} \vec{c} = 0$, gde je $\vec{c}$ konstantan vektor;

2° $\operatorname{rot} (c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2) = c_1 \operatorname{rot} \vec{a}_1 + c_2 \operatorname{rot} \vec{a}_2$;

3° $\operatorname{rot} (u \vec{a}) = u \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{grad} u \times \vec{a}$.

Ako je $\vec{r}$ vektor položaja tačke a r njegov intenzitet naći:

1542. 1° $\nabla (\vec{r})$; 2° $\nabla (\vec{r})$; 3° $\nabla \left(\frac{1}{r} \right)$; 4° $\nabla \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right)$.

1543. 1° $\nabla (\vec{r}_0)$; 2° $\nabla \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right)$; 3° $\nabla (r^2)$. **1544.** 1° $\nabla x \vec{r}$; 2° $\nabla x \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$.

1545. 1° Δr; 2° $\Delta \left(\frac{1}{r} \right)$, gde je Δ Laplaceov operator.

Dokazati sledeće jednakosti:

1546. $\operatorname{grad} (\vec{u} \vec{v}) = \vec{u} \times \operatorname{rot} \vec{v} + \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{u} + (\vec{u} \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \nabla) \vec{u}$.

1547. $\nabla (\vec{u} \times \vec{v}) = \operatorname{div} (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \operatorname{rot} \vec{u} - \vec{u} \operatorname{rot} \vec{v}$.

1548. $\nabla \times (\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{v} \nabla) \vec{u} - (\vec{u} \nabla) \vec{v} - \vec{v} \operatorname{div} \vec{u} + \vec{u} \operatorname{div} \vec{v}$.

1549. Izračunati $(\vec{a} \times \nabla) \times \vec{b}$.

Dokazati sledeće jednakosti:

1550. $\vec{a} \nabla (\vec{b} \operatorname{grad} f) - \vec{b} \nabla (\vec{a} \operatorname{grad} f) = (\vec{a} \nabla \vec{b} - \vec{b} \nabla \vec{a}) \operatorname{grad} f$.

1551. $\vec{c} [\operatorname{grad} (\vec{c} \vec{a}) + \operatorname{rot} (\vec{c} \times \vec{a})] = \operatorname{div} \vec{a}$, gde je $\vec{c}$ konstantan vektor.

1552. $\operatorname{Grad}\left(\frac{\vec{a}\,\vec{r}}{r^3}\right)+\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{a}\times\vec{r}}{r^3}\right)=0$, gde je $\vec{a}$ konstantan vektor, $\vec{r}$ vektor položaja tačke a r njegov intenzitet.

1553. Izračunati $(\vec{a}\,\nabla)(\vec{b}\,\vec{c})$.

1554. Pokazati da je $(\vec{a}\times\nabla)\,\vec{r}=0$ ako je $\vec{r}$ vektor položaja tačke.

1555. Izračunati $(\vec{a}\times\nabla)\times\vec{r}$ ako je $\vec{r}$ vektor položaja tačke.

1556. Dokazati da je $\operatorname{rot} f(r)\,\vec{r}=0$, ako je $r=|\vec{r}|$.

1557. Ako je $\vec{c}$ konstantan i

$$\vec{A}=\operatorname{grad}(\vec{c}\,\vec{a})+\operatorname{rot}(\vec{c}\times\vec{a})$$

izračunati projekciju vektora $\vec{A}$ na vektor $\vec{c}$.

1558. Ako je $\psi=\psi(x, z, t)$, $\vec{A}=\frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{i}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{k}$, $B=-\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\vec{j}$, kakav dopunski uslov mora zadovoljiti funkcija ψ da bi bilo $\operatorname{rot}\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, $\operatorname{rot}\vec{A}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\operatorname{div}\vec{A}=0$, $\operatorname{div}\vec{B}=0$.

1559. Ako su f i φ skalarne dvaput diferencijabilne funkcije izvesti obrazac za $\nabla^2 f\varphi=\Delta f\varphi$.

Dokazati sledeće identitete (smisao oznaka je očigledan):

1560. $\nabla^2(\vec{A}\,\vec{B})=\vec{A}\,\nabla^2\vec{B}+\vec{B}\,\nabla^2\vec{A}+2\,\nabla_{\vec{A}}\nabla_{\vec{B}}(\vec{A}\,\vec{B})$.

1561. $\nabla^2(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{A}\times\nabla^2\vec{B})-(\vec{B}\times\nabla^2\vec{A})+2\nabla_{\vec{A}}\nabla_{\vec{B}}(\vec{A}\times\vec{B})$.

1562. $\nabla^2(\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})\,\nabla^2\vec{C}+(\vec{B}\times\vec{C})\,\nabla^2\vec{A}+(\vec{C}\times\vec{A})\,\nabla^2\vec{B}+2\,\nabla_{\vec{A}}\nabla_{\vec{B}}(\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C})+$
$+2\,\nabla_{\vec{B}}\nabla_{\vec{C}}(\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C})+2\,\nabla_{\vec{C}}\nabla_{\vec{A}}(\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C})$.

1563. 1° $\iiint\limits_V \varphi\operatorname{div}\vec{a}\,dV=\oiint\limits_S \varphi\,\vec{a}\,d\vec{S}-\iiint\limits_V \vec{a}\operatorname{grad} d\varphi\,dV$;

2° $\iiint\limits_V \vec{a}\operatorname{rot}\vec{a}\,dV=\iiint\limits_V \vec{b}\operatorname{rot}\vec{a}\,dV-\oiint\limits_S d\vec{S}\,(\vec{a}\times\vec{b})$,

gde su φ, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ proizvoljne neprekidne funkcije a S je zatvorena površ koja ograničava oblast V.

1564. $\oiint\limits_S \left[\varphi \nabla\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\nabla\varphi\right] d\vec{S} + \iiint\limits_V \frac{1}{r}\nabla^2\varphi\, dV = 0$, gde je r rastojanje tačke M od koordinatnog početka O koja leži izvan prostora V ograničenog zatvorenom površinom S a φ je skalarna funkcija tačke M.

1565. $\oiint\limits_S \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS = \iiint\limits_V (\operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\psi + \varphi\,\Delta\,\psi)\, dV$,

gde su φ i ψ skalarne funkcije tačke $M \in V$, a $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ izvod funkcije ψ u pravcu normale površi.

1566. Koju osobinu mora imati vektor $\vec{a}$ da bi za proizvoljnu zatvorenu površ S važila relacija

$$\oiint\limits_S (\vec{c}\, d\vec{S})\, \vec{a} = \oiint\limits_S d\vec{S}\, (\vec{a}\,\vec{c}),$$

gde je $\vec{c}$ konstantan vektor?

1567. Ako je $\vec{a}$ konstantan vektor a S zatvorena površ koja obuhvata zapreminu V, pokazati da je $\oiint\limits_S (\vec{r} \times \vec{a}) \times d\vec{S} = 2\, V\vec{a}$.

1568. Ako je $\vec{r}$ vektor položaja tačke u prostoru, $\vec{n}$ konstantni jedinični vektor a c zatvorena prostorna kriva, pokazati da je: $\vec{n} \cdot \oint\limits_c \vec{r} \times d\vec{r}$ jednak dvostrukoj vrednosti površine ograničene projekcijom krive c na ravan $\vec{n}\,\vec{r} = p$, gde je $p \in R$.

1569. Transformisati krivolinijski integral $\oint\limits_c d\vec{r} \times \vec{a}$ u površinski, ako je kriva c ograničena linija površi. Ispitati slučajeve

1° $\vec{a} = \vec{r}$ i 2° $\vec{a} = \vec{r} \times \vec{c}$, gde je $\vec{c}$ konstantan vektor a $\vec{r}$ vektor položaja tačke polja.

1570. Izraziti preko ortova vektorsko polje $\vec{A} = \vec{c} \times \operatorname{grad} u$, ako je

$$u = \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{i} \quad \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

Izračunati fluks sledećih vektorskih polja:

1571. $\vec{A} = (x - 2\,z)\,\vec{i} + (3\,z - 4\,x)\,\vec{j} + (5\,x + y)\,\vec{k}$, kroz spoljnu stranu piramide čija su temena (1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (0, 0, 0).

1572. $\vec{A} = xy\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$, kroz spoljni deo sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ koji pripada prvom oktantu.

1573. $\vec{A}=x\vec{i}+2y\vec{j}-z\vec{k}$, kroz spoljnu stranu sfere $x^2+y^2+z^2=4$.

1574. $\vec{A}=yz\vec{i}-x\vec{j}-y\vec{k}$, kroz spoljnu stranu dela konusa $x^2+y^2=z^2$ ograničenog ravnima $z=0$ i $z=1$.

1575. $\vec{A}=x^2\vec{i}+x\vec{j}+xz\vec{k}$, kroz deo spoljne strane rotacionog paraboloida $y=x^2+z^2$, koji pripada prvom oktantu i ograničen je ravni $y=1$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$.

1576. $\vec{A}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$, kroz površ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=\dfrac{z^2}{b^2}$, $0\leqslant z\leqslant b$ u pravcu spoljne normale.

1577. Izračunati fluks sile $\vec{a}=-f\dfrac{e}{R^2}\vec{r}_0$ kojom jedinično elektrostatičko opterećenje u polju O dejstvuje na opterećenje e u tački M sfere čiji je centar u O a poluprečnik R $(\vec{r}_0=\text{ort}\,\overrightarrow{OM})$ kroz tu sfernu površ.

1578. Izračunati fluks vektora

$$\vec{A}=\sum_{i=1}^{n}\nabla\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right),$$

gde je e_i konstanta a r_i rastojanje tačke M_i (izvora) od promenljive tačke M, kroz zatvorenu površ S, koja sadrži tačke M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$.

1579. Dokazati da fluks vektora $\vec{A}$ kroz površ S, zadatu jednačinom $\vec{r}=\vec{r}(u, v)$ $[(u, v)\in D]$ iznosi

$$\iint_S \vec{A}\vec{n}\,dS=\iint_D\left(\vec{A}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right)du\,dv.$$

1580. Količina toplote, koja proteče u polju temperature u za jedinicu vremena kroz element površi dS, iznosi

$$dQ=-k\vec{n}\,\mathrm{grad}\,u\,dS,$$

gde je k koeficijent unutrašnje provodljivosti toplote a $\vec{u}$ jedinični vektor normale površi S. Odrediti količinu toplote, koju akumulira telo V u jedinici vremena. Koristeći brzinu porasta temperature, izvesti jednačinu koju zadovoljava temperatura tela (*jednačina termoprovodljivosti*).

Izračunati linijske integrale:

1581. $\int_c \vec{A}\,d\vec{r}$ gde je $\vec{A}=x\vec{i}+y\vec{j}+(x+y-1)\vec{k}$

dok je c deo prave između tačaka $(1, 1, 1)$ i $(2, 3, 4)$.

1582. $\int\limits_c \vec{A}\, d\vec{r}$, gde je $\vec{A} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x(x-1) + y(y-1) + z(z-1)}}$, duž prave između tačaka (1, 1, 1), (4, 4, 4).

Naći rad koji izvrši sila:

1583. $\vec{A} = (2a - y)\vec{i} + (y - a)\vec{j}$, duž prvog luka cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

1584. $\vec{A} = x^2\vec{i} + y\vec{j} + \cos z\vec{k}$, duž zavojnice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = 2t$ od tačke $t = 0$ do tačke $t = \dfrac{3}{2}\pi$.

1585. $\vec{A} = f(r)\vec{r}$ gde je f neprekidna funkcija duž luka AB.

1586. Prvo direktno a zatim pomoću Stocesove formule izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{A} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ duž konture c koja se dobija presekom paraboloida $x^2 + z^2 = 1 - y$ sa koordinatnim ravnima.

Izračunati cirkulaciju sledećih vektorskih polja:

1587. $\vec{A} = xz\vec{i} - yz^2\vec{j} + xy\vec{k}$, duž zatvorene linije $z^2 = x^2 - y^2 + 2a^2$, $x^2 + y^2 = a^2$.

1588. $\vec{A} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$, duž zatvorene linije $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$ $(z > 0)$.

1589. $\vec{A} = -y\vec{i} + x\vec{j} + c\vec{k}$ ($c \in R$: 1° duž kruga $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; 2° duž kruga $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

1590. $\vec{A} = \nabla\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}\right)$ duž konture c: 1° ako kontura c ne obilazi Oz osu; 2° ako je obilazi.

1591. Ravni stacionarni tok tečnosti karakteriše se vektorom brzine

$$\vec{w} = u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j}.$$

Odrediti: 1° količinu tečnosti koja protekne kroz zatvorenu konturu c, koja ograničava oblast D (gubitak tečnosti); 2° cirkulaciju vektora brzine duž konture c? Kakve uslove moraju zadovoljiti funkcije u i v, ako je tečnost nestišljiva a tok bezvrtložan?

1592. Pokazati da je vektorsko polje $\vec{a} = f(r)\vec{r}$ potencijalno i naći njegov potencijal.

1593. Dato je vektorsko polje

$$\vec{A} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}.$$

Pokazati da je to polje potencijalno i naći njegov potencijal.

1594. Ako polje brzina $\vec{v}$ ima potencijal φ pokazati da i polje vektora ubrzanja $\vec{w}$ ima potencijal i naći taj potencijal.

1595. Odrediti konstante a, b i c tako da polje vektora

$$\vec{A}=(x+2\,y+az)\vec{i}+(bx-3\,y-z)\vec{j}+(4\,x+cy+2\,z)\vec{k}$$

bude potencijalno i naći njegov potencijal.

1596. Ako je $\vec{c}$ konstantan vektor, $\vec{r}$ vektor položaja tačke u prostoru, r njegov intenzitet, ispitati koja su od sledećih vektorskih polja

$$1^\circ\ (\vec{c}\,\vec{r})\,\vec{r};\qquad 2^\circ\ (\vec{c}\,\vec{r})\,\vec{c};\qquad 3^\circ\ \vec{r}\,\vec{c}+\frac{1}{r}(\vec{c}\,\vec{r})\,\vec{r};\qquad 4^\circ\ \vec{r}\,\vec{c}-\frac{1}{r}(\vec{c}\,\vec{r})\,\vec{r}$$

— potencijalna i naći njihov potencijal.

1597. Pokazati da je polje vektora

$$\vec{v}=\begin{cases}\vec{r} & \text{za } r\leqslant a,\\ -a^3\,\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right) & \text{za } r>a,\end{cases}$$

gde je $a\in R$, neprekidno i potencijalno u celom prostoru. Naći neprekidan potencijal $F(r)$ toga polja i izračunati $\int\limits_0^\infty \vec{V}\,d\vec{r}$.

1598. Pokazati da je vektorsko polje $\vec{A}=f(r)\,\vec{r}$ salenoidalno ako je $f(r)=\dfrac{k}{r^3}$, gde je k neka konstanta.

1599. Odrediti funkciju $f(x)$ tako da polje vektora

$$\vec{A}=f(x)\,\vec{i}+2\,\frac{xy}{1+x^2}\,f(x)\,\vec{j}-\frac{3\,z}{1+x^2}\,\vec{k}$$

bude solenoidalno uz dopunski uslov $f(1)=\dfrac{3}{2}$, zatim naći vektorski potencijal.

1600. Ispitati kakvo je polje $\vec{A}=r(\vec{c}\times\vec{r})$ i naći njegov potencijal.

1601. Pokazati da polje vektora $\vec{v}=(\vec{r}-\vec{a})\times(\vec{r}-\vec{b})$ ($\vec{a}$ i $\vec{b}$ su konstantni vektori) ima vektorski potencijal $\vec{w}=\vec{r}\times\left[\dfrac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{r}-\dfrac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b})\right]$.

1602. Pokazati da je polje $\vec{A}\{1+yz,\ x(z-x)\ -(1+xy)\}$ lamelarno i salenoidalno i naći njegov vektorski potencijal.

1603. Pokazati da je vektorsko polje $\vec{A}=\frac{\vec{r}}{r^3}$ Laplaceovo i da je njegov potencijal harmonijska funkcija, tj. da zadovoljava jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z}=0.$$

1604. Odrediti najopštiju harmonijsku funkciju $u(x, y)$ oblika

$$u(x, y)=ax^3+bx^2 y+cxy^2+dy^3$$

a zatim naći funkciju oblika $V(x, y)$ za koju je $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ i $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$. Najzad pokazati da se tako dobijenim funkcijama u i v, kompleksna funkcija $u(x, y)+iv(x, y)$ može predstaviti kao funkcija kompleksne promenljive z.

1605. Naći bar jedno salenoidalno polje $\vec{a}=\vec{a}(x, y, z)$ iz uslova $\int \vec{a}\,d\vec{s}=20$, gde je L kontura četvorougla $ABCD$: $A(2, -1, 8)$, $B(12, -1, 8$,

$$C(12, 1, 8),\ D(2, 1, 8).$$

1606. Pokazati, ako je polje vektora $\vec{A}$ Laplaceovo da onda njegove koordinate P, Q, i R moraju biti harmonijske funkcije.