16.10.18.

PREDAVANJA 4

Andjelković

HOMOGENA LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

opšti oblik:

$$\boxed{y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\cdot y = b(x)}$$ linearna

homogena lin. dif. j-na n-tog reda

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = 0$$!

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in C(I)$$

$\boxed{G = I \times \mathbb{R}^n}$ → saglasno teoremi

skup rješenja obrazuje vektorski prostor

→ uvedimo u razmatranje operator $L: C^n(I) \to C(I)$ definisan na sledeći način

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y$$

→ $L(y) = 0$ → linearni operator → linearan, homogen, aditivan

* Operator L je linearan, jer zadovoljava uslove:

1) $\forall y_1, y_2 \in C^n(I): \ L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall y \in C^n(I): \ L(\alpha y) = \alpha L(y)$

Dokaz 1)

$$L(y_1 + y_2) = (y_1 + y_2)^{n} + a_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)(y_1 + y_2) =$$

$$= y_1^{(n)} + y_2^{(n)} + a_1(x)\, y_1^{(n-1)} + a_1(x)\, y_2^{(n-2)} + \ldots +$$

$$+ a_n(x)\, y_1 + a_n(x)\, y_2 =$$

$$= \underbrace{y_1^{(n)} + a_1(x) y_1^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y_n}_{= \quad L(y_1)} + \underbrace{y_2^{(n)} + a_1(x) y_2^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y_n}_{+ \quad L(y_2)}$$

$\Rightarrow$ aditivno

- na isti način bi pokazali da je:
$L(\alpha y) = \alpha L(y) \rightarrow$ homogeno

$\rightarrow$ operator L homogen i aditivan $\Rightarrow$ lin. op.

TEOREMA: Skup rješenja homogene linearne diferencijalne jednačine obrazuje vektorski prostor nad poljem realnih (ili kompleksnih) brojeva.

$\rightarrow$ Neka je $D = \{ y \in C^{(n)}(I) : L(y) = 0 \}$ skup svih rješenja homogene linearne diferencijalne jednačine.

$\rightarrow$ hoćemo da pokažemo da je ovo vektorski prostor

$\rightarrow$ pokazaćemo da je skup D vektorski potprostor

$\hookrightarrow$ skup koji je vektorski prostor sam za sebe ali je dio nekog većeg prostora

$*$ Neka je $D = \{ y \in C^{(n)}(I) : L(y) = 0 \}$. Treba dokazati:

1) $\forall y_1, y_2 \in D : y_1 + y_2 \in D$ # zbir bilo koja 2 el. takođe u skupu

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall y \in D : \alpha y \in D$ # $\alpha \cdot y$ takođe u skupu, $\alpha \in \mathbb{R}$

- ako ovo dokažemo $\Rightarrow$ D je vektorski potprostor prostora $C^{(n)}(I)$

1. $y_1, y_2 \in D \rightarrow$ to znači da je $y_1, y_2 \in C^{(n)}(I)$ i $L(y_1) = L(y_2) = 0$

$\rightarrow$ zbir neprekidnih fja je neprekidna fja

$y_1 + y_2 \in C^n(I)$; $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow y_1 + y_2 \in D$

(2.) $\alpha \in \mathbb{R}$, $y \in D$, $y \in C^n(I)$, $L(y)=0$

$\alpha \cdot y \in C^n(I) \rightarrow L(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot L(y) = \alpha \cdot 0 = 0$

neprekidno diferencijabilna n puta na I

$\Rightarrow \alpha y \in D$

→ iz (1) i (2) ⇒ D je vektorski potprostor prostora $C^n(I)$

⇒ to znači da je D sam za sebe vektorski prostor

Posledica: Ako su $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ($\varphi_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$) rješenja homogene linearne diferencijalne jednačine

$\Rightarrow c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \cdot \varphi_n(x)$ je takođe rješenje.

↳ znači: linearna kombinacija svih rješenja takođe rješenje.

prethodnom teoremom smo utvrdili da je skup rješenja homog. ~~lin.~~ dif. j-ne vektorski prostor. Postavlja se pitanje šta je njegova baza? Prije toga; pojam linearne zavisnosti i nezavisnosti skupa f-ja.

DEFINICIJA: Funkcije $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, $x \in I$, su linearne nezavisne ako iz linearne kombinacije $\alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0$, $x \in I$, gdje su $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ slijedi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

→ Funkcije koje nisu linearno nezavisne su linearno zavisne.

Primjer a) $1, x, x^2$

$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 x^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow$ lin. nez. f-je

b) $1, \sin^2 x, \cos^2 x$

$1 = \sin^2 x + \cos^2 x, \ \forall x$

$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \sin^2 x + \alpha_3 \cos^2 x = 0$

za $\alpha_1 = -1$

$\alpha_2 = \alpha_3 = 1$

zadovoljeno ⇒ linearno zavisna kombinacija

$(x \in I)$

→ Neka su $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ rješenja homogene linearne diferencijalne jednačine. Tada determinantu:

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & & \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

nazivamo determinantom Vronskog

TEOREMA: Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1) $\forall x \in I : W(x) = 0$
2) $\exists x_0 \in I : W(x_0) = 0$
3) Rješenja $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, $x \in I$, homogene dif. ln.-j-ne su linearno zavisna.

(neformalni): dokaz → pokazati da $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ → time zatvoren krug

* $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ → nema potrebe izvoditi

* $\boxed{2 \Rightarrow 3}$

- pretpostavka $W(x) = 0$
- znamo da su rješenja lin. dif. j-ne - treba samo da dokažemo da su nezavisna

Posmatrajmo neku funkciju:

(1) $\underbrace{\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + C_n\varphi_n(x)}$ opšte rješenje

takođe opšte rješenje na osnovu posledice sa prethodne strane

→ Posmatrajmo rješenje u tački x_0

→ Neka jednačina (1) zadovoljava Košijeve uslove (

$\varphi(x_0) = 0, \quad \varphi'(x_0) = 0 \dots \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0$

→

Kako ćemo odrediti rješenje jednačine (1) koje zadovoljava uslove (2) ?

- uvrstimo uslove u početnu fju

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x_0) &= c_1\varphi_1(x_0)+\ldots+c_n\varphi_n(x_0)=0 \\ \varphi'(x_0) &= c_1\varphi'(x_0)+\ldots+c_n\varphi_n'(x_0)=0 \\ &\vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0) &= c_1\varphi^{(n-1)}(x_0)+\ldots+c_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{aligned}\right\}\text{ sistem (3)}$$

→ nepoznato $c_1, c_2, \ldots, c_n$

→ ovaj sistem uvijek ima trivijalno rješenje

→ netrivijalno rješenje ima ako je det = 0

→ determinanta našeg sistema (3) je determinanta Vrouskog u tački x_0

$W(x_0)=0$ → det. sistema

↳ $\exists$ netrivijalno rješenje $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0$,

znači $(c_1^0 = c_2^0 = \ldots = c_n^0 = 0 \perp)$

→ mi sad za to c^0 uzimamo:

$\varphi(x) = c_1^0\varphi_1(x)+\ldots+c_n^0\varphi_n(x)$

↳ to je takođe rješenje homogene dif. jne (1) koje zadovoljava uslov (2)

ovu jnu (1) i uslov (2) zadovoljava i trivijalno rješenje $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=0$

$y \equiv 0$ → rješ. hom. dif. lin. j-ne koje zadovoljava uslov (2)

→ dobili smo 2 rješenja → to nije moguće → pa je jedino moguće da su ova 2 rješenja ista

to znači da je $\varphi(x)=0$ odnosno

$c_1^0\varphi_1(x)+\ldots+c_n^0\varphi_n(x)=0$ → na osnovu def. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ su lin. zavisni

(*) $\boxed{3 \Rightarrow 1}$

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x) \rightarrow$ lin. zavisna rješenja homog. lin. dif. j-ne

$c_1^0 \varphi_1(x) + \dots + c_n^0 \varphi_n(x) = 0$, za netrivijalno c_1^0 do c_n^0 $(c_1^0, \dots, c_n^0)$

$\rightarrow$ ovo sad diferenciramo $(n-1)$ put

$$\rightarrow \quad (4) \begin{cases} c_1^0 \varphi_1(x) + \dots + c_n^0 \varphi_n(x) = 0 \,/\,' \\ c_1^0 \varphi_1'(x) + \dots + c_n^0 \varphi_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1^0 \varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n^0 \varphi_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ ovaj homogeni sistem (4) ima netrivijalno rješenje ako je det. sistema $= 0$; u našem slučaju to je det Vronskog $\Rightarrow \underbrace{W(x) = 0, \forall x \in I}$

negacija prethodne teoreme ↓

TEOREMA: Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1) $\exists x_0 \in I$, $W(x_0) \neq 0$
2) $\forall x \in I$, $W(x_0) \neq 0$
3) rješ. homog. lin. dif. j-ne $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ su linearno nezavisna

$\rightarrow$ dokazi prethodne i ove teoreme se mogu izvesti koristeći tzv. formulu Ostrogradskog-Liuvila

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \rightarrow$$

- ako diferenciramo vrste det. Vronskog

$$W'(x) = W_1'(x) + W_2'(x) + \dots + W_n'(x) \qquad (5)$$

det. gdje smo diferencirali samo prvu vrstu, ostalo sve ostaje isto

$$W_1'(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x) & \varphi_n^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

jer ima 2 iste vrste

→ i tako sve do pretposlednje

$$W_2'(x) = W_3'(x) = \dots = W_{(n-1)}'(x) = 0$$

$$W_n'(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \dots & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \dots & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

→ sve ovo što smo dobili vratimo u j-nu (5)

$$W'(x) = W_n'(x)$$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 \rightarrow \text{j-na}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \rightarrow$ rješenja j-ne

$$\rightarrow \varphi_i^{(n)}(x) + a_1(x)\varphi_i^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)\cdot\varphi_i(x) = 0, \quad \underbrace{i = 1, \dots, n}$$

$$\underbrace{\varphi_i^{(n)}(x) = -a_1(x)\varphi_i^{(n-1)}(x) - \dots - a_n(x)\varphi_i(x)}$$

Kada ovo uvrstimo u $W_n'(x)$

→

$$W'(x) = W_n'(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \\ -a_1(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) - \ldots - a_n(x)\varphi_1(x) & \cdots & -a_1(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) - \ldots - a_n(x)\varphi_n(x) \end{vmatrix}$$

→ iskoristićemo svojstvo: $\begin{vmatrix} \text{—} & \text{—} \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{—} & \text{—} \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{—} & \text{—} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

$$W'(x) = W_n'(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \\ -a_1(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) & \cdots & -a_1(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+ \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_n(x)\varphi_1(x) & \cdots & -a_n(x)\varphi_n(x) \end{vmatrix} =$$

det. množimo brojem tako što jednu vrstu pomnožimo brojem

$$= -a_1(x) \underbrace{\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}_{W(x) \text{ - det Vronskog}} \underbrace{- \ldots}_{=0} - a_n(x) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \end{vmatrix}}_{=0}$$

jer imaju po 2 iste vrste

sve imaju parnjaka osim n-1

$\Rightarrow$ dobijamo da je $W'(x) = W'_n(x) = W(x)$

$\rightarrow \underline{W'(x) = -a_1(x)W(x)}$ dif. j-na sa razdvojenim promjenljivim

$$\frac{dW}{W} = -a_1(x)\,dx \rightarrow \ln W = -\int a_1(x)dx$$

$$W = c\cdot e^{-\int a_1(x)dx} \rightarrow \text{ako } W(x_0) = W_0 \Rightarrow C = W(x_0)$$

kad zamijenimo dobijamo konst c

$$\rightarrow \boxed{W(x) = W(x_0)\cdot e^{-\int_{x_0} a_1(x)dx}}$$

FORMULA OSTROGRADSKI-LIUVIL

LEMA: Homogena lin. dif. j-na (1) ima n linearno nezavisnih rješenja

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

$\rightarrow$ Postavlja se pitanje kako da nađemo n rješenja tako da su sigurno linearno nezavisna?

– tako da det Vronskog tih rješenja $\neq 0$

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x) \rightarrow$ rješenja

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \vdots & & & \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) & \varphi_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

$\rightarrow$ najjednostavnije da „upakujemo" jediničnu matricu $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & 1 \end{vmatrix}$

→ postavljamo tako da je:

$\varphi_1^{(i)}(x_0) = \begin{cases} 1, & i=0 \\ 0, & i=1,\dots,n \end{cases}$; $\varphi_2^{(i)}(x_0) = \begin{cases} 1, & i=1 \\ 0, & i=0,2,\dots,n \end{cases}$;

$\dots$; $\varphi_n^{(i)} = \begin{cases} 1, & i=n-1 \\ 0, & i=0,1,\dots,n-2 \end{cases}$

$\boxed{\delta_i^{(j)} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}}$ → $\boxed{\varphi_j^{(i)}(x_0) = \delta_i^{j-1}}$

Kronekerov simbol

$j=1,\dots,n;\quad i=0,\dots,n$

→ cilj bio samo da postoji n linearno nezavisnih vektora

→ želimo da pokažemo da svaka kombinacija n linearno nezavisnih vektora obrazuje bazu

TEOREMA: Proizvoljnih n linearno nezavisnih rješenja homogene dif. j-ne obrazuje bazu prostora D

→ neka su $\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)$, $x\in I$ proizvoljnih n lin.nez.rj.

→ svaki vektor iz prostora D može se izraziti kao lin. kombinacija vektora $\boxed{\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)}$ *

Dokaz: $\varphi(x)$ → rješenje homogene linearne dif. j-ne

$\underbrace{\varphi(x_0)=\varphi_0,\quad \varphi'(x_0)=\varphi_0',\quad \dots,\quad \varphi^{(n-1)}(x_0)=\varphi_0^{n-1}}_{\text{brojevi}}$

→ formirajmo linearnu kombinaciju ovih vektora * u tački x_0

$$\varphi(x_0) = c_1\varphi_1(x_0)+\dots+c_n\varphi_n(x_0) = \varphi_0$$

$$\varphi'(x_0) = c_1\varphi_1'(x_0)+\dots+c_n\varphi_n'(x_0) = \varphi_0'$$

$$\vdots$$

$$\varphi^{(n-1)}(x_0) = c_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0)+\dots+c_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = \varphi_0^{n-1}$$

→ treba postaviti neke brojeve da to bude sistem
- neka su to $\varphi_0, \varphi_0^1, \dots, \varphi_0^{n-1}$

⇒ SISTEM - sistem oblika $Ax=b$, $\det A \neq 0$
→ u našem slučaju $A = \det$ Vronskog

$W(x_0) \neq 0$

→ POSTOJI TAČNO JEDNO RJEŠENJE $\boxed{c_1^0, \dots, c_n^0}$

jeste rj. j-ne

$\psi(x) = c_1^0 \varphi_1(x) + \dots + c_n^0 \varphi_n(x)$

koje zadovoljavaju uslove

$\psi(x_0) = \varphi_0$; $\psi'(x_0) = \varphi_0^1, \dots, \psi^{(n-1)}(x_0) = \varphi_0^{n-1}$

POSTOJI SAMO JEDNO RJEŠENJE KOŠIJEVOG ZADATKA

→ Zaključujemo da je $\varphi(x) \equiv \psi(x)$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \underbrace{c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x)}$$

→ proizvoljno rješenje izrazili kao linearnu kombinaciju rješenja φ_i → dobili smo da je

$\boxed{\text{dimenzija } D = n}$

* Baza prostora ovog rješenja homogene linearne diferencijalne jednačine naziva se fundamentalni skup

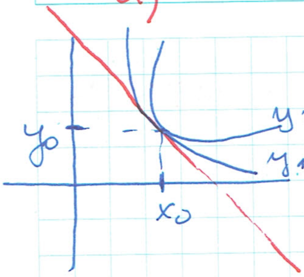
opšte rješenje → linearna kombinacija elemenata baze

$$\boxed{y = c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x)}$$

Primjer Mogu li grafici 2 rješenja ove j-ne $y'' + q(x)y = 0$, $q \in C(\mathbb{R})$ biti raspoređeni kao na slikama? →

(K.z ide od y_0 do y_0^{n-1}

a)



$$y'' + g(x)\,y = 0, \quad g \in C(\mathbb{R})$$

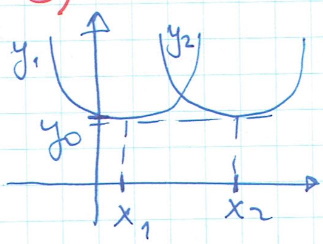
→ KAKO GLASI KOŠIJEV ZADATAK ZA OVU J-NU?

$$y(x_0) = y_0 ; \quad y'(x_0) = y_0'$$

$$y_1(x_0) = y_0 \qquad y_1'(x_0) = y_0'$$
$$y_2(x_0) = y_0 \qquad y_2'(x_0) = y_0'$$

ne može jer K.z. može da ima samo jedno rj:

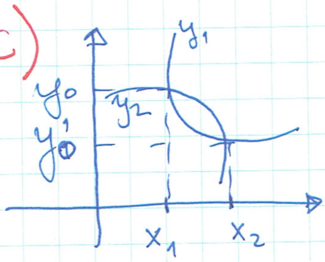
b)



$$y_1(x_1) = y_0 \qquad y_2(x_2) = y_0$$
$$y_1'(x_1) = 0 \qquad y_2'(x_2) = 0$$

nije moguće jer nije ista tačka a rješ. je isto

c)



$$y_1(x_1) = y_2(x_1) = y_0$$
$$y_1(x_2) = y_2(x_2) = y_0'$$

→ iz ovoga ne možemo, moramo još jedan uslov

$$\left.\begin{aligned} y_1'(x_0) &= y_0' \\ y_2'(x_0) &= y_0^2 \end{aligned}\right\} \neq$$

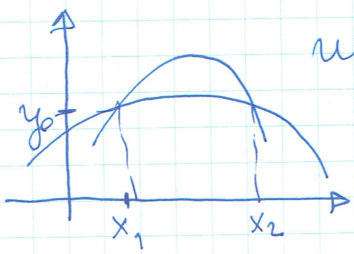
na prvi pogled može ali nismo iskoristili j-nu

$$y'' + g(x) \cdot y = 0$$
$$y''(x_0) = -g(x_0) \cdot y(x_0)$$

$$y_1''(x_0) = -g(x_0)\,y_0 \quad \text{1. fja k}$$
$$y_2''(x_0) = -g(x_0)\,y_0 \quad \text{2. fja konveks}$$

→ ne može!

d)



uraditi kući :)

Ana