Planarni grafovi

Definicija 1. *Graf $G = (V, E)$ je planaran ako se može nacrtati u ravni tako da mu se grane ne sijeku. Takav crtež je ravanska reprezentacija grafa G.*

Ravanska reprezentacija planarnog grafa razbija ravan na oblasti od kojih je jedna neograničena. Označimo sa $\mathcal{F}$ familiju ovih oblasti. Stepen oblasti $F \in \mathcal{F}$, u oznaci $d(F)$, je broj grana grafa G koje se nalaze na granici oblasti F. Ako je grana most brojimo je dva puta.

Lema 1. *Neka je G planaran graf sa m grana i $\mathcal{F}$ familiju oblasti na koje njegova ravanska reprezentacija razbija ravan. Tada važi:*

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} d(F) = 2m$$

Dokaz:

$\vdots$

$\square$

Teorema 1. **(Ojlerova teorema, 1750.)** *Ravanska reprezentacija povezanog planarnog graf sa n čvorova i m grana razbija ravan na $\phi = m - n + 2$ oblasti.*

Dokaz:

$\vdots$

$\square$

Posljedica 1. *Ako je G planaran graf sa n čvorova, $n \geq 3$, broj njegovih grana m zadovoljava nejednakost: $m \leq 3n - 6$*

Dokaz:

$\vdots$

$\square$

Posljedica 2. *Potpun pentagraf K_5 nije planaran.*

Dokaz: $\vdots$ $\square$

Posljedica 3. *Potpun bitrigraf $K_{3\times3}$ nije planaran.*

Dokaz: $\vdots$ $\square$

Posljedica 4. *Konveksni poliedar sa n tjemena i m ivica ima $m - n + 2$ strane.*

Dokaz: $\vdots$ $\square$

Definicija 2. *Poliedar je pravilan ako su sve njegove strane podudarni mnogouglovi i svako tjeme je incidentno sa istim brojem ivica.*

Posljedica 5. *Postoji tačno pet pravilnih poliedara*

Dokaz: $\vdots$ $\square$

Teorema 2. (Pontrjagin-Kuratovski, 1930.) *Graf je planaran akko ne sadrži podgraf izomorfan sa K_5 ili $K_{3\times3}$ ili sa grafom koji se može dobiti iz K_5 ili $K_{3\times3}$ konačnom primjenom operacije podjela grana (potpodjele ili podrazbijanja grafa).*

Teorema 3. (Vagner, 1937.) *Graf G je planaran akko ne sadrži podgraf koji se može kontrahovati na K_5 ili $K_{3\times3}$, to jeste, ni K_5 ni $K_{3\times3}$ nisu njegovi minori.*