Granična vrijednost niza. Granična vrijednost funkcije jedne promjenljive

Doc. dr Nevena Mijajlović

Računarstvo i informacione tehnologije, PMF

Matematika 3

Primjer: $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

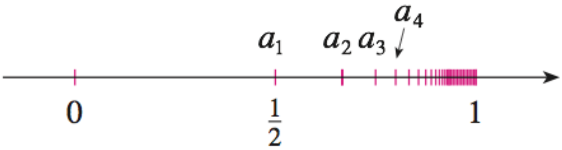
Granična vrijednost niza

Primjer: $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{4}, a_4 = \frac{4}{5}, \ldots$

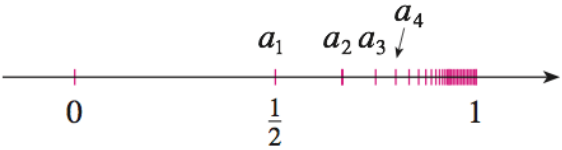
Primjer: $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{4}{5}$, $\ldots$



Primjer: $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

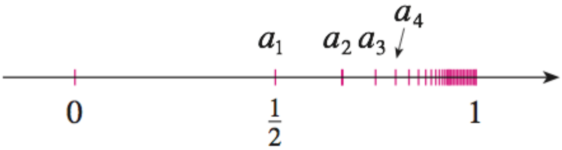
$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{4}{5}$, ...



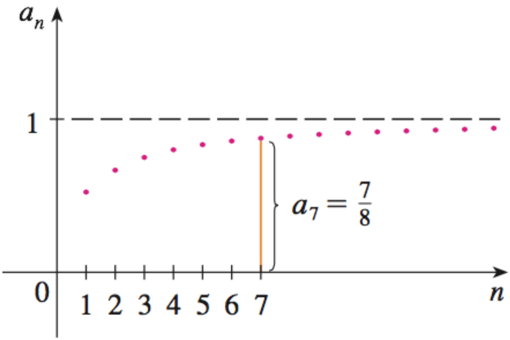
- Niz a_n je rastući

Primjer: $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{4}{5}$, $\ldots$



- Niz a_n je rastući
- Niz a_n je ograničen



Za veliko $n \in \mathbb{N}$, a_n se približava 1. Zaista,

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad \text{za dovoljno veliko } n \in \mathbb{N}$$

Ovo zapisujemo sa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Uopste, oznaka

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

znači da niz (a_n) teži L za dovoljno veliko n.

Defnicija granične vrijednosti niza

Konačan broj L je **granična vrijednost niza** (a_n) ako važi

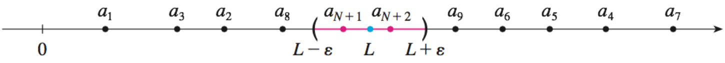
$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

Kažemo da niz (a_n) teži broju L i niz (a_n) konvergira.

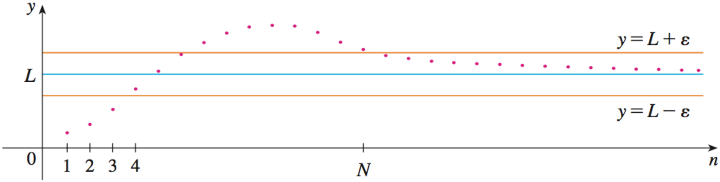
Zapisujemo sa $a_n \to L$ $(n \to \infty)$ ili češće $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Za niz koji ne kovregira kažemo da **divergira**.

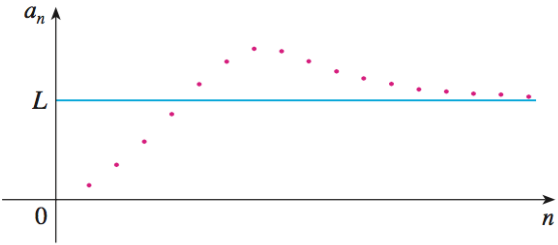
Nije bitno koliko mali interval $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ je izabran, uvijek postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da svi elementi niza počevši od a_{N+1} se nalaze u tom intervalu.

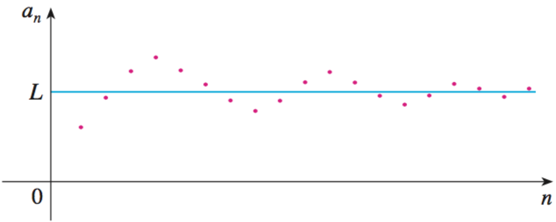


Geometrijsko značenje definicije:



Primjeri konvergentnih nizova:





Ako a_n postaje veće kako se n povećava, tada koristimo oznaku $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ znači da za svaki pozitivni broj M postoji prirodan broj N takav da

$$\text{ako } n > N \text{ tada } a_n > M.$$

Ako $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, tada je niz a_n divergentan, ali na specijalan način. Kažemo da a_n divergira ka ∞.

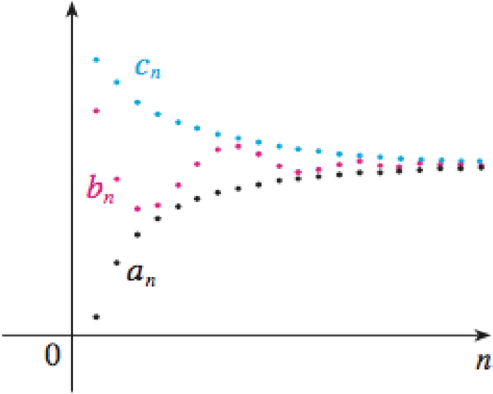
Svojstva

Neka su nizovi a_n i b_n konvergentni i c konstanta. Tada važi:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p$ ako $p > 0$ i $a_n > 0$

Teorema o uklještenju

Ako je $a_n \leq b_n \leq c_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.



Teorema o monotonom i ograničenom nizu

Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

Teorema o monotonom i ograničenom nizu

Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

Primjer: Ispitati konvergenciju niza zadatog sa

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6), \ n \in \mathbb{N}.$$

Teorema o monotonom i ograničenom nizu

Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

Primjer: Ispitati konvergenciju niza zadatog sa

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje: Odredimo prvih nekoliko članova: $a_1 = 2, a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 5.5$, $a_5 = 5.75$, $a_6 = 5.875$, $a_7 = 5.9375\ldots$

Teorema o monotonom i ograničenom nizu

Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

Primjer: Ispitati konvergenciju niza zadatog sa

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6),\ n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje: Odredimo prvih nekoliko članova: $a_1 = 2, a_2 = 4,$ $a_3 = 5$, $a_4 = 5.5$, $a_5 = 5.75$, $a_6 = 5.875$, $a_7 = 5.9375\ldots$ Početnih nekoliko članova nam sugeriše da je niz rastući.

Teorema o monotonom i ograničenom nizu

Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

Primjer: Ispitati konvergenciju niza zadatog sa

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6), \ n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje: Odredimo prvih nekoliko članova: $a_1 = 2, a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 5.5$, $a_5 = 5.75$, $a_6 = 5.875$, $a_7 = 5.9375 \ldots$
Početnih nekoliko članova nam sugeriše da je niz rastući.
Koristeći matematičku indukciju dokazaćemo da je $a_{n+1} > a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Teorema o monotonom i ograničenom nizu

Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

Primjer: Ispitati konvergenciju niza zadatog sa

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6),\ n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje: Odredimo prvih nekoliko članova: $a_1 = 2, a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 5.5$, $a_5 = 5.75$, $a_6 = 5.875$, $a_7 = 5.9375\ldots$
Početnih nekoliko članova nam sugeriše da je niz rastući.
Koristeći matematičku indukciju dokazaćemo da je $a_{n+1} > a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

1. Za $n = 1$, $a_2 = 4 > 2 = a_1$ - tačno tvrdjenje

Teorema o monotonom i ograničenom nizu

Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

Primjer: Ispitati konvergenciju niza zadatog sa

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6),\ n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje: Odredimo prvih nekoliko članova: $a_1 = 2, a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 5.5$, $a_5 = 5.75$, $a_6 = 5.875$, $a_7 = 5.9375 \ldots$
Početnih nekoliko članova nam sugeriše da je niz rastući.
Koristeći matematičku indukciju dokazaćemo da je $a_{n+1} > a_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

1. Za $n = 1$, $a_2 = 4 > 2 = a_1$ - tačno tvrdjenje
2. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za $n = k$, tj.

$$a_{k+1} > a_k$$

Tada je

$$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

Tada je

$$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

$$\frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \frac{1}{2}(a_k + 6)$$

Tada je

$$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

$$\frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \frac{1}{2}(a_k + 6)$$

$$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Tada je

$$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

$$\frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \frac{1}{2}(a_k + 6)$$

$$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Dakle, $a_{n+1} > a_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$, tj. niz je rastući.

Tada je

$$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

$$\frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \frac{1}{2}(a_k + 6)$$

$$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Dakle, $a_{n+1} > a_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$, tj. niz je rastući.

Pokažimo sada da je niz ograničen.

Tada je

$$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

$$\frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \frac{1}{2}(a_k + 6)$$

$$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Dakle, $a_{n+1} > a_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$, tj. niz je rastući.

Pokažimo sada da je niz ograničen. Niz je rastući, pa je ograničen odozdo sa $a_1 = 2$, tj.

$$a_n \geq a_1 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

.

Tada je

$$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

$$\frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \frac{1}{2}(a_k + 6)$$

$$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Dakle, $a_{n+1} > a_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$, tj. niz je rastući.

Pokažimo sada da je niz ograničen. Niz je rastući, pa je ograničen odozdo sa $a_1 = 2$, tj.

$$a_n \geq a_1 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

.

Koristeći matematičku indukciju, dokazaćemo da je $a_n < 6$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

1. Za $n = 1$, $a_1 = 2 < 6$ - tačno tvrdjenje

1. Za $n = 1$, $a_1 = 2 < 6$ - tačno tvrdjenje
2. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za $n = k$, tj.

$$a_k < 6$$

1. Za $n = 1$, $a_1 = 2 < 6$ - tačno tvrdjenje
2. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za $n = k$, tj.

$$a_k < 6$$

$$a_k + 6 < 6 + 6$$

1. Za $n = 1$, $a_1 = 2 < 6$ - tačno tvrdjenje
2. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za $n = k$, tj.

$$a_k < 6$$

$$a_k + 6 < 6 + 6$$

$$\frac{1}{2}(a_k + 6) < \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$$

1. Za $n = 1$, $a_1 = 2 < 6$ - tačno tvrdjenje
2. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za $n = k$, tj.

$$a_k < 6$$

$$a_k + 6 < 6 + 6$$

$$\frac{1}{2}(a_k + 6) < \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$$

Dakle,

$$a_{k+1} < 6$$

1. Za $n = 1$, $a_1 = 2 < 6$ - tačno tvrdjenje
2. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za $n = k$, tj.

$$a_k < 6$$

$$a_k + 6 < 6 + 6$$

$$\frac{1}{2}(a_k + 6) < \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$$

   Dakle,

$$a_{k+1} < 6$$

Niz (a_n) je monoton i ograničen, pa je i konvergentan.

1. Za $n = 1$, $a_1 = 2 < 6$ - tačno tvrdjenje
2. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za $n = k$, tj.

$$a_k < 6$$

$$a_k + 6 < 6 + 6$$

$$\frac{1}{2}(a_k + 6) < \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$$

Dakle,

$$a_{k+1} < 6$$

Niz (a_n) je monoton i ograničen, pa je i konvergentan. Teorema ne govori ništa o graničnoj vrijednosti niza, ali kako znamo da postoji $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, koristeći rekurentnu relaciju dobijamo

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + 6) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\right) = \frac{1}{2}(L + 6)$$

Dakle, $L = 6$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 6$

Primjer: $a_n = \frac{1}{n}$

Primjer: $a_n = \frac{1}{n}$

Niz je opadajući:

$$n < n+1 \Longrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \text{ tj. } a_n > a_{n+1}$$

Primjer: $a_n = \frac{1}{n}$

Niz je opadajući:

$$n < n+1 \Longrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \text{ tj. } a_n > a_{n+1}$$

Niz je i ograničen, $0 \leq a_n \leq 1$

$$n > 0 \Rightarrow \frac{1}{n} > 0, \text{ za } n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1$$

Primjer: $a_n = \frac{1}{n}$

Niz je opadajući:

$$n < n + 1 \Longrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \text{ tj. } a_n > a_{n+1}$$

Niz je i ograničen, $0 \leq a_n \leq 1$

$$n > 0 \Rightarrow \frac{1}{n} > 0, \text{ za } n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1$$

Dakle, niz je konvergentan.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

1. Ispitati konvergenciju sljedećih nizova:
   a) $a_n = n^2$
   b) $a_n = (-1)^n$
   c) $a_n = \frac{n+2}{2n+1}$
   d) $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n-5}\right)^3$
   e) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$
   f) $a_n = \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

   Koristiti:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{ako } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{ako } q = 1 \\ +\infty & \text{ako } q > 1 \\ \text{ne postoji} & \text{ako } q \leq -1 \end{cases}$$

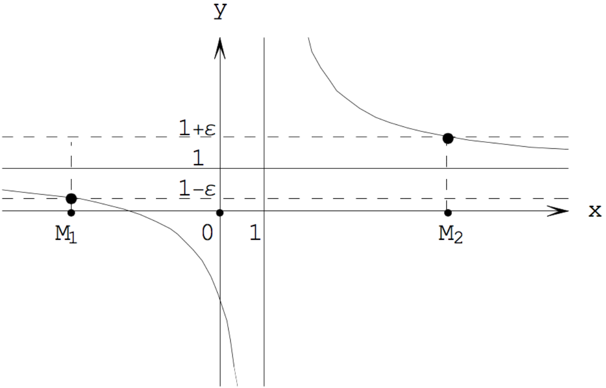
Granična vrijednost funkcije

Primjer: $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$,

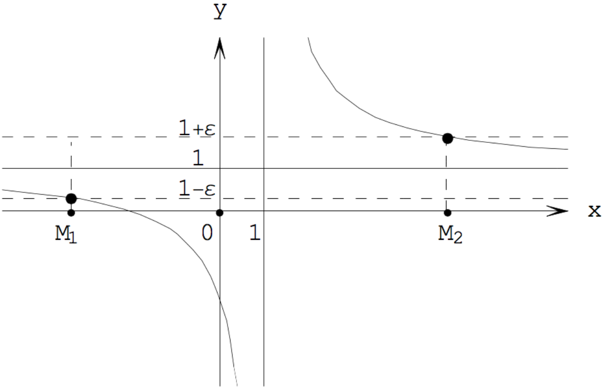
Granična vrijednost funkcije

Primjer: $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, $\qquad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Primjer: $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



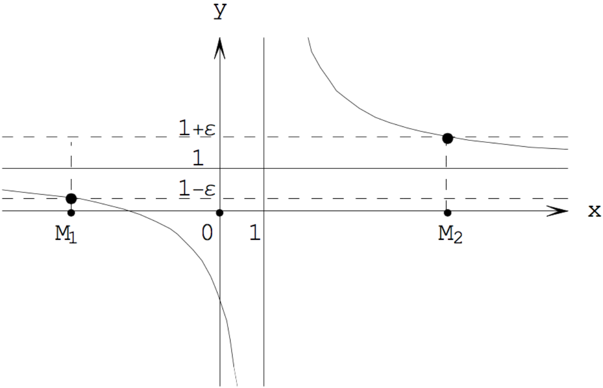
Primjer: $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, $\quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



- Kako se ponaša funkcija kad $x \to \infty$?

Granična vrijednost funkcije

Primjer: $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, $\quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



- Kako se ponaša funkcija kad $x \to \infty$?
- Kako god odabrali $\varepsilon-$traku uvijek postoje neki brojevi $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ od kojih su nadalje sve vrijednosti u toj traci oko 1.

Definicija granične vrijednosti funkcije

Broj L nazivamo **graničnom vrijednošću** ili **limesom** funkcije f u tački a ako za svako $\varepsilon > 0$ možemo naći broj $\delta > 0$ takav da iz $|x - a| < \delta$ slijedi $|f(x) - L| < \varepsilon$

Definicija granične vrijednosti funkcije

Broj L nazivamo **graničnom vrijednošću** ili **limesom** funkcije f u tački a ako za svako $\varepsilon > 0$ možemo naći broj $\delta > 0$ takav da iz $|x - a| < \delta$ slijedi $|f(x) - L| < \varepsilon$

Pišemo: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Definicija granične vrijednosti funkcije

Broj L nazivamo **graničnom vrijednošću** ili **limesom** funkcije f u tački a ako za svako $\varepsilon > 0$ možemo naći broj $\delta > 0$ takav da iz $|x - a| < \delta$ slijedi $|f(x) - L| < \varepsilon$

Pišemo: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Čitamo: "Limes funkcije $f(x)$, kad x teži a, je L."

Definicija granične vrijednosti funkcije

Broj L nazivamo **graničnom vrijednošću** ili **limesom** funkcije f u tački a ako za svako $\varepsilon > 0$ možemo naći broj $\delta > 0$ takav da iz $|x - a| < \delta$ slijedi $|f(x) - L| < \varepsilon$

Pišemo: $\lim_{x\to a} f(x) = L$

Čitamo: "Limes funkcije $f(x)$, kad x teži a, je L."

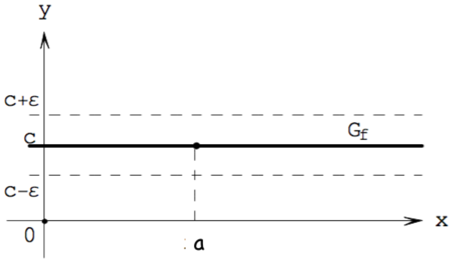
Formula: $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\ \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Primjer:

Pokazati da konstantana $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, ima limes c kad $x \to a$.

Primjer:

Pokazati da konstantana $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, ima limes c kad $x \to a$.



Odaberimo $\varepsilon > 0$. Tražimo $\delta > 0$. $|f(x) - L| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Dakle, nejednakosti iz definicije važi za svako $\varepsilon > 0$. Možemo uzeti da je $\delta = \varepsilon$, čime je tvrdjenje dokazano.

Definicija beskonačne granične vrijednosti u tački

Granična vrijednost funkcije f kada $x \to a$ je jednaka $+\infty$ i pišemo

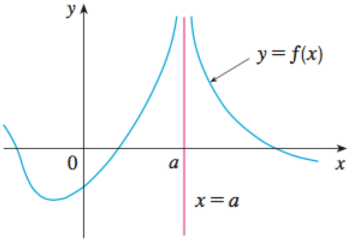
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

ako

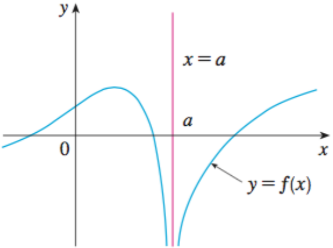
$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)\ \ |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Simetrično se definiše $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Ako je $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$ tada se piše $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ i kaže da je funkcija $f(x)$ *beskonačno velika* kada $x \to a$.



$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

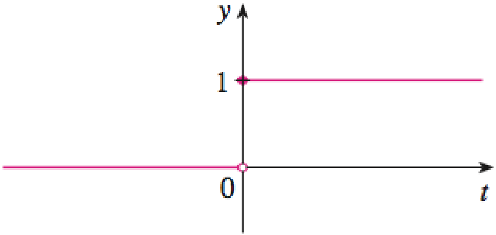
Definicija granične vrijednosti kada $x \to +\infty$

Realni broj L je granična vrijednost funkcije f kada $x \to +\infty$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R}) \;\; x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Pišemo: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Primjer: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ako } x < 0 \\ 1 & \text{ako } x \geq 0 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Definicija lijeve granične vrijednosti funkcije

Broj L nazivamo **lijevom graničnom vrijednošću** ili **lijevim limesom** funkcije f u tački a i pišemo

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

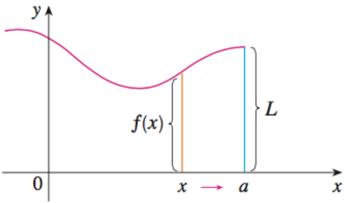
ako za svako $\varepsilon > 0$ možemo naći broj $\delta > 0$ takav da iz $x - a < \delta$ slijedi $|f(x) - L| < \varepsilon$

Definicija desne granične vrijednosti funkcije

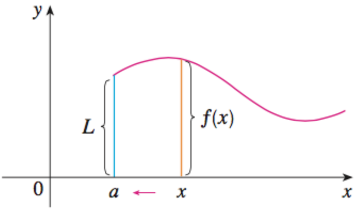
Broj L nazivamo **desnom graničnom vrijednošću** ili **desnim limesom** funkcije f u tački a i pišemo

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

ako za svako $\varepsilon > 0$ možemo naći broj $\delta > 0$ takav da iz $a - x < \delta$ slijedi $|f(x) - L| < \varepsilon$



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$



(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Ako funkcija ima lijevi i desni limes u nekoj tački i oni su jednaki, to je upravo i limes te funkcije za tu vrijednost argumenta. Važi i obrnuto.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = L \ i \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Svojstva graničnih vrijednosti funkcija

Pretpostavimo da granične vrijednosti $\lim_{x\to a} f(x)$ i $\lim_{x\to a} g(x)$ postoje i da je c konstanta. Tada važi:

- $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$
- $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, ako je $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x\to a}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x\to a} c = c, \quad \lim_{x\to a} x = a$