Brojni redovi

Doc. dr Nevena Mijajlović

Računarstvo i informacione tehnologije, PMF

Matematika 3

- Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ niz realnih brojeva

Brojni red

Beskonačni zbir brojeva

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

naziva se brojni red.

- Brojevi $a_1, a_2, \ldots$ su članovi reda, a a_n je opšti član reda.
- Opšti član je, u stvari, pravilo po kojem se generišu svi članovi reda.

Parcijalne sume:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

I uopšte

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Beskonačni zbir

$$R_n \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots +$$

je ostatak reda.

Parcijalne sume formiraju novi niz (S_n), koji može biti konvergentan ili divergentan.

Primjer: Beskonačni zbir

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

je brojni red. Opšti član ovog reda je $a_n = \frac{1}{n}$, a n-ta parcijalna suma je

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

a ostatak reda je

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots .$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan (divergentan) ako je niz parcijalnih suma (S_n) konvergentan (divergentan).

Ako postoji, granična vrijednost

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

je suma (zbir) reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i zapisuje se

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Ako je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$$

kažemo da red odredjeno divergira.

Primjer: Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Opšti član može da se zapiše na način

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

pa je $n-$ta parcijalna suma

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, to je dati red konvergentan i njegov zbir je

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Primjer: Ispitati konvergenciju geometrijskog reda

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k, \quad q \in \mathbb{R}$$

Za $q \neq 1$, $n-$ta parcijalna suma je geometrijska progresija, pa je

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q} q^n.$$

Za $q = 1$ je

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

Koristeći, da niz (q^n) konvergira ka 0 za $|q| < 1$, divergira za $q \leq -1$ i odredjeno divergira ka $+\infty$ za $q > 1$, dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty, \quad q > 1.$$

Kako je još $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ kad je $q = 1$, zaključujemo da geometrijski red divergira za $q \leq -1$, odredjeno divergira ka $+\infty$ za $q \geq 1$ i konvergira za $|q| < 1$ sa sumom

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Primjer: Naći sumu reda

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

Prvi član reda je $a_1 = 5$, a količnik je $q = -\frac{2}{3}$.
Kako je $|q| = \frac{2}{3} < 1$, red je konvergentan i njegova suma je

$$S = 5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = 3.$$

Primjer: Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$$

Osobine brojnih redova

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan red sa sumom

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

i neka je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. Tada je konvergentan i red $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ sa sumom

$$cS = \sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni redovi sa sumama

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Tada su konvergentni i redovi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n n)$ sa sumama

$$S_1 \pm S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$

Redovi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \ i \ \ \sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

su istovremeno konvergentni ili diveregntni.

Dakle, red i ostatak reda su istovremeno konvergentni ili divergentni. U slučaju konvergentnog reda, sa parcijalnom sumom S_n i sumom S, ostatak je

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S - S_n.$$

Ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan, tada je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Obrnuto ne važi!

Ova teorema se najčešće primjenjuje u obliku: ako je $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tada je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan.

Primjer: Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0,$$

pa je red divergentan.