Наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n^3+5n^2+4n}$

Решење:

Општи члан се може представити у облику

$$a_n=\frac{3n+4}{n^3+5n^2+4n}=\frac{3n+4}{n(n+1)(n+4)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+4}=\ldots=\frac{1}{n}-\frac{1}{3}\frac{1}{n+1}-\frac{2}{3}\frac{1}{n+4}$$

$$a_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\right)$$

$$a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\right]$$

$$a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}-\left\{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7}\right\}$$

$$a_4=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\right)-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}$$

$$a_5=\left(\frac{1}{5}\right)-\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\right]-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}$$

$$a_6=\left[\frac{1}{6}\right]-\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\right\}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}$$

....

$$a_{n-5}=\frac{1}{n-5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n-4}-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n-1}\right)$$

$$a_{n-4}=\frac{1}{n-4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n-3}-\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}\right]$$

$$a_{n-3}=\frac{1}{n-3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n-2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$a_{n-2}=\frac{1}{n-2}-\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n-1}\right)-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+2}$$

$$a_{n-1}=\left(\frac{1}{n-1}\right)-\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}\right]-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+3}$$

$$a_n=\left[\frac{1}{n}\right]-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+4}$$

......

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\ldots a_n$$

$$S_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\frac{1}{n+1}-\frac{2}{3}\frac{1}{n+2}-\frac{2}{3}\frac{1}{n+3}-\frac{2}{3}\frac{1}{n+4}-\frac{1}{3}\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{31}{18}$$

Низ парцијалних сума је ограничен па је ред конвергентан и његова сума је

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n^3+5n^2+4n}=\frac{31}{18}$$

Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+5}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$

Решење:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{n+5}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{n+5}\right)\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{n+5}\right)\left(\left(1+\frac{1}{-(n+3)}\right)^{-(n+3)}\right)^{\frac{-n}{n+3}}=\frac{3}{e}>1$$

По Кошијевом критеријуму ред дивергира

Одредити радијус конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

Решење:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=4\,.$$

Област конвергенције је $|x|<4$ тј. $x\in(-4;4)$. Понашање на крајевима интервала је :

у тачки $x=4$ добијамо бројни ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$ чији је општи члан $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n}{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}4^{n+1}}=\frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2}=\frac{4n^2+6n+2}{4n^2+8n+4}=1-\frac{2n+2}{4n^2+8n+4}<1$$

Како је $a_n < a_{n+1}$ то општи члан не тежи нули па бројни ред диверира. Исто важи и за бројни ред добијен у тачки $x=-4$ тако да област конвергенције степеног реда остаје $x\in(-4;4)$.

Представити у облику реда функцију $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$

Решење:

$$f(x)=\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)}=\frac{A}{(1-x)}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{(1+x)}=\ldots=\frac{-1}{4}\frac{1}{(1-x)}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x)}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,,\quad \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\quad \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\,,\ |x|<1$$

$$f(x)=\frac{-1}{4}\frac{1}{(1-x)}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x)}$$

$$f(x)=\frac{-1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{4}+\frac{1}{2}(n+1)-\frac{1}{4}(-1)^n\right)x^n$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1+2n+2-(-1)^n}{4}\right)x^n$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1+2n+1+(-1)^{n+1}}{4}x^n\,,\quad |x|<1$$