Realni brojevi

Skupovi čiji su elementi brojevi nazivaju se brojnim skupovima.
Primjerima brojnih skupova se javljaju sljedeći skupovi:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ skup prirodnih brojeva

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots\}$ skup cijelih brojeva

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ skup racionalnih brojeva

Sve racionalne brojeve možemo izraziti ili konačnim decimalnim brojem ili beskonačnim periodičnim decimalnim brojem. Na primjer,

$\frac{1}{2} = 0,5 (= 0,5000\dots)$ $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ su racionalni brojevi.

Realni brojevi koji nisu racionalni nazivaju se iracionalnim brojevima.

<u>Teorema</u> Ne postoji racionalan broj čiji je kvadrat jednak broju 2.

<u>Dokaz</u> Pretpostavimo suprotno, tj da postoji pravi racionalan broj oblika $\frac{m}{n}$ čiji je kvadrat jednak 2.
Tada je $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ tj $m^2 = 2n^2$.

Odavde slijedi da je m^2 paran broj, a samim tim i m, odnosno, $m = 2k$. Zamijenimo $m = 2k$ u jednačinu $m^2 = 2n^2$. Imamo da je $4k^2 = 2n^2$, tj $2k^2 = n^2$. Odavde slijedi da je broj n paran broj, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $\frac{m}{n}$ pravi racionalan broj ▲

Iracionalni brojevi se izražavaju beskonačnim neperiodičnim decimalnim brojevima. Tako su $\sqrt{2} = 1{,}4142356\ldots$, $\pi = 3{,}1415926\ldots$ iracionalni brojevi.

Možemo reći: skup $\mathbb{R}$ realnih brojeva je skup svih beskonačnih decimalnih brojeva i zapisati:

$$\mathbb{R} = \{x \mid x = a, a_1 a_2 a_3 \ldots\}, \text{ gdje je } a \in \mathbb{Z}, \text{ a}$$

$$a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ ima sljedeća svojstva:

1. Uređen je skup: za svaka dva različita realna broja a i b važi jedno od dva odnosa ili je $a < b$ ili je $b < a$.

2. Skup $\mathbb{R}$ je gust skup: Između svaka dva različita realna broja sadrži se beskonačno mnogo realnih brojeva x, tj brojeva x koji zadovoljavaju nejednakost $a < x < b$.

Znači, ako je $a < b$ onda je jedan od tih brojeva x realan broj $\frac{a+b}{2}$.

Zaista, $a < b \Rightarrow 2a < a+b$ i $a+b < 2b \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow 2a < a+b < 2b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b.$$

3. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ je neprekidan:
Neka je $\mathbb{R}$ razbijeno na dva neprazna skupa A i B, takvih da se svaki realan broj sadrži samo u jednom od tih skupova i za svaki par brojeva $a \in A$ i $b \in B$ važi nejednakost $a < b$. Tada postoji jedinstven broj c, koji zadovoljava nejednakost $a \leq c \leq b$ $(\forall a \in A, \forall b \in B)$.

Ovaj broj -c odvaja brojeve iz skupa A od brojeva iz skupa B. Broj -c je ili najveći broj iz skupa A (tada u skupu B nema najmanjeg broja), ili je najmanji broj iz skupa B (tada u skupu A nema najvećeg broja).

Svojstvo neprekidnosti skupa realnih brojeva nam omogućava da uspostavimo uzajamno jednoznačno preslikavanje između skupa realnih brojeva i skupa svih tačaka sa prave. To znači da svakom broju $x \in \mathbb{R}$ odgovara jedinstvena tačka na brojnoj osi i obratno, svakoj tački sa brojne ose odgovara jedinstveni realan broj.

Zato često umjesto riječi broj kažemo tačka.

Brojni intervali. Okolina tačke

Neka su dati realni brojevi a i b takvi da je $a < b$.

Brojnim intervalima se naziva skup svih ~~real~~ realnih brojeva koji imaju sljedeći oblik:

$[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ zatvoreni interval, (segment)

$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ interval (otvoreni interval)

$[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$
$(a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ poluotvoreni intervali

$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$
$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$
$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$
$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$ beskonačni intervali.

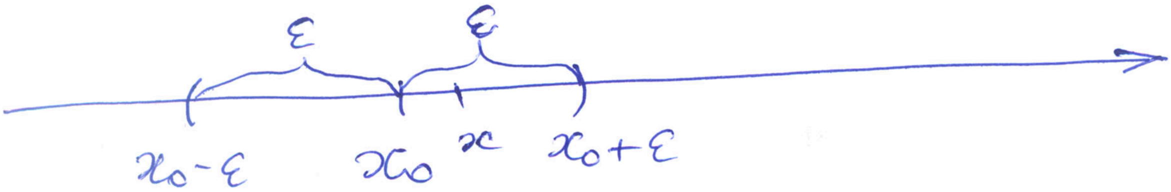
$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$

Brojevi a i b se nazivaju lijevim, odnosno desnim krajevima tih intervala. Simboli $-\infty$ i $+\infty$ nisu brojevi, već simbolički označavaju proces neograničenog udaljavanja tačaka brojne ose od koordinatnog početka ulijevo i udesno.

Neka je x_0 proizvoljan realan broj (tačka na brojnoj pravoj).

Okolinom tačke x_0 naziva se svaki interval (a,b) koji sadrži tačku x_0.

Specijalno, interval $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, gdje je $\varepsilon>0$, naziva se ε-okolinom tačke x_0. Broj x_0 je centar, a ε - poluprečnik okoline.



Ako je $x_0 \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, tada važi nejednakost

$$x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon$$

$$-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \Rightarrow |x-x_0|<\varepsilon$$

Znači, ukoliko je ispunjena posljednja nejednakost $|x-x_0|<\varepsilon$, ~~ta~~da to znači da tačka x pripada ε-okolini tačke x_0. ε-okolinu tačke x_0 ćemo označavati simbolom $O_\varepsilon(x_0)$, tj.

$$O_\varepsilon(x_0)=\{x \mid |x-x_0|<\varepsilon\}.$$

Pošto smo koristili apsolutnu vrijednost realnog broja, potsjetimo se definicije i svojstava.

Apsolutna vrijednost realnog broja

Neka je $x \in \mathbb{R}$, tada je:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Jasno je da je $-x \leq |x|$ i $x \leq |x|$. Odavde slijedi da je $-|x| \leq x \leq |x|$.

Svojstva

1) $|x| \geq 0$
2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3) $|x + y| \leq |x| + |y|$
4) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Nizovi. Granična vrijednost niza

Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$.

Definicija Nizom na skupu X nazivamo preslikavanje $f: \mathbb{N} \to X$ (iz skupa prirodnih brojeva u skup X) i označavamo ga sa x_n tj $f(n) = x_n$, gdje je $f(n) \in X$, odnosno $x_n \in X$

Nizove ćemo označavati sa $\{x_n\}$, gdje je x_n - opšti član niza.

Nizovi se često zadaju formulom opšteg člana niza x_n, $n=1,2,\ldots$

Primjer 1) $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}=\left\{1,\frac{1}{2},\ldots\right\}$

$x_n=\frac{1}{n}$

2) $y_n=(-1)^n$; $\{y_n\}=\{(-1)^n\}=\{-1,1,-1,1,\ldots\}$

3) $z_n=\frac{n+1}{n}$, $\{z_n\}=\left\{\frac{n+1}{n}\right\}=\left\{2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\ldots\right\}$

4) $v_n=n^2+1$, $\{v_n\}=\{n^2+1\}=\{2,5,10,17,26,\ldots\}$

Definicija Neka je dat niz $\{x_n\}$. Ako se iz nekog podskupa skupa članova tog niza formira novi niz, gdje je redoslijed isti kao i kod zadatog niza, onda se taj novi niz naziva podnizom datog niza i označava sa $\{x_{n_k}\}$, gdje je $k\in\mathbb{N}$.

Iz definicije je jasno da je $n_{k_1}<n_{k_2}$ ako i samo ako je $k_1<k_2$ (redoslijed ostaje isti kao i kod datog niza).

Primjer Za niz $\{(-1)^n\}$ izdvojimo podniz parnih i neparnih članova. Dobijamo podnizove:

$\{1\}=\{1,1,1,\ldots\}$ i $\{-1\}=\{-1,-1,-1,\ldots\}$, odnosno konstantne nizove.

Definicija Niz $\{x_n\}$ je ograničen niz ako postoji broj $c \in \mathbb{R}$, takav da je $|x_n| \le c$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Specijalno, niz $\{x_n\}$ je ograničen odozgo, ako postoji $M \in \mathbb{R}$, takav da je $x_n \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a $\{x_n\}$ je ograničen odozdo, ako postoji $m \in \mathbb{N}$, takav da je $m \le x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definicija Niz $\{x_n\}$ je monotono rastući niz, ako je $x_n \le x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Niz $\{x_n\}$ je monotono opadajući niz, ako je $x_n \geqslant x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ako važi znak stroge nejednakosti, onda kažemo da je niz strogo monotono rastući, odnosno strogo monotono opadajući niz. Često to označavamo sa $\{x_n\} \nearrow$ za rastući, odnosno $\{x_n\} \searrow$ za opadajući niz.

Ovakve nizove nazivamo monotonim nizovima

Ako su svi elementi nekog niza jednaki jednom te istom broju $c \in \mathbb{R}$, onda taj niz nazivamo konstantnim nizom.

Granična vrijednost niza

Definicija Broj a nazivamo graničnom vrijednošću niza $\{x_n\}$ i označavamo ga sa $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ako za svaki pozitivan broj ε, postoji prirodan broj N, takav da za sve $n>N$ važi da je:

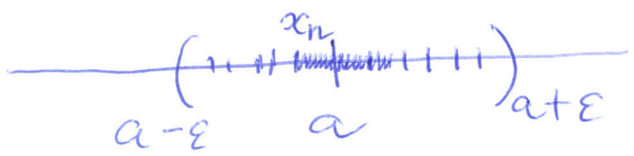
$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

Odnosno,

$$\boxed{(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)\,|x_n-a|<\varepsilon}$$

Broj $N\in\mathbb{N}$ zavisi od proizvoljno izabranog broja $\varepsilon>0$, tj $N=N(\varepsilon)$.

Šta kaže naša definicija? Nejednakost $|x_n-a|<\varepsilon$ znači da je $-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon$, odnosno, $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$. Ova posljednja nejednakost nam pokazuje da se počevši od nekog N svi članovi niza $\{x_n\}$ nalaze u ε-okolini tačke a.



Možemo da pišemo i $x_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)=O_\varepsilon(a)$.

Ako niz **ima** graničnu vrijednost, onda za njega kažemo da je **konvergentan niz**, a ako **nema** onda kažemo da je **divergentan niz**.

Definicija Za niz $\{x_n\}$ kažemo da je beskonačno veliki niz ako

$$(\forall M>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)\ |x_n|>M$$

i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

Specijalno,

$$\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty \iff (\forall M>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)\ x_n<-M$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty \iff (\forall M>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)\ x_n>M.$$

Primjer Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-5}{4n+2}=\frac{1}{2}$.

Rješenje: Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljno izabrano. Znači potrebno je naći $N\in\mathbb{N}$, takvo da je za svako $n>N$: $\left|\frac{2n-5}{4n+2}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$. Iz posljednje nejednakosti:

$$\left|\frac{2n-5}{4n+2}-\frac{1}{2}\right|=\frac{|2n-5-2n-1|}{4n+2}=\frac{|-6|}{4n+2}=\frac{6}{4n+2}=\frac{3}{2n+1}<\varepsilon$$

Odavde, $2n+1>\frac{3}{\varepsilon} \Rightarrow 2n>\frac{3-\varepsilon}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{n>\frac{3-\varepsilon}{2\varepsilon}}$

Uzmimo za $N=\left[\frac{3-\varepsilon}{2\varepsilon}\right]$, gdje je $[x]$ - najveći dio cijeli broj k, koji je manji ili jednak x. $[x]=k$, $k\le x<k+1$, $k\in\mathbb{Z}$.

Tada za svako $n>N=\left[\frac{3-\varepsilon}{2\varepsilon}\right]$ je $n>\frac{3-\varepsilon}{2\varepsilon}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3}{2n+1}<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2n-5}{4n+2}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon \text{ za svako } n>N.$$

Time smo pokazali da je $\frac{1}{2}$ granična vrijednost niza $\left\{\frac{2n-5}{4n+2}\right\}$.

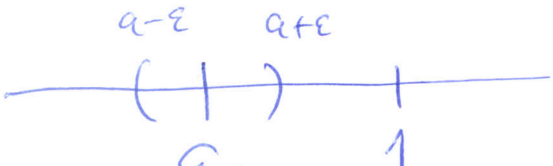
Ako je, na primjer, $\varepsilon = \frac{1}{10}$, onda je $N=\left[\frac{3-\varepsilon}{2\varepsilon}\right] = \left[\frac{3-\frac{1}{10}}{\frac{2}{10}}\right] = \left[\frac{29}{2}\right] = [14,5] = 14$.

Znači, za svako $n>14$ imamo da je

$$\left|\frac{2n-5}{4n+2}-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10}.$$

Primjer Pokazati da niz $\{(-1)^n\}$ nema graničnu vrijednost, tj da divergira.

Rješenje Neka je $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 1$. Treba pokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a$, odnosno treba da se pokaže da $(\exists \varepsilon^*>0)(\forall N\in\mathbb{N})(\exists n>N)\ |x_n-a|\geq\varepsilon^*$.



Neka je $\varepsilon^* = \frac{|1-a|}{2}>0$.

Uzmimo $N\in\mathbb{N}$ proizvoljno. Tada postoji $n=2N>N$, $n=2N\in\mathbb{N}$. Tada je:

$$|x_n-a| = |(-1)^n-a| = |(-1)^{2N}-a| = |1-a| > \frac{|1-a|}{2} = \varepsilon^*$$

Neka je $a=1$. Uzmimo $\varepsilon^*=1$. Neka je $N\in\mathbb{N}$ proizvoljno. Tada postoji $n=2N+1>N$ i onda je

$$|x_n-a| = |(-1)^n-1| = |(-1)^{2N+1}-1| = |-1-1| = 2 > 1 = \varepsilon^*.$$

Ovime se pokazano da je niz $\{(-1)^n\}$ divergentan

Svojstva konvergentnih nizova

1. Konvergentan niz ima jedinstvenu graničnu vrijednost.

Dokaz Pretpostavimo suprotno, tj neka niz $\{x_n\}$ ima dvije granične vrijednosti a i b i $a \neq b$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ $\left(\varepsilon < \frac{|a-b|}{2}\right)$ takvo da je $O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b) = \emptyset$. Pošto je a granična vrijednost niza $\{x_n\}$, znači da ~~je~~ van $O_\varepsilon(a)$ može biti samo konačno mnogo članova niza $\{x_n\}$, a to znači da u $O_\varepsilon(b)$ leži konačno mnogo članova niza $\{x_n\}$, što je protivurečno sa pretpostavkom da je b granična vrijednost niza $\{x_n\}$

2. Svaki podniz konvergentnog niza konvergira ka istoj graničnoj vrijednosti.

Ovo slijedi iz definicija granične vrijednosti niza i podniza.

3. Konvergentan niz je ograničen.

Dokaz Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Za $\varepsilon = 1$ slijedi da je $|x_n| - |a| \leq |x_n - a| < 1$, $\forall n > N$.

Odnosno, $|x_n| < 1 + |a|$, $\forall n > N$.

Uzmimo za $C = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1+|a|\}$.

Tada slijedi da je $|x_n| < C$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tj niz $\{x_n\}$ je ograničen

Komentar Ograničen niz ne mora da bude konvergentan. Primjer takvog niza je niz $\{(-1)^n\}$.

4. Ako za svaki podniz $\{x_{n_k}\}$ niza $\{x_n\}$ važi da je $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

5. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$, onda počevši od nekog N, svi članovi niza $\{x_n\}$ su istog znaka kao i broj a. Specijalno, $|x_n| > \frac{|a|}{2}, \forall n>N$.

Dokaz Iz definicije granične vrijednosti je

$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon, \forall n>N$. Uzmimo ε tako da je $0<\varepsilon \leq \frac{|a|}{2}$. Tada imamo da brojevi $a-\varepsilon$, a i $a+\varepsilon$ imaju isti znak. Znači da svi članovi niza počevši od nekog N imaju isti znak kao i broj a.

Dalje, za to isto ε važi da je $\frac{|a|}{2} > |x_n - a| \geq |a| - |x_n|$, $\forall n>N$. Odavde slijedi, $|x_n| > \frac{|a|}{2}, \forall n>N$.

6. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ i $a<b$, onda počevši od nekog $N\in\mathbb{N}$ važi da je $x_n < y_n$.

Dokaz Iz definicije granične vrijednosti imamo da je

$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$, $b-\varepsilon < y_n < b+\varepsilon$, $\forall n>N$. Pošto je $a<b$, izaberimo ε tako da je $0<\varepsilon<\frac{b-a}{2}$. Tada imamo da je $a+\varepsilon < b-\varepsilon$. Odavde je

$$x_n < a+\varepsilon < b-\varepsilon < y_n \quad \forall n>N.$$

Odnosno, $x_n < y_n, \forall n>N$

7. Neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Ako je počevši od nekog $N \in \mathbb{N}$, $x_n \geq y_n$, onda je $a \geq b$, tj.

$$(x_n \geq y_n, \forall n > N) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Dokaz Pretpostavimo suprotno, tj da je $a < b$. Tada zbog svojstva 6 bi slijedilo da je $x_n < y_n$ za svako $n > N$, $N \in \mathbb{N}$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $x_n \geq y_n$. $\triangle$

Komentar Ako je $x_n > y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onda nije uvijek $\lim_{n\to\infty} x_n > \lim_{n\to\infty} y_n$. Primjer takvih nizova je:

$$x_n = \frac{n+1}{n}, \quad y_n = \frac{n-1}{n}$$

Znači, $x_n > y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ali je $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 1$.

8. (Teorema o uklještenju) Neka za nizove $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ i $\{z_n\}$ važi da je $x_n \geq y_n \geq z_n$, $\forall n > N$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$. Tada je i $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

9. Neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ i neka je $\{y_n\}$ ograničen niz. Tada je $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$.

10. Neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Tada je:

a) $\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$

b) $\lim_{n\to\infty} (\lambda x_n) = \lambda \cdot a$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ $(y_n \neq 0, b \neq 0)$

e) $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$

Dokaz a) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno.

$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow (\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall n > N_1)\ |x_n - a| < \varepsilon/2$

$\lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow (\exists N_2 \in \mathbb{N})(\forall n > N_2)\ |y_n - b| < \varepsilon/2$

Neka je $N = \max\{N_1, N_2\}$. Tada za svako $n > N$ imamo da je $|x_n - a| < \varepsilon/2$ i $|y_n - b| < \varepsilon/2$. Dalje, za svako $n > N$ je

$|(x_n + y_n) - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq$

$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

c) Pošto su $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ konvergentni nizovi slijedi da su oni i ograničeni, odnosno, postoji $c > 0$, tako da je $|x_n| \leq c$, $|y_n| \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Neka je $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2c}$. Tada

iz $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ |x_n - a| < \varepsilon_1$

$\lim y_n = b \Rightarrow (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ |y_n - b| < \varepsilon_1$.

Tada imamo, $|x_n y_n - a \cdot b| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| =$

$= |(x_n - a) y_n| + a(y_n - b)| \leq |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| <$

$< c \cdot \varepsilon_1 + c \cdot \varepsilon_1 = c \frac{\varepsilon}{2c} + c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon$

11. Svaki monoton i ograničen niz konvergira.

Znači, monotono rastući niz ograničen odozgo je konvergentan (odozdo je ograničen svojim prvim članom, a monotono opadajući niz ograničen odozdo je konvergentan (odozgo je ograničen svojim prvim članom).

Sada ćemo dati jedan kriterijum konvergencije monotonih nizova s pozitivnim članovima:

Teorema Neka je $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$; $\{x_n\}$ monoton niz i neka postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Tada:

1) ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1$, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

2) ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l > 1$, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Primjeri 1) Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, 0<q<1$

$x_n = q^n$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q < 1 \Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow \{x_n\}$ je opadajući niz, $x_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Pošto je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} q = q < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ ▲

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

$x_n = \frac{a^n}{n!}$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1} < 1$, počevši od nekog $N \in \mathbb{N}$

Znači, $x_{n+1} < x_n$, $\forall n > N \Rightarrow \{x_n\}$ opadajući uz $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} = 0$, $b > 1$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, $k \in \mathbb{N}$, $a > 1$

Ova dva primjera ćemo objediniti, tačnije rješavaćemo primjer 4. i svesti ga na rješavanje primjera 3.

<u>Rješenje 4.</u> $\frac{n^k}{a^n} = \frac{n^k}{(\sqrt[k]{a^n})^k} = \left(\frac{n}{\sqrt[k]{a^n}}\right)^k$. Neka je $b = \sqrt[k]{a} > 1$

Tada je:

$$0 < \frac{n}{b^n} = \frac{n}{(1+(b-1))^n} = \frac{n}{1 + n(b-1) + \frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2 + \dots + (b-1)^n}$$

$$< \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2} = \frac{2}{(n-1)(b-1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Po teoremi o uklještenju $\frac{n}{b^n} \to 0$, $n \to \infty$.

Pošto je k konačan broj onda i $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{b^n}\right)^k = 0$.

Znači, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$

Broj e

Ispitajmo konvergenciju niza $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
Prije svega, ovdje ćemo navesti Bernulijevu nejednakost.

$$h > -1,\ (1+h)^n \geq 1+nh,\ n = 0,1,2,\dots$$

Ova nejednakost se dokazuje metodom matematičke indukcije.
Po Bernulijevoj nejednakosti $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{1}{n} = 2$

znači, $x_n \geq 2,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Neka je $y_n = x_n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) > 2,\ \forall n\in\mathbb{N}$, jer je $x_n \geq 2$, a $1+\frac{1}{n} > 1,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Niz y_n možemo zapisati i kao

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

Odavde, koristeći opet Bernulijevu nejednakost imamo da je:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^n\cdot n^{n+1}}{(n-1)^n\cdot(n+1)^{n+1}} = \frac{n-1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} =$$

$$= \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \geq \frac{n-1}{n}\cdot\left(1+\frac{n+1}{n^2-1}\right) = \frac{n-1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right) =$$

$$= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n-1} = 1,$$ odnosno $y_{n-1} \geq y_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

tj. $\{y_n\}$ je monotono opadajući niz ograničen odozdo brojem 2, samim tim konvergentan niz.

Pošto je
$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} x_n$$ slijedi da je i niz $\{x_n\}$ također konvergentan niz.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$, gdje je e - Ojlerov broj.

Broj e je iracionalan broj i približno je jednak 2,71 ($e = 2{,}71828182\ldots$).