

Matematika 2

Pripremni materijal (1. dio)

Mart 2021.

Ime i prezime: _____ Broj indeksa: _____

1. Ako kažemo da je skup \mathbb{R} *uređen*, što to znači?
2. Ako kažemo da je skup \mathbb{R} *gust*, što to znači?
3. Definicija niza. Navesti primjer rastućeg niza.
[ili: strogo rastućeg, opadajućeg, ograničenog, neograničenog, i slično...]
4. Definicija podniza. Da li neograničen niz može imati ograničen podniz? Obrazložiti.
5. Definicija konstantnog niza. Da li ograničen niz može imati konačan podniz?
Obrazložiti.
6. Definicija monotonih nizova. Da li strogo rastući niz može biti ograničen? Obrazložiti.
7. Definicija granične vrijednosti niza.
8. Koristeći definiciju granične vrijednosti dokazati da je $\frac{1}{2}$ granična vrijednost niza $\frac{n}{1+2n}$.
9. Definicija beskonačno velikog niza.
Da li beskonačno veliki niz može biti konvergentan?
10. Da li divergentan niz može imati ograničen podniz? Obrazložiti.
11. Navesti primjer divergentnog neograničenog niza.
12. Da li je svaki ograničen niz konvergentan? Da li važi obrnuto tvrđenje? Obrazložiti.
13. Navesti primjer divergentnog niza koji ima konvergentan podniz.
14. Da li konvergira niz kojem svaki podniz konvergira?
15. Da li postoji negativan niz čija je granična vrijednost 1? Obrazložiti?
16. Ako su x_n i y_n konvergentni nizovi za koje važi $x_n < y_n$ za $n > 100$, što možemo reći o njihovim graničnim vrijednostima.
17. Formulirati teoremu o uklještenju.
18. Dat je rastući niz x_n za koji važi $|x_n| < \sqrt{2}$. Što možemo reći o konvergenciji tog niza? Obrazložiti.
19. Formulirati Bernulijevu nejednakost.

20. Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, da li je $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)^2 = a^2 - b^2$? Obrazložiti.
21. Izračunati: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sin n$
22. Izračunati: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \right)$
23. Izračunati: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^{2n} - 3^n}{4^n + 3 \cdot 2^n}$.
24. Izračunati: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(2n - \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - \sqrt{n^2 + (-1)^n} \right)$
25. Izračunati: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\sqrt[4]{n^3} - \sqrt{-1 + 4\sqrt{n^3}} \right)$
26. Izračunati: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{\sqrt{2} - n} + \frac{\sqrt{n^3} \cdot \sqrt[4]{n^6 - (-1)^n \cdot n^3}}{n^3} \right)^{2021}$
27. Izračunati: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 3)}{(n^2 - 1) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n} \right)}$
28. Izračunati: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n + 2n \sin n}{n^2 + 4}$
29. Dat je niz $x_n = \left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{1}} \right) \left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{2}} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{n}} \right)$.
Dokazati da dati niz konvergira.
30. Košijeva definicija granične vrijednosti funkcije.
31. Hajneova definicija granične vrijednosti funkcije.
32. Definicija granične vrijednosti funkcije kada $x \rightarrow -\infty$.
33. Definicija jednostranih graničnih vrijednosti.
34. Odrediti jednostrane granične vrijednosti za funkciju $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-x}$ u tački $x = 1$.
35. Definicija beskonačno male funkcije.
36. Definicija neprekidne u tački funkcije.
37. Da li funkcija $f(x) = |x - 1|$ ima lijevu i desnu graničnu vrijednost u tački $x = 1$, i da li je neprekidna u toj tački? Obrazložiti.
38. Definicija funkcije neprekidne s lijeve (desne) strane u tački.
39. Definicija tačke prekida. Karakteri tačke prekida (definicija prekid prve i druge vrste).
40. Kada kažemo da je tačka $x = a$ tačka (ne) otklonjivog prekida?
41. Definicija funkcije neprekidne na intervalu $[a, b]$.
42. Formulirati Vajerštrasovu teoremu za neprekidne na intervalu funkcije, i posljedicu te teoreme.
43. Formulirati Bolcano-Košijevu teoremu.

44. Izračunati: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$

45. Izračunati: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + e^x + 2}{4} \right)^{\frac{1}{3x}}$

46. Izračunati: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x}}{e^x - e^{\frac{1}{x}}}$

47. Izračunati: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x}}{e^x - e^{\frac{1}{x}}}$

48. Ispitati neprekidnost u tački $x = 0$ funkcije: $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x \sin x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{x \sin x}, & x < 0 \end{cases}$

49. Ispitati neprekidnost funkcije f u tački $x = 0$. Ukoliko funkcija nije neprekidna, odrediti karakter tačke prekida.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - \cos 6x}{4x^2}, & x < 0 \\ 0, & x = 0. \\ \frac{\ln(1-x)}{\operatorname{tg} 3x}, & x > 0 \end{cases}$$

50. Ne koristeći Lopitalovo pravilo ispitati neprekidnost funkcije

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x + \ln x)}{\ln x}, & x > 1 \\ 1, & x \leq 1 \end{cases}$$