

# Matematika 2

Pripremni materijal (2. dio)

April 2021.

1. Definicija izvoda funkcije, i lijevog i desnog izvoda funkcije.
2. Da li postoji funkcija koja je neprekidna u nekoj tački, a nije diferencijabilna u toj tački? Da li važi obrnuto? Obrazložiti.
3. Da li postoji funkcija koja je diferencijabilna s lijeva u nekoj tački, a nije neprekidna u toj tački?
4. Definicija jednačina tangente i normale na grafik funkcije.
5. Data je funkcija  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ . Odrediti tangente (i tačke dodira) ne grafik te funkcije koje su normalne na pravu  $x + y = 2$ .
6. Formulirati teoremu o izvodu složene funkcije. Izračunati  $\arcsin''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .
7. Formulirati teoremu o izvodu inverzne funkcije. Izvesti izraz za izvod funkcije  $\arctan(x)$ .
8. Izračunati izvod funkcije  $\ln^{\sqrt{x}}(1 + x^2)$ .
9. Definicija diferencijala. Diferencijal proizvoda i količnika diferencijabilnih funkcija.
10. Formulirati Rolovu teoremu. Da li se ta teorema može primijeniti na funkciju  $\sin(x)$  na intervalu  $[-\pi, 0]$ ?
11. Formulirati Lagranžovu teoremu za diferencijabilne na intervalu funkcije. Da li se ta teorema može primijeniti na funkciju  $|x + 1|$  na intervalu  $(1, 2)$ ?
12. Formulirati Košijevu teoremu za diferencijabilne na intervalu funkcije. Da li se ta teorema može primijeniti na funkciju  $|x^2 - 1|$  na intervalu  $(1, 2)$ ? U rješenje uključiti skicu grafika date funkcije.
13. Formulirati Lopitalovo pravilo za neodređenost tipa  $\left[\frac{0}{0}\right]$ .  $\left(\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right)$ .
14. Potreban i dovoljan uslov monotonosti diferencijabilna funkcije.
15. Definicija lokalnog minimuma i maksimuma, definicija stacionarne tačke. Formulirati teoremu o stacionarnoj tački (Fermaova teorema).
16. Da li strogo monotona funkcija može imati stacionarnu tačku? Obrazložiti.
17. Da li je svaka stacionarna tačka tačka lokalnog ekstremuma? Obrazložiti.
18. Da li monotona funkcija može imati tačkolalnog ekstremuma? Obrazložiti.
19. Formulirati teoremu o potrebnom uslovu lokalnog ekstremuma diferencijabilne funkcije.

20. Formulirati teorem o dovoljnom uslovu lokalnog ekstremuma diferencijabilne funkcije (koristeći prvi izvod funkcije).
21. Formulirati teorem o dovoljnom uslovu lokalnog ekstremuma dva puta diferencijabilne funkcije (koristeći drugi izvod funkcije).
22. Odrediti najmanju i najveću vrijednost funkcije  $2x - \sqrt{5 - x^2}$ .
23. Definicija konveksne (konkavne) funkcije. Da li postoji funkcije koja nije konstanta, a istovremeno je i konveksna i konkavna? Obrazložiti.
24. Teorema o karakterizaciji konveksnosti i konkavnosti dvaput diferencijabilne funkcije.
25. Definicija prevojne tačke. Teorema o potrebnom uslovu prevoja.
26. Teorema o dovoljnom uslovu prevoja dvaput diferencijabilne funkcije (koristeći drugi izvod funkcije).
27. Teorema o dovoljnom uslovu prevoja triput diferencijabilne funkcije (koristeći treći izvod funkcije).
28. Definicija vertikalne asimptote. Da li funkcija  $\sqrt{1 - x^2}$  ima vertikalne asimptote? Obrazložiti.
29. Definicija horizontalne asimptote? Da li funkcija  $\sqrt{1 - x^2}$  ima horizontalne asimptote? Obrazložiti.
30. Definicija kose asimptote. Da li neprekidna funkcija može imati i kosu i horizontalnu asimptotu? Obrazložiti.
31. Koristeći Lopitalovo pravilo izračunati.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (4x - \pi) \operatorname{tg} 2x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin \sqrt{x} - x}{x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0+} (\ln x)^{\frac{\ln x}{x}}$ .
32. Odrediti intervale monotonosti i lokalne ekstremume funkcije  $|x| (3x^2 - 2x)$ .
33. Odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti i tačke prevoja funkcije  $1/x - 4 \operatorname{arctg} x$ .
34. Odrediti asimptote na grafik funkcije  $x + \arcsin \frac{x^2}{1+x^2}$ .
35. Data je parabola  $y^2 = 6x$  i prava  $x = 10$ . Odrediti dimenzije pravougaonika maksimalne površine čija su dva tjemena na pravoj  $x = 4$ , a preostala dva tjemena leže na datoj paraboli.
36. U kružnicu poluprečnika  $r$  upisan je jednakokraki trougao maksimalne površine. Izračunati dužine stranica tog trougla.
37. Odrediti pravougaonik maksimalne površine kojem dvije stranice leže na pozitivnim djelovima koordinatnih osa, a jedno tjeme leži na kružnici  $(x + 1)^2 + y^2 = 3$ . U rješenje uključiti odgovarajuću skicu.
38. Data je kriva  $y = 1 - \sqrt{x}$ . Odrediti trougao najveće površine kojeg od pozitivnih djelova koordinatnih osa odsijeca tangenta na datu krivu.
39. Odrediti vrijednost parametra  $a$  tako da parabola  $y = x^2$  odsijeca duž najmanje dužine od prave  $y = 2ax + 1$ . U rješenje uključiti odgovarajuću skicu i analizu koristeći diferencijalni račun.
40. Data je prava  $y + x = 0$  i kriva  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ . Od svih normala na datu krivu odrediti onu od koje data kriva i data prava odsijecaju odsječak najmanje dužine.