

Matematika 2

Pripremni materijal za završni ispit (1. dio)

Maj 2021.

Ime i prezime: _____ Broj indeksa: _____

1. Definicija primitivne funkcije na intervalu (a, b) .
2. Ako funkcija f ima primitivnu funkciju, da li je ta primitivna funkcija jedinstvena? Obrazložiti.
3. Da li je funkcija $1 - \sin x$ primitivna funkcija funkcije $\cos x$?
4. Ako znamo da su F i G primitivne funkcije na skupu \mathbb{R} , da li jednakost $F(x) = G(x) + x$ može važiti za svako $x \in \mathbb{R}$? Obrazložiti.
5. Definicija neodređenog integrala.
6. Ako je $F'(x) = f(x)$ izvesti izraz za $\int f(ax + b) dx$, gdje su $a \neq 0$ i b realni brojevi. (Teorema o svojstvima neodređenog integrala, svojstvo 5).
7. Koristeći prethodno izvedeni izraz za $\int f(ax + b) dx$ izračunati $\int \frac{dx}{2 - 9x^2} dx$ (ne uvodeći linearnu smjenu).
8. Formulirati teorem o metodi smjene u neodređenom integralu.
9. Koristeći odgovarajuću smjenu izračunati $\int (1 - x^2)^{-1/2} \arcsin x dx$.
10. Koristeći smjenu $t = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ izračunati $\int \sqrt{\frac{\ln^3(x + \sqrt{1 + x^2})}{1 + x^2}} dx$.
11. Uvesti neophodne pojmove, a zatim zapisati formulu za metod parcijalne integracije.
12. Koristeći parcijalnu integraciju izračunati $\int \operatorname{arctg} x dx$.
13. Izračunati: $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}} - x + 1}{\sqrt{x+1}} dx$
14. Izračunati: $\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx$
15. Izračunati: $\int x \operatorname{arctg} x dx$
16. Izračunati: $\int \arcsin \sqrt{x} dx$
17. Izračunati: $\int \frac{1}{(4x^2 + 1)^2} dx$

18. Izračunati: $\int \frac{3e^x - 2}{e^x - 4 + 5e^{-x}} dx$
19. Izračunati: $\int \frac{x^2}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$
20. Izračunati: $\int \frac{x - 1}{\sqrt{1 - x - x^2}} dx$
21. Izračunati: $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt[3]{1 + \cos x}} dx$
22. Definicija podjele zatvorenog intervala, i integralne sume na tom intervalu.
23. Navesti jednu konkretnu integralnu sumu funkcije $f(x) = x^2$ koja odgovara podjeli $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ intervala $[0, 1]$.
24. Definicija Riman integrabilne funkcije i Rimanovog integrala
25. Definicija gornje i donje integralne sume.
26. Napisati gornju i donju integralnu sumu za funkciju $f(x) = x^2$ koja odgovara podjeli $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ intervala $[0, 1]$.
27. Formulirati teoremu o gornjoj i donjoj integrabilnoj sumi.
28. Formulirati kriterijum o integrabilnosti funkcije preko donje i gornje integrabilne sume (teorema 2).
29. Da li je Riman integrabilna na intervalu $[0, 2]$ funkcija $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ -x^2, & x \geq 1 \end{cases}$? Obrazložiti (koristiti Teoreme 3, 4, 5).
30. Formulirati teoremu o srednjoj vrijednosti integrala.
31. Formulirati teoremu o izvodu integrala po granici.
32. Formulirati Njutn-Lajbnicovu formulu.
33. Data je neprekidna neparna funkcija $f(x)$. Ako je $0 < a < b$ dokazati jednakost: $\int_{-a}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx =$. (Koristiti teoremu o integralu neparne funkcije).
34. Data je neprekidna periodična funkcija $f(x)$ sa periodom T . Dokazati jednakost $\int_T^{3T} f(x) dx = 2 \int_0^T f(x) dx =$. (Koristiti teoremu o integralu periodične funkcije).
35. Formulirati kriterijum upoređivanja za nesvojstvene integrale nenegativnih funkcija definisanih na intervalu $[a, +\infty]$.
36. Formulirati granični kriterijum za nesvojstvene integrale nenegativnih funkcija definisanih na intervalu $[a, +\infty]$.
37. Izračunati: $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 x^2 \cos \frac{x}{2} dx$
38. Koristeći određeni integral izvesti formulu za površinu figure ograničene krivom $x^2 + y^2 = 2$.

39. Izračunati: $\int_0^2 \ln x \, dx$

40. Izračunati površinu figure ograničene lukom krive $y = 2 \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ i pravom $y = 1$.

Pozivamo studente da pripreme pitanja vezana za zadatke sa vježbi.