

Kolokvijum iz predmeta

Matematika 2

Pripremni materijal (drugi dio)

April 2020.

Ime i prezime: _____ Broj indeksa: _____

1. (a) Definicija minorante skupa, minimuma skupa i infimuma skupa.

(b) Da li otvoreni interval $(0,1)$ ima minorantu (i ako ima, da li ih ima više od jedne), a da li ima minimum i/ili infimum? Obrazložiti.

(c) Skicirati grafik funkcije $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ i odrediti njen domen i kodomen.

(d) Izračunati $f(g(e))$ ako je $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$, a $g(x) = \ln x$.

2. (a) Teorema o monotonom i ograničenom nizu. Poredbeni kriterijum (teorema o uklještenju) za nizove.

(b) Navesti primjer monotono opadajućeg neograničenog niza. Da li taj niz ima graničnu vrijednost?

(c) Izračunati: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 3)}{(n^2 - 1)(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n})}$

(d) Izračunati: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n + 2 \sin n}{n^2 + 4}$

3. (a) Košijeva definicija granične vrijednosti funkcije. Ljeva i desna granična vrijednost funkcije.

(b) Izračunati: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + e^x + 2}{4} \right)^{\frac{1}{3x}}$

4. (a) Definicija neprekidnosti u tački. Definicija neprekidnosti na skupu. Teorema o ekstremnim vrijednostima na zatvorenom intervalu.

(b) Da li postoji neograničena neprekidna funkcija na intervalu $[-1, 0)$? Da li postoji neograničena neprekidna funkcija na intervalu $[-1, 0]$? Obrazložiti.

(c) Ispitati neprekidnost funkcije f u tački $x = 0$. Ukoliko funkcija nije neprekidna, odrediti karakter tačke prekida.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - \cos 6x}{4x^2}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{\ln(1-x)}{\operatorname{tg} 3x}, & x > 0 \end{cases}$$

5. (a) Definicija diferencijala funkcije.

(b) Teorema o izvodu inverzne funkcije.

(c) Odrediti jednačinu normale na krivu $y = \ln^2(x-1)$ u tački $A(e^2 + 1, y_0)$.

(d) Koristeći Lopitalovo pravilo izračunati. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (4x - \pi) \operatorname{tg} 2x$

6. (a) Definicija konveksne i konkavne funkcije. Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke diferencijabilnih funkcija.

(b) Ispitati konveksnost i konkavnost i odrediti tačke prevoja funkcije $f(x) = (x^2 + 1)e^{x-1}$

(c) Odrediti asimptote na grafik funkcije: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}$

7. Data je parabola $y^2 = 6x$ i prava $x = 10$. Odrediti dimenzije pravougaonika maksimalne površine čija su dva tjemena na pravoj $x = 4$, a preostala dva tjemena leže na datoј paraboli.