Једначина са раздвојеним промјенљивим

Једначина облика $y' = f(x)g(y)$ се решава интеграцијом послије свођења на облик $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$

<u>примјер</u>: $(1+e^x)yy' = e^x$; $y(0)=1$

<u>решење</u>: $yy' = \frac{e^x}{(1+e^x)}$; $ydy = \frac{e^x}{(1+e^x)}dx$; $\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x)+C$

$y(0)=1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \ln(1+e^0)+C \Rightarrow C = \frac{1}{2} - \ln 2 \Rightarrow y = \sqrt{2\ln(1+e^x)+1-2\ln 2}$

Једначина облика $y' = f(ax+by+c)$ се смјеном $ax+by+c = z(x)$ своди на $\frac{z'-a}{b} = f(z)$ тј на $z' = a+bf(z)$ што је једначина са раздвојеним промјенљивим.

<u>примјер</u>: $(x+y)^2 y' = r^2$

<u>решење</u>: $y' = \frac{r^2}{(x+y)^2}$; $dy = \frac{r^2}{(x+y)^2}dx$, $(x+y)^2 dy = r^2 dx$

смјена $x+y = z(x)$; $1+y' = z'(x)$; $z'-1 = \frac{r^2}{z^2}$; $\frac{z^2}{r^2+z^2}dz = dx$ Интеграцијом се добија

$z - r^2\frac{1}{r}arctg\frac{z}{r} = x+C$; $x+y-rarctg\frac{x+y}{r} = x+C$ $x+y = rtg\frac{y-C}{r}$

Хомогена једначина

Једначина облика $y' = f(x,y)$ гдје је $f(x,y)$ хомогена функција (тј. функција која задовољава услов $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$) се може записати у облику $y' = F(\frac{y}{x})$. Смјеном $\frac{y}{x} = z(x)$ тј $y' = z + xz'$ ј-на добија облик $z + xz' = F(z)$ тј. $\frac{dz}{F(z)-z} = \frac{dx}{x}$ и може се решавати као ј-на са раздвојеним промјенљивим. Евентуална сингуларна решења се могу добити из услова $F(z) - z = 0$.

<u>примјер</u>: $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$

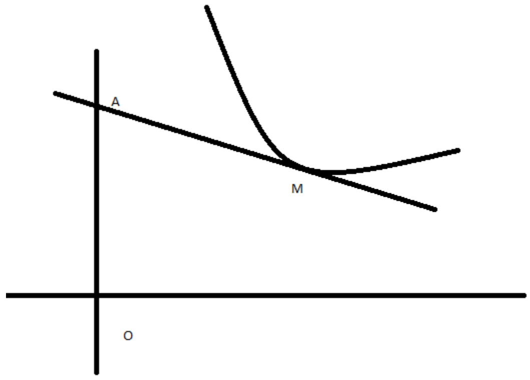
<u>решење</u>: $y' = \sqrt{1-(\frac{y}{x})^2} + \frac{y}{x}$; смјена $\frac{y}{x} = z(x)$; $y' = z+xz'$; $z+xz' = \sqrt{1-z^2}+z$;

$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = dx$, $\arcsin z = \ln|x| + \ln C$; $z = \sin\ln Cx$. Опште решење је $y = x\sin\ln Cx$.

Вршимо провјеру да ли $\sqrt{1-z^2} = 0$ даје сингуларна решења. $z = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x$ а то јесу решења, и не могу се добити ни за једну вриједност константе из општег решења па представљају сингуларна решења.

<u>примјер</u>: Наћи једначину фамилије кривих код којих свака тангента сијече ординатну осу у тачки подједнако удаљеној од додирне тачке и координатног почетка.

<u>решење</u>: Нека су: $M(x;y)$ - додирна тачка; $A(0;\alpha)$ - тачка пресјека са ординатном осом; $O(0;0)$ - координатни почетак. Услов који треба да буде задовољен



је $d(A;M) = d(A;O)$, тј. $\sqrt{(0-x)^2 + (\alpha - y)^2} = \sqrt{(0-0)^2 + (\alpha - 0)^2}$. Вриједност α одређујемо из једначине тангенте $Y - y = y'(X - x)$ и услова да тачка $A(0;\alpha)$ припада тангенти. Када умјесто координата произвољне тачке тангенте $T(X;Y)$ ставимо $A(0;\alpha)$ добијамо $\alpha - y = y'(0 - x)$, тј. $\alpha = y - xy'$. Из $x^2 + (\alpha - y)^2 = \alpha^2$ добијамо $x^2 + x^2 y'^2 = y^2 - 2xyy' + x^2 y'^2$. Добијена једначина има облик: $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$, тј.

$y' = \dfrac{(y/x)^2 - 1}{2\, y/x}$ па је решавамо смјеном $\dfrac{y}{x} = z(x)$; $y' = z + xz'$. $z + xz' = \dfrac{z^2 - 1}{2z}$;

$\dfrac{2z}{z^2+1} dz = -\dfrac{dx}{x}$; $\ln(z^2+1) = -\ln x + \ln C$; $(z^2+1)x = C$; $(\dfrac{y^2}{x^2}+1)x = C$; $(x^2 + y^2) = Cx$.

Тражена фамилија кривих је фамилија кружница са центром на x оси које пролазе кроз координатни почетак.

Једначина облика $y' = f(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2})$ се своди на хомогену на следећи начин:

- Ако систем једначина $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$ има јединствено решење $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$ уводе се нови аргумент и нова функција смјенама $\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$ гдје је $v = v(u)$.
- Ако систем нема јединствено решење (тј. ако је $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$) користи се смјена $a_1 x + b_1 y = z(x)$

<u>примјер</u>: $y' = -\dfrac{2x + 3y + 1}{3x + 4y + 1}$

<u>решење</u>: $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 3x + 4y + 1 = 0 \end{cases}$ има јединствено решење $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ па се уводе нови аргумент u и нова функција $v = v(u)$ смјенама $\begin{cases} x = u + 1 \\ y = v - 1 \end{cases}$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 3y + 1}{3x + 4y + 1} \Rightarrow \frac{dv}{du} = -\frac{2(u+1) + 3(v-1) + 1}{3(u+1) + 4(v-1) + 1}$$

$\dfrac{dv}{du} = -\dfrac{2 + 3\frac{v}{u}}{3 + 4\frac{v}{u}}$; смјена $\dfrac{v}{u} = z(u)$; $v' = z + uz'$; $z + uz' = -\dfrac{2 + 3z}{3 + 4z}$; $uz' = -\dfrac{3z + 4z^2 + 2 + 3z}{3 + 4z}$;

$\dfrac{3 + 4z}{2z^2 + 3z + 1} dz = -\dfrac{2}{u} du$; $\ln(2z^2 + 3z + 1) = -2\ln u + \ln C$; $2z^2 + 3z + 1 = \dfrac{C}{u^2}$. Опште решење је

$\left(2(\dfrac{y+1}{x-1})^2 + 3\dfrac{y+1}{x-1} + 1\right)(x-1)^2 = C$.

<u>примјер</u>: $y' = -\dfrac{x+y+1}{2x+2y-1}$

<u>решење</u>: $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$ нема решење па се смјеном $x+y=z(x)$ уводи нова функција $z=z(x)$. Опште решење: $2x+2y+3\ln|x+y-2| = x+C$. Сингуларно: $y=2-x$.

<u>примјер</u>: $3x+y-2+y'(x-1)=0$

<u>решење</u>: $(x-1)(3x+2y-1)=C$

Квазихомогена једначина се некада може свести на хомогену смјеном $y=z^{\alpha}$.

<u>Примјер:</u> $y' = -\dfrac{2xy^3}{x^2y^2-1}$

<u>Решење:</u> $y=z^{\alpha}$; $y'=\alpha z^{\alpha-1}z'$; $\alpha z^{\alpha-1}z' = -\dfrac{2xz^{3\alpha}}{x^2z^{2\alpha}-1}$; послије множења са $\dfrac{1}{z^{\alpha-1}}$ добија се $\alpha z' = -\dfrac{2xz^{3\alpha}}{x^2z^{3\alpha-1}-z^{\alpha-1}}$. Ако постоји α тако да збир експонената свих чланова који учествују у једначини буде једнак једначина ће бити хомогена. Ако такво α не постоји једначина се не може свести на хомогену тј. не може се решавати на овај начин. У овом случају треба да буде $1+3\alpha = 2+3\alpha-1 = \alpha-1$ а то је еквивалентно систему од двије једначине са једном непознатом: $\begin{cases} 1+3\alpha = 2+3\alpha-1 \\ 1+3\alpha = \alpha-1 \end{cases}$ који може имати или немати решење. Овај систем има решење $\alpha=-1$ па се ова једначина може свести на хомогену смјеном $y=z^{-1}$. Добијамо $-z' = -\dfrac{2xz^{-3}}{x^2z^{-4}-z^{-2}}$ што послије множења бројиоца и имениоца са $\dfrac{z^4}{x^2}$ даје $z' = \dfrac{2\frac{z}{x}}{1-(\frac{z}{x})^2}$ што јесте хомогена једначина која се даље решава смјеном $\dfrac{z}{x}=u(x)$. Опште решење је $\dfrac{xy}{x^2y^2+1}=Cx$.

<u>Примјер:</u> $(y^4-3x^2)dy = -xydx$

<u>Решење</u>: послије одређивања $\alpha = \dfrac{1}{2}$ добија се опште решење $x^2 = y^4 + Cy^6$.

<u>Примјер:</u> $(x+y^3)dx + (3y^5-3y^2x)dy = 0$

<u>Решење</u>: послије одређивања $\alpha = \dfrac{1}{3}$ добија се опште решење

$$arctg\frac{y^3}{x} = \frac{1}{2}\ln(y^6+x^2) + \ln C$$

Линеарна једначина

Једначина облика $y' + f(x)y + \varphi(x) = 0$ се може решавати тако што

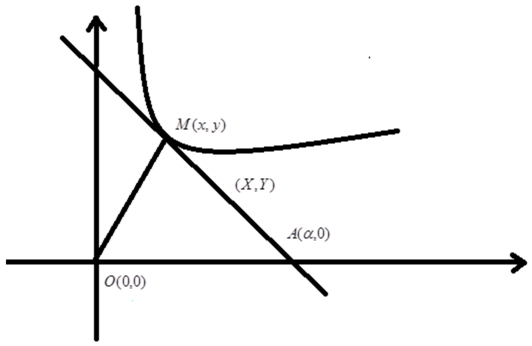
- Решење тражимо у облику производа $y = u(x)v(x)$ при чему се једна од непознатих функција одабере тако да једначина по преосталој непознатој функцији буде што једноставнија.
- Примијенимо формулу $y = e^{-\int f(x)dx}\left[C - \int \varphi(x)e^{\int f(x)dx}dx\right]$

Примјер: $y' + 2xy - 2xe^{-x^2} = 0$

Решење: $y = u(x)v(x)$ даје $u'v + uv' + 2xuv - 2xe^{-x^2} = 0$ тј. $u'v + u(v' + 2xv) - 2xe^{-x^2} = 0$.
Ако функцију $v(x)$ одредимо тако да буде $v' + 2xv = 0$ тј. $v = e^{-x^2}$ добијамо $u'e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} = 0$ тј. $u = x^2 + C$ па је опште решење $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$

Примјер: Површина троугла образованог радијус вектором произвољне тачке криве, тангентом у тој тачки и апсцисном осом једнака је 2. Наћи једначину те криве ако она пролази кроз тачку (1;2).

Решење: Једначина тангенте има облик $t: \; Y - y = y'(X - x)$ гдје су (x, y) координате додирне тачке а (X, Y) координате произвољне тачке тангенте. Задати троугао означимо са OAM гдје су тачке : $O(0,0)$ - координатни почетак; $A(\alpha, 0)$ - пресјек тангенте и апсцисне осе; $M(x, y)$ - додирна тачка тангенте и криве. Из услова $A \in t$ добијамо $0 - y = y'(\alpha - x)$ тј. $\alpha = x - \dfrac{y}{y'}$. Услов за површину троугла $P_{OAM} = \dfrac{\alpha y}{2} = 2$ тј. $\alpha y = 4$ даје



диференцијалну једначину која одговара фамилији кривих које задовољавају дати услов. Из $(x - \dfrac{y}{y'})y = 4$ добијамо једначину $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{xy - 4}$. Ако у тој једначини замијенимо улоге аргумента и функције тј. ако је третирамо као једначину по непознатој функцији $x = x(y)$ добијамо линеарну једначину $x'_y - \dfrac{1}{y}x + \dfrac{4}{y^2} = 0$ која има решење $x = e^{-\int -\frac{dy}{y}}\left[C - \int \dfrac{4}{y^2}e^{\int -\frac{dy}{y}}dy\right]$ тј. $x = y\left[C + \dfrac{2}{y^2}\right]$. Из општег решења и задатог услова добијамо $y(1) = 2 \Rightarrow 1 = 2\left[C + \dfrac{2}{2^2}\right]$ тј. $C = 0$ па је партикуларно решење $y = \dfrac{2}{x}$

Примјер: У базену се налази 100л раствора који садржи 10кг соли. У базен утиче 5л воде у минути, а истом брзином раствор истиче у други столитарски базен који је у почетку напуњен чистом водом. Вишак течности из њега се прелива. Послије колико времена ће количина соли у другом базену достићи максимум и колики ће он бити?

Решење: Количина соли у првом базену ће се за мали временски интервал Δt смањити за дио који директно пропорционално зависи од дужине интервала, количине воде која притиче у базен, и количине соли која се у том тренутку налази у базену, а обратно пропорционално од величине базена. Ако са $x(t)$ означимо количину соли у првом базену тада ће бити $x(t+\Delta t)=x(t)-\dfrac{\Delta t5x(t)}{100}$ тј. $\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=-\dfrac{x(t)}{20}$. Гранична вриједност кад $\Delta t\to 0$ даје нам диференцијалну једначину $x'(t)=-\dfrac{x(t)}{20}$ која има опште решење $x(t)=Ce^{-t/20}$. Из почетног услова $x(0)=10$ добија се $C=10$ па је $x(t)=10e^{-t/20}$. Ако са $y(t)$ означимо количину соли у другом базену тада ће промјена за временски интервал Δt бити $y(t+\Delta t)=y(t)+\dfrac{\Delta t5x(t)}{100}-\dfrac{\Delta t5y(t)}{100}$ тј. $\dfrac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=\dfrac{x(t)}{20}-\dfrac{y(t)}{20}$. Гранична вриједност кад $\Delta t\to 0$ даје нам диференцијалну једначину $y'(t)+\dfrac{y(t)}{20}-\dfrac{1}{2}e^{-t/20}=0$ која има опште решење $y=e^{-\int\frac{dt}{20}}\left[C+\int\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{20}}e^{\int\frac{dt}{20}}dt\right]$ тј. $y=e^{-\frac{t}{20}}\left[C+\frac{1}{2}t\right]$. Из почетног услова $y(0)=0$ добија се $C=0$ па је $y=\dfrac{te^{-t/20}}{2}$. Како је $y'=\dfrac{e^{-t/20}}{2}(1-\dfrac{t}{20})$ то је $y_{\max}=y(20)=\dfrac{10}{e}\approx 3.68$ тј. Максимална количина соли у другом базену ће бити 3.68кг послије 20 минута.

Бернулијева једначина

Једначина облика $y'+f(x)y+\varphi(x)y^n=0;\quad n\notin\{0,1\}$ се смјеном $z(x)=y^{1-n}$ своди на линеарну на следећи начин: $y'+f(x)y+\varphi(x)y^n=0\ \ /y^{-n}$

$$y'y^{-n}+f(x)y^{1-n}+\varphi(x)=0\ ;\ z(x)=y^{1-n}\ ;\ z'(x)=(1-n)y^{-n}y'$$

$$\frac{z'}{1-n}+f(x)z+\varphi(x)=0$$

$$z'+(1-n)f(x)z+(1-n)\varphi(x)=0$$

примјер: $xy'+y-y^2\ln x=0$

решење: $y'y^{-2}+\dfrac{1}{x}y^{-1}-\dfrac{\ln x}{x}=0$; $z=y^{-1}$; $z'=-y^{-2}y'$; $-z'+\dfrac{1}{x}z-\dfrac{\ln x}{x}=0$;

$z'-\dfrac{1}{x}z+\dfrac{\ln x}{x}=0$; $z=e^{\int\frac{dx}{x}}[C-\int\frac{\ln x}{x}e^{-\int\frac{dx}{x}}dx]=x[C-\int\ln x\frac{dx}{x^2}]=x[C+\frac{\ln x+1}{x}]$ тј.

$z=Cx+\ln x+1$; $y=\dfrac{1}{Cx+\ln x+1}$.

примјер: $(2x^2y\ln y-x)y'=y$

решење: Обзиром да облик $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x^2y\ln y-x}$ није погодан за решавање можемо замијенити улоге независне промјенљиве и функције тј. прећи на облик $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2x^2y\ln y-x}{y}$; $x'_y+\dfrac{1}{y}x-(2\ln y)x^2=0$. Једначина сада има облик Бернулијеве: $x'_y+f(y)x+\varphi(y)x^2=0$

$x^{-2}x'_y+\frac{1}{y}x^{-1}-(2\ln y)=0$; $z(y)=x^{-1}$; $z'=-x^{-2}x'$; $-z'+\frac{1}{y}z-(2\ln y)=0$;

$z'-\frac{1}{y}z+(2\ln y)=0$; $z=e^{\int\frac{dy}{y}}[C-\int 2\ln y e^{-\int\frac{dy}{y}}dy]$ $=y[C-\ln^2 y]$; $z=\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x}=y[C-\ln^2 y]$

$1=xy[C-\ln^2 y]$.

<u>примјер</u>: $y'\cos y-\cos x\sin^2 y-\sin y=0$, $y(0)=\pi/2$.

<u>решење</u>: Послије смјене $\sin y=z$ једначина добија облик $z'-z-\cos xz^2=0$;

$-z^{-2}z'+z^{-1}+\cos x=0$; смјена $u(x)=z^{-1}$ даје $u'+u+\cos x=0$; $u=e^{-\int dx}[C-\int\cos xe^{\int dx}dx]$

$=e^{-x}[C-\int\cos xe^{x}dx]$; $u=e^{-x}[C-\frac{e^x\sin x+e^x\cos x}{2}]$ $=Ce^{-x}-\frac{\sin x+\cos x}{2}$

$z=\frac{1}{Ce^{-x}-\frac{\sin x+\cos x}{2}}$; $\sin y=\frac{1}{Ce^{-x}-\frac{\sin x+\cos x}{2}}$; $y=\arcsin\frac{2}{2Ce^{-x}-\sin x-\cos x}$. За

партикуларно решење имамо: $\frac{\pi}{2}=\arcsin\frac{2}{2C-1}$; $1=\frac{2}{2C-1}$; $y=\arcsin\frac{2}{3e^{-x}-\sin x-\cos x}$.

примјери за вјежбање:

$y'+2ax^3y^3+2xy=0$; решење: $y=[\sqrt{e^{2x^2}C-a(x^2+0.5)}]^{-1}$